Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.

Von Adolf Weiler in Stäfa bei Zürich.

Bei einem Complex sind die zugehörige Singularitätenfläche und die Congruenz seiner singulären Linien von ganz besonderem Interesse. Bekanntlich sind für die Complexe zweiten Grades beide von der vierten Ordnung und vierten Classe.

Der allgemeinste Complex zweiten Grades, sowie eine Reihe von Ausartungen desselben, sind bereits eingehend untersucht. Ein bekanntes Beispiel ist der Tetraëdral-Complex, dessen Gerade ein Tetraeder unter einem bestimmten Doppelverhältniss schneiden. Als Punktgebilde besteht seine Singularitätenfläche aus den vier Tetraëderebenen, als Ebenengebilde aus den vier Tetraëderecken. Die Congruenz der singulären Linien hat sich aufgelöst in eine Congruenz vierter Ordnung, nullter Classe und in eine nullter Ordnung, vierter Classe. Erstere umfasst alle durch die Tetraëderecken gehenden Geraden; letztere besteht aus allen Geraden in den Tetraëderebenen.

Eine Reihe anderweitiger Complexe zweiten Grades betrachtet Lie gelegentlich seiner Untersuchung über die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum (diese Annalen Bd. V. S. 233); es sind alle diejenigen, welche in einer bestimmten Gleichungsform mit 17 Constanten enthalten sind; ihre Singularitätenflächen sind Linienflächen.

Bis jetzt indess sind diese specielleren Complexe noch nicht *systematisch* untersucht worden, wie diess im Folgenden geschehen soll. Indem ich von der Discussion der allgemeinsten Gleichung ausgehe, bei der im Ganzen 58 verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, erhalte ich eine allmähliche und doch übersichtliche Abstufung.

Die meisten Flächen, die als Singularitätenflächen auftreten, sind allgemein bekannt. In vielen Fällen ist aber ihr Verhalten als Ordnungsfläche, Classenfläche und Brennfläche der singulären Linien sehr interessant.

Die Grundlagen und Hülfsmittel der Arbeit finden sich im ersten Theil eingehend auseinandergesetzt. Ich wende mich sodann (II—XII) zur näheren Betrachtung der einzelnen Fälle in der Reihenfolge, wie sie sich aus dem im ersten Theile entwickelten algebraischen Eintheilungsprincipe ergeben. Sodann gebe ich noch im letzten Theile (XIII.) neben einigen allgemeinen Sätzen tabellarische Zusammenstellungen der Complexe nach verschiedenen Gesichtspunkten. Die eine, welche nach den auftretenden Singularitätenflächen ordnet, ist besonders eingehend ausgeführt.

I.

Grundlage der Arbeit, insbesondere die Eintheilung der Complexe.

Allgemeine Uebersicht.

In der Plücker-Cayley'schen Coordinatenbestimmung der Raumgerade wird diese als die Verbindungslinie zweier ihrer Punkte, resp. als die Schnittlinie zweier durch sie gehender Ebenen aufgefasst. Wenn in homogenen Coordinaten $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ und $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ zwei Punkte darstellen, so werden der durch sie bestimmten Geraden die folgenden sechs (homogenen) Coordinaten ertheilt:

$$p_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad p_{13} = y_1 z_3 - y_3 z_1, \quad p_{14} = y_1 z_4 - y_4 z_1,$$
$$p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3, \quad p_{42} = y_4 z_2 - y_2 z_4, \quad p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2.$$

Der folgende Ausdruck:

$$P \equiv p_{12} \cdot p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23}$$

ist identisch Null, wenn für die p die oben stehenden Werthe eingeführt werden.

Diese Coordinatenbestimmung bietet oft grosse Vortheile, doch tritt in ihr nicht hervor, dass die Gerade als Raumelement angesehen wird. Das letztere erreichen wir sofort, wenn wir von den Gleichungen ganz absehen, welche die p mit den Punktcoordinaten verbinden. In diesem Falle ertheilen wir der Geraden sechs solche Grössen p, welche die Gleichung $P = 0$ erfüllen, als Coordinaten. — Das Gebiet der Grössen p ist ein fünffach unendliches, die Bedingungsgleichung $P = 0$ sondert aus demselben eine (quadratische) vierfach unendliche Mannigfaltigkeit aus, die geometrisch durch die Gesammtheit der Raumgeraden dargestellt ist.

Ein Complex wird dann bestimmt durch eine weitere (zu $P = 0$ hinzutretende) Gleichung in den p:

$$\Omega = 0.$$

Er besteht aus dreifach unendlich vielen Geraden.

Ist nun Ω in den p insbesondere vom zweiten Grad, so nennen wir den dadurch definirten Complex ebenfalls vom zweiten Grad. Da dieser der Gegenstand unserer Untersuchung ist, so haben wir zunächst von zwei simultanen homogenen und quadratischen Gleichungen $P = 0$,

$\Omega = 0$ zwischen sechs Variabeln auszugehen. Da wir uns durchaus auf projectivischem Standpunkt befinden, so dürfen wir die Coordinaten p beliebig so linear transformiren, dass die Form P in ein Multiplum ihrer selbst übergeht. Denn in seiner Inauguraldissertation*), fernerhin auch im zweiten Band dieser Annalen (S. 203 u. f.) hat Klein gezeigt, dass eine solche Transformation einer Collineation resp. einer dualistischen Umformung des Raumes entspricht (und umgekehrt). Wird diese Transformation auf alle möglichen Formen P, Ω angewandt gedacht, so ergiebt sich eine natürliche Eintheilung der Complexe. Wir werden weiter unten hierauf zurückkommen und merken uns einstweilen nur, dass Klein die Discussion der in der allgemeinen Gleichung $\Omega = 0$ enthaltenen Complexe auf ein algebraisches Problem zurückgeführt hat: *Es sollen zwei Formen zweiten Grades, homogen in sechs Variabeln, gleichzeitig auf eine kanonische Form gebracht werden.* Dieses Problem ist für den allgemeinsten Fall schon sehr frühe gelöst, zuerst wohl von Jacobi (im 2. Band von Crelle's Journal). Durch lineare Transformation bringt derselbe beide Formen auf *rein* quadratische; die Möglichkeit dessen setzt aber eben den allgemeinsten Fall voraus.

Sylvester**) geht von zwei *beliebigen* quadratischen Formen aus und betrachtet mit ihnen die Lagenbeziehungen der damit zusammenhängenden Orte zweiten Grades. Eine Determinantenbetrachtung führt ihn zu einer erschöpfenden Eintheilung, bei beliebiger Zahl von Variabeln. In dem allgemeinsten Fall hat man die von Jacobi entwickelte kanonische Form; in den speciellen Fällen gewinnt er sie dadurch geometrisch, dass er das Coordinatensystem passend wählt; für das binäre, ternäre und quaternäre Gebiet giebt er alle an. Für mehr Dimensionen giebt er nur noch die Anzahl der möglichen Fälle; dieselbe ist indess nur noch bei fünf Dimensionen richtig, bei mehr Dimensionen ist sie zu klein***). — Die Ableitung der kanonischen Formen in diesen Fällen wäre wohl nach seiner Methode nicht einfach.

Weierstrass†) löst das Problem in voller Allgemeinheit. Er geht von zwei bilinearen Formen mit n Variabeln aus und giebt für alle Fälle die kanonische Form. Die Gesetze wendet er dann auf die quadratischen Formen an. Er führt die Determinantenbetrachtungen von Sylvester weiter durch.

---

*) „*Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form.*" Bonn, 1868.

**) Phil. magazine 1851 pag. 119, 295, 415

***) Vrgl. a. a. O. pag. 139. Auch Lüroth hat in einer Arbeit, die wir noch weiter nennen werden (S. 153), einen Fall nicht aufgezählt.

†) Berliner Monatsberichte 1858, 1868.

Klein erörtert in seiner Inauguraldissertation, unter Zusammenfassung der Hauptresultate, insbesondere den Fall von sechs homogenen Variabeln und verwerthet ihn für die Eintheilung der Complexe zweiten Grades. Er betrachtet sodann ausführlicher den allgemeinsten Fall.

Bevor wir näher auf diese Eintheilung eingehen, sei noch Etwas erwähnt, was den geometrischen Vorgang der Transformation anbetrifft. — Unser altes Coordinatensystem, in der Coordinatenbestimmung der p, besteht aus den sechs speciellen Complexen $p = 0$, deren Directricen die Kanten eines „Fundamental-Tetraeders" bilden. Da eine lineare Verbindung von speciellen linearen Complexen aber in der Regel einen allgemeinen linearen erzeugt, so wird nach der Coordinatentransformation das Coordinatensystem aus sechs linearen Complexen bestehen, die nicht ausschliesslich specielle sein werden. Diese sechs Complexe, welche das Coordinatensystem bilden, wollen wir mit Klein die „*Fundamentalcomplexe*" nennen*).

Ueber die Transformation und die Eintheilung.

Werden die neuen Variabeln mit $x_1, x_2, \cdots x_6$ bezeichnet, so seien die Formen P und Ω in die folgenden übergegangen:

$$P_1 = \Sigma a_{ik} x_i x_k , \qquad \Omega_1 = \Sigma b_{ik} x_i x_k ,$$

(wo $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ sein möge). Die Determinante von $\Omega_1 + \lambda P_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} + \lambda a_{11} & \cdots & b_{16} + \lambda a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{61} + \lambda a_{61} & \cdots & b_{66} + \lambda a_{66} \end{vmatrix}$$

ist es nun, auf die es ankommt; sie ist eine Invariante des betreffenden Complexes. Δ ist eine ganze rationale Function sechsten Grades in λ, also identisch mit:

$$A \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} \cdots$$

wo A die Determinante von P, λ_i aber eine $\nu_i$fache Wurzel von λ in $\Delta = 0$ bedeutet, so dass $\Sigma \nu_i = 6$ ist.

Es ist nothwendig, auch die Unterdeterminanten von Δ zu betrachten. Mit Δ' wollen wir irgend eine erste (fünfreihige) Unterdeterminante, mit Δ'' eine zweite (vierreihige) etc. bezeichnen. Diese $\Delta', \Delta'' \cdots$ sind zwar keine Invarianten, dagegen ist das simultane Verschwinden aller Δ', aller Δ'' etc., etwas Invariantes.

Der Factor $\lambda - \lambda_i$ von Δ soll nun in allen Δ' ν_i'mal, in allen Δ'' ν_i''mal etc. enthalten sein. Für diese Grössen gilt das Gesetz:

---

*) Vgl.: Diese Annalen, Bd. II. a. a. O.

$$\nu_i > \nu_i' > \nu_i'' > \cdots$$

Die Differenzen dieser Grössen:

$$e_i = \nu_i - \nu_i', \quad e_i' = \nu_i' - \nu_i'', \quad e_i'' = \nu_i'' - \nu_i''', \cdots$$

sind für uns von ganz besonderer Wichtigkeit. Für dieselben gilt, wie Weierstrass zeigt, zunächst das Folgende:

$$e_i \geqq e_i' \geqq e_i'' \geqq \cdots;$$

sie sind in dieser Reihenfolge der Grösse nach geordnet. Insbesondere ist:

$$(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i} \cdot (\lambda - \lambda_i)^{e'_i} \cdots$$

In der ganzen Determinante ist nun $\lambda - \lambda_i$ $\nu_i$mal enthalten, in den Δ' noch ν_i'mal etc. Beim Uebergang von Δ zu den Δ' geht von $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ verloren. Es ist das ein Factor, der in gewissem Sinne an der Determinante Δ haftet. Geht man weiterhin von den Δ' zu den Δ'', so löst sich der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e'}$ als etwas nur an den Δ' haftendes ab, etc. — Dieses ist eine natürliche Zerlegung des $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ in Factoren, und diese Factoren nennt man nach Weierstrass *„Elementartheiler"*.

Die Bedeutung der Elementartheiler wird durch das Folgende klar gestellt: Sind zwei Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2, das eine durch lineare Transformation aus dem andern abgeleitet —, oder, soll das eine linear in das andre transformirbar sein, so müssen in beiden Paaren die Elementartheiler übereinstimmen. In unserer projectivischen Auffassung stellen die Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2 demnach denselben Complex vor (diese Formen gleich Null gesetzt gedacht), wenn in den Determinanten beider die Vertheilung der Wurzeln und Elementartheiler dieselbe ist, und die absoluten Invarianten, das heisst also die Verhältnisse der Wurzeln, übereinstimmen. — Oder, mit andern Worten: Wir erhalten eine erschöpfende Aufzählung aller Complexe zweiten Grades, wenn wir in der Determinante Δ die Vertheilung der Wurzeln, und weiterhin die der Elementartheiler, auf alle möglichen Weisen annehmen.

Es ist nun nach dem Vorangehenden offenbar gleichgültig, ob wir erst die Vertheilung der Wurzeln λ_i in $\Delta = 0$ und dann innerhalb dessen die der Elementartheiler auf alle möglichen Weisen vornehmen, — oder ob wir das Umgekehrte thun. In jedem der beiden Fälle wird dieselbe Eintheilung erzielt. Für die Darstellung des Folgenden ist das letztere vortheilhafter.

Wir fanden vorhin, dass $\Sigma \nu_i = 6$, ferner dass $e_i + e_i' + \cdots = \nu_i$ ist. Hieraus ergiebt sich sofort: $\Sigma e_i^{(k)} = 6$. Die Zahl 6 lässt sich aber auf 11 verschiedene Weisen in Summanden zerlegen, und wir haben demnach vorerst 11 Gruppen von Complexen, dargestellt durch:

$$[111111],\ [11112],\ [1113],\ [1122],\ [114],\ [123],\ [222],$$
$$[15],\ [24],\ [33],\ [6]^{*)};$$

[123] z. B. will sagen, es sei ein einfacher, ein zweifacher und ein dreifacher Elementartheiler vorhanden.

Hierauf denken wir die Elementartheiler entweder als zu sämmtlich verschiedenen, oder als zu theilweise gleichen Wurzeln, oder endlich als zu einer einzigen (sechsfachen) Wurzel gehörig. Zur Unterscheidung dessen empfiehlt sich die folgende Bezeichnung: Wenn ein $m$facher, ein $n$facher etc. Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören, so klammern wir die betreffenden Zahlen ein und schreiben: $(m, n \cdot \cdot)$. Der Fall [123] z. B. wird also die folgenden 5 Möglichkeiten enthalten:

$$[123],\ [(12)3],\ [2(13)],\ [1(23)],\ [(123)].$$

Der Fall [2(13)] z. B. sagt uns, die Determinante Δ habe zunächst einen Factor $(\lambda - \lambda_1)$ zweimal, ferner einen weiteren Factor $(\lambda - \lambda_2)$ viermal, die Unterdeterminanten Δ' aber $(\lambda - \lambda_1)$ nicht mehr, dagegen $(\lambda - \lambda_2)$ noch einmal, die Δ'' etc. schliesslich keinen von beiden mehr.

Wenden wir in allen den elf oben angegebenen Fällen das an dem Beispiel [123] gegebene Verfahren in gleicher Weise an, so erhält man 58 wesentlich verschiedene Fälle, d. h.: *Im Sinne der projectivischen Geometrie giebt es 58 wesentlich verschiedene Complexe zweiten Grades.*

Eine vollständige Gleichung zweiten Grades zwischen sechs Variabeln enthält 21 Glieder. Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in der eigentlichen Complexgleichung im Allgemeinen nur ein Glied fortschaffen. Mit Hülfe der Coordinatentransformation erreicht man jedoch eine weit stärkere Reduction der Gliederzahl. Das Problem, solche kurze, also bequeme Gleichungsformen für jeden Fall zu finden, ist, wie bereits angegeben, allgemein von Weierstrass gelöst. Wir wollen im Folgenden die Resultate dieser Transformationen in eine *„kanonische Form"* kurz zusammenstellen.

Zunächst hängt die kanonische Form lediglich ab von der Vertheilung der Elementartheiler; es giebt also ihrer 11. Aus den 11 Fällen, bei denen die Elementartheiler sämmtlich zu verschiedenen Wurzeln gehören, leiten wir alle andern durch Gleichsetzen der Wurzeln ab. Um aber die kanonischen Formen P und Ω für die erstern Fälle zu erhalten, behandeln wir zunächst jeden einzelnen Elementartheiler für sich.

Die Transformation von P, Ω machen wir uns an der Determinante Δ von $\lambda P - \Omega$ deutlich; sie ist ersichtlich damit identisch, die Hori-

*) Vgl. Klein, S. 37 der Inauguraldissertation.

zontal- und Verticalreihen von Δ gleichzeitig vermöge derselben Multiplicatoren zusammenzufügen, wobei sich der Werth der Determinante höchstens um einen Factor ändert. Die kanonische Form spiegelt sich dann in einer kanonischen Form von Δ ab*). Wir wollen diese Verhältnisse an einem einfachen Beispiel beleuchten. Betrachten wir den Fall [321]. In der Determinante nehmen wir das Quadrat, dessen Glieder den ersten drei Horizontal- und den ersten drei Verticalreihen gemein sind, für den ersten Elementartheiler. Das Quadrat, gebildet aus den gemeinsamen Gliedern der vierten und fünften Horizontal- und Verticalreihen, theilen wir dem zweifachen Elementartheiler, und das letzte Glied der Diagonale dem einfachen zu. Dann füllen wir in der folgenden Weise aus:

$$\begin{array}{|ccc|cc|c|}
0 & -1 & \lambda-\lambda_1 & & & \\
-1 & \lambda-\lambda_1 & 0 & & & \\
\lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & & & 1 & \lambda-\lambda_2 & \\
 & & & \lambda-\lambda_2 & 0 & \\
\hline
 & & & & & \lambda-\lambda_3
\end{array}$$

Alle nicht besonders hingeschriebenen Glieder sind durch Nullen zu ersetzen. — Wir haben hier die kanonische Form der Determinante von $\lambda P - \Omega$; sie repräsentirt die kanonische Darstellung:

$$P \equiv 2x_1x_3 + x_2^2 \quad + 2x_4x_5 \quad + x_6^2$$
$$\Omega \equiv \lambda_1(2x_1x_3+x_2^2) + 2\lambda_2x_4x_5 + \lambda_3x_6^2 + 2x_1x_2 + x_4^2.$$

Das Verfahren in jedem andern Fall ist dem hier eingeschlagenen ganz analog. Man theilt jedem $k$fachen Elementartheiler ein in der Diagonale von Δ stehendes, $k$reihiges Quadrat zu und füllt dasselbe stets in derselben Weise aus. Wir unterlassen jede weitere Ausführung, indem wir auf die spätern Theile verweisen.

Zur geometrischen Interpretation.

Die Form P giebt uns sofort das Coordinatensystem resp. die sechs Fundamentalcomplexe. Nach Klein besitzt nämlich ein linearer Complex $\Sigma\alpha_i x_i = 0$ eine Invariante, die mit den α geränderte Determinante von P. Wird in einem unserer kanonischen Fälle diese Ränderung ausgeführt, so erhält man stets für unsere Invariante eine solche Function in den α_i, wie es P in den x_i ist, also hat die Invariante für uns den Werth $P(\alpha)$. Ist dieser Ausdruck insbesondere Null, so

*) Wir geben also hier eine einfache Lösung des „chess board"-Problems von Sylvester. Vgl. a. a. O. S. 140, Note. Die im Texte entwickelte Darstellung wurde mir von Klein mitgetheilt.

kann man die α_i, da sie $P = 0$ genügen, als Coordinaten einer Geraden auffassen. Der Complex ist dann ein specieller, indem seine Geraden sämmtlich die Gerade α treffen. Dies giebt die Entscheidung, ob ein Fundamentalcomplex ein allgemeiner oder ein specieller ist; für $x_k = 0$ sind alle α bis auf α_k Null. Da nun ein beliebiges der x in P, die kanonische Form vorausgesetzt, nur einmal, also entweder als Quadrat oder im Doppelproduct vorkommt, so hat man die Regel: *Die Fundamentalcomplexe, die in P in Doppelproducten stehen, sind specielle, die andern allgemeine.*

Die Bedingung der *involutorischen Lage* zweier linearer Complexe ist ebenfalls von P abhängig. Seien $\Sigma\alpha_i x_i = 0$, $\Sigma\beta_i x_i = 0$ zwei solche, so haben sie eine simultane Invariante und zwar die einerseits mit den α, anderseits mit den β geränderte Determinante von P. Verschwindet diese Invariante, so liegen die Complexe in Involution; insofern insbesondre beide specielle sind, schneiden sich ihre Directricen. Als Anwendung auf die *Fundamentalcomplexe* ergiebt sich, dass ein solcher, der in P im Quadrat vorkommt, mit allen andern in Involution liegt. Kommt er im Doppelproduct vor, ist er also ein specieller, so liegt er nur mit dem nicht in Involution, der mit ihm im Doppelproduct vereinigt ist, resp. seine Directrix gehört allen andern Fundamentalcomplexen, ausser diesem einen, an.

Die singulären Linien des Complexes $P = 0$, $\Omega = 0$ werden bekanntlich aus ihm durch einen Complex $\Omega' = 0$, der ebenfalls vom zweiten Grad ist, ausgeschnitten. Diese Form, Ω', soll auch im allgemeinen Fall angegeben werden; sie hängt von Ω sowohl als auch von P ab und ist:

$$\Omega' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1 \partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6 \partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_6} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial P}{\partial x_6} & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Bezeichnung als Ω' soll beibehalten werden. — Die Complexe $\Omega + \mu\Omega' = 0$ bilden insbesondere ein Büschel; alle haben die Congruenz der singulären Linien gemein. Bei Untersuchungen über diese sind also alle von ihnen gleichwerthig; die Anwendung dessen ist überall von grossem Vortheil. — Klein hat weiterhin aus dem Complex $P = 0$, $\Omega = 0$ alle diejenigen abgeleitet*), die mit ihm dieselbe Singularitätenfläche und das nämliche Verhalten der singulären Linien zu dieser überhaupt besitzen. Aus seiner Darstellung geht aber hervor,

---

*) Vgl. diese Annalen Bd. II., S. 224 (9).

dass alle diese Complexe dieselbe Elementartheiler- und Wurzelvertheilung haben, was die Zweckmässigkeit der von uns eingehaltenen Eintheilung hervortreten lässt.

Ein Complex zweiten Grades wird durch zwei simultane quadratische Gleichungen, also als Schnitt von zwei quadratischen Mannigfaltigkeiten (in einem „Raum von fünf Dimensionen") dargestellt. Ein solcher lässt sich daher in gewissem Sinn mit einer Raumcurve vierter Ordnung des gewöhnlichen Punktraumes vergleichen. In der That ist auch die Terminologie so weit ausgebildet, dass man den Complex zweiten Grades als Schnitt von zwei Flächen zweiten Grades in einem Raum von fünf Dimensionen bezeichnen kann. Von diesem Standpunkte aus stellt sich diese Arbeit neben diejenige von Lüroth: „Ueber Schnittcurven und gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen zweiten Grades."*) An Stelle der dort betrachteten, den beiden Flächen gemeinsamen Polarquadrupel, tritt hier das System der sechs Fundamentalcomplexe auf.

Mit der vorliegenden Untersuchung kann man noch folgende Ueberlegung verknüpfen, welche die Uebersicht bedeutend erleichtert. Kommen nämlich höhere als einfache Elementartheiler vor, so treten mit ihnen vielfache Complexgerade und vielfache Linien der Singularitätenfläche auf. Dasselbe tritt ein, wenn mehrere Elementartheiler zu einer Wurzel gehören. Dieselben höhern Elementartheiler und dieselben Verbindungen einfacher oder höherer ziehen aber in jedem Fall dieselben Folgerungen nach sich. Es entspringt hieraus eine wichtige, berechtigte Schlussweise, die an einem Beispiel erläutert werden soll. In dem Fall [1111(11)] werden zwei Doppelgerade, die sich nicht schneiden, auftreten. Dann hat man im Fall [11(11)(11)] nothwendig zwei Paare von Doppelgeraden, im Fall [(11)(11)(11)] drei solcher etc. Im zweiten Fall hat man ein windschiefes Vierseit, also im dritten Fall die sechs Kanten eines Tetraeders.

Diese Schlussweise wird durch den folgenden Satz vervollkommnet: *Eine mehrfache Complexgerade rechnet stets mehrfach als Axe und Strahl auf der Singularitätenfläche.* Nach Plücker**) ist nämlich eine Doppellinie des Complexes eine solche singuläre Linie, deren Punkte und (hindurchgehende) Ebenen sämmtlich singulär sind. Eine solche Linie liegt also auf der Singularitätenfläche; wir nehmen an, als μfacher Strahl, νfache Axe, ferner mögen zu ihr δ Doppelpunkte und τ stationäre Ebenen gehören. Der Grad der Singularitätenfläche ist 4, es ist also $\mu+\delta+\nu+\tau=4$. Es ist aber auch $\mu=\nu$, $\delta=\tau$, wenn sich,

*) Schlömilch's Zeitschrift 1867. Vgl. auch L. Painvin: Nouv. Annales de Math. 1868 (p. 103) und Sylvester a. a. O.

**) Vgl. Neue Geometrie, II., n. 307.

was meist eintritt, die Punkte und Ebenen der Geraden zum Complexe genau gleich verhalten. Es giebt das die Möglichkeiten $\mu = \nu = 1$, $\delta = \tau = 1$ und $\mu = \nu = 2$, $\delta = \tau = 0$ (oder umgekehrt). Man vergl. hierzu die einzelnen Fälle.

In den Coordinaten x kann man den zu einem Raumpunkt gehörigen Complexkegel nicht direct ausdrücken, wir erreichen dies durch Coordinatentransformation. Geht man nämlich zu den p_{ik}, also zu speciellen Fundamentalcomplexen zurück, so erhält man statt

$$\Omega_x = 0 : \Omega_p^* \equiv \Omega^*(y_i z_k - y_k z_i) = 0$$

wo y, z Punktcoordinaten sind. Hält man insbesondere den Punkt y fest, so giebt $\Omega^* = 0$ eine quadratische Gleichung in z, geometrisch einen Kegel 2. Ordnung vom Mittelpunkt y. Es ist dies der zu y gehörige Complexkegel. Zerfällt derselbe, so liegt y auf der Singularitätenfläche, und man erhält also die Punkte dieser Fläche durch Uebergang zu den p. Dieser Uebergang ist aber für alle, in einer kanonischen Form enthaltenen Fälle der nämliche. Er ist später für jede kanonische Form angegeben.

Bezüglich der angewandten Bezeichnung diene das Folgende. Die x bedeuten stets Liniencoordinaten, wenn nicht ausdrücklich eine andere Definition beigegeben ist. Die y und z werden stets Punktcoordinaten darstellen; die Ecken des zugehörigen Fundamentaltetraeders sind A_1, A_2, A_3, A_4, die Gegenseiten $y_1 = 0$ etc. Es ist dann $A_1 A_2$ eine Kante, die auch $y_3 = y_4 = 0$ genannt werden kann und welche Directrix des speciellen Complexes $p_{34} = 0$ ist.

II.

Erste kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

Die Elementartheiler sind alle gleich und zwar einfach. — In der oben stehenden Form von Ω gehören sie zu sämmtlich verschiedenen Wurzeln. Es ist das der Fall [111111] nach der angenommenen Bezeichnung, also der allgemeinste Complex zweiten Grades überhaupt. Seine Singularitätenfläche ist bekanntlich die „*Kummer'sche Fläche*" mit 16 Knotenpunkten und 16 Doppelebenen. Dieser Complex ist, besonders durch Klein, genau untersucht; wir gehen hier nicht weiter auf ihn ein*).

*) Zu diesem allgemeinen Fall gehört auch der Complex, dessen Singularitätenfläche eine Fresnel'sche Wellenfläche (Tetraedroid) bildet. Er hat keine Doppelgerade, während alle unsere Fälle solche besitzen. Für diesen Complex vgl. Battaglini: Giorn. di Mat. 1866, Aschieri: ebenda 1868, L. Painvin: Nouvelles Annales 1872. Er ist nach Klein dadurch charakterisirt, dass die 6 Wurzeln λ eine Involution bilden.

Indem die λ auf alle möglichen Weisen einander gleichgesetzt werden, erhält man alle die weiteren Fälle dieser Form. Die folgenden führen jedoch auf solche Complexe, die in zwei lineare zerfallen: $[11(1111)]$, $[1(11111)]$, $[(11)(1111)]$, $[(111111)]$, und zerfallende Complexe schliessen wir ein für allemal aus. Für den letzten Fall ist sogar $\Omega \equiv \lambda_1 P$, es ist also gar kein eigentlicher Complex.

Nach Ausschluss dieser fünf Complexe bleiben noch die folgenden *sechs:*

$$[1111(11)],\ [111(111)],\ [11(11)(11)],\ [1(11)(111)],\ [(11)(11)(11)],\ [(111)(111)]$$

Sie sollen in ebendieser Reihenfolge behandelt werden. — Die Form P geht offenbar in ein vielfaches der früheren in den Coordinaten p über bei folgender Substitution, wo $i = \sqrt{-1}$:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}, \qquad x_5 = p_{14} + p_{23},$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \quad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}). \quad x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}).$$

Diese Transformation, resp. die Auswahl eines solchen Coordinatentetraeders, ist auf 15 verschiedene Arten möglich. Eine genaue Darstellung giebt Klein*).

1. Den Fall *[1111(11)]* erhalten wir aus dem allgemeinsten dadurch, dass wir zwei der λ gleich setzen, z. B. $\lambda_2 = \lambda_1$. P hat immer noch die obige Form, dagegen ist jetzt:

$$\Omega \equiv \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

Da nun die Complexe $\Omega + \mu \cdot P = 0$ mit $\Omega = 0$ identisch sind, so können wir auch aus diesen, nur formal verschiedenen Complexen denjenigen herausgreifen, für welchen $\mu = -\lambda_1$. Wir haben dann die einfachere Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

wo die λ gleich den um λ_1 verringerten, früheren λ sind.

Vier lineare Complexe haben bekanntlich im Allgemeinen zwei sich nicht schneidende Gerade gemein. So haben $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ die Geraden gemein, für welche $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$ ist**). Es sind das die Leitgeraden der Complexgruppe $x_1 \pm i x_2 = 0$, resp. von $p_{34} = 0$, $p_{12} = 0$. Diese beiden Geraden sind, wie die Form von Ω zeigt, doppelte Complexgeraden, und überhaupt ergiebt sich: *Zur Verbindung von zwei einfachen Elementartheilern gehören stets zwei sich nicht schneidende doppelte Complexgerade, die der Congruenz der singulären Linien vierfach zählend angehören.*

---

*) Vgl. insbesondere: Diese Annalen, Bd. II, S. 206.

**) Vgl. Klein, a. a. O., S. 206.

Das Verhalten einer solchen Doppelgeraden zum Complex ersieht man wohl am deutlichsten, wenn man die Complexfläche bildet, welche sie als Leitgerade hat. Wir fassen diese auf als gebildet durch alle Complexkegelschnitte in den Ebenen durch diese Gerade. Jeder dieser Kegelschnitte zerfällt nach Plücker in ein Punktepaar auf der Geraden. Für vier der Ebenen wird sich ein Doppelpunkt ergeben und diese vier Punkte geben die Complexfläche als Klassenfläche. Die vier, in gleicher Weise auftretenden Doppelebenen geben die Fläche als Punktgebilde*).

Die singulären Linien befriedigen neben $\Omega = 0$ auch noch die folgende Gleichung:

$$\Omega' \equiv \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2 + \lambda_5^2 x_5^2 + \lambda_6^2 x_6^2 = 0.$$

Wir machen von ihr erst in späteren Fällen Gebrauch. Die Congruenz der singulären Linien zerfällt hier nicht.

Es handelt sich nun um die Singularitätenfläche. Dieselbe enthält zwei Doppelgerade, doch ist das Verhalten derselben zur Fläche nicht ohne Weiteres vorauszusagen, sondern es muss die Gleichung der Fläche abgeleitet werden. — Indem man zu den p_{ik} zurückgeht, wird aus $\Omega = 0$:

$$\lambda_3(p_{13}+p_{42})^2 - \lambda_4(p_{13}-p_{42})^2 + \lambda_5(p_{14}+p_{23})^2 - \lambda_6(p_{14}-p_{23})^2 = 0.$$

Fasst man die p_{ik} auf als $y_i z_k - y_k z_i$, so giebt diese Gleichung sofort den Complexkegel vom Punkte y in laufenden (Punkt-) Coordinaten z. Für den gesuchten Ort zerfällt dieser Kegel, also auch jeder ebene Querschnitt desselben. Als Schnittebene sei $z_1 = 0$ benutzt, die Coefficienten der Gleichung dieses Schnittes setzen sich quadratisch aus den y zusammen. Seine Discriminante ist also eine Function vom sechsten Grad in y, d. h.: Unser Ort ist eine Fläche sechsten Grades. — Der Complexkegel zerfällt für die Punkte der Ebene $z_1 = 0$ im Allgemeinen nicht. Doch besteht der betreffende Schnitt aus einem Geradenpaar. Diese Ebene ist desshalb von der oben angegebenen Fläche sechsten Grades auszuschliessen, und zwar doppelt zählend. In der That hat die oben bestimmte Gleichung den Factor y_1^2**). — Dieser Factor wird auch später immer wieder auftreten bei analoger Bestimmung des Ortes der singulären Punkte. — Indem wir ihn herausziehen, erhalten wir die eigentliche Singularitätenfläche:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3-\lambda_4)(y_1^2y_3^2+y_4^2y_2^2) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_5-\lambda_6)(y_1^2y_4^2+y_2^2y_3^2)$$
$$+2\{\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6)\}\, y_1y_2y_3y_4 = 0.$$

---

*) Neben Plücker vgl. die Habilitationsschrift von Pasch.

**) Vgl. Plücker a. a. O. n. 315, 186.

Das Coordinatensystem ist so gewählt, dass zwei seiner Kanten, $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = y_4 = 0$ in die Doppelgeraden fallen. — Es ergiebt sich aus dieser Gleichung: *Die Singularitätenfläche ist die XI^te Gattung von Cremona's Linienflächen vierten Grades**). — Es ist leicht zu zeigen, dass sie auch die allgemeine Fläche dieser Art ist. — Auf jeder Doppelgeraden hat die Fläche vier Cuspidalpunkte, sie liegen hier paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken. Durch solche vier Cuspidalpunkte sind drei Involutionen bestimmt, also ist diese Wahl des Coordinatensystems auf dreierlei Weise möglich. (Die vier Cuspidalpunkte der einen Doppelgeraden und die vier der andern sind einander auf bestimmte Weise zugeordnet, so dass die Wahl der Involution auf der einen Geraden auch die auf der andern nach sich zieht.) Und in der That kann man auch die vier Grössen x_3, x_4, x_5, x_6 dreimal in analoger Weise durch die p ausdrücken, wie es eben geschah. — Zu jeder Doppelgeraden gehören sowohl vier Cuspidalpunkte, als auch vier Cuspidalebenen. Die Doppelverhältnisse aus beiden sind für beide Doppelgeraden gleich. Insbesondere ist dies Doppelverhältniss gleich dem charakteristischen Doppelverhältniss jeder ebenen Curve dritter Ordnung der Fläche. Sie repräsentirt eine absolute Invariante der Singularitätenfläche und des Complexes überhaupt.

In jedem Punkt einer Doppelgeraden hat man zwei Büschel von Complexgeraden, die mit den dort stattfindenden Tangentenebenen der Fläche im Allgemeinen nicht übereinstimmen. Für jede Doppelgerade wird es viermal eintreten, dass eine der Tangentenebenen mit einer der Büschelebenen zusammenfällt. — Es giebt also unter den Erzeugenden der Fläche keine singulären Linien.

Beim Uebergang von der Kummer'schen Fläche zu dieser speciellen rücken die 16 Doppelebenen der ersteren paarweise in die Cuspidalebenen der letzteren, da die Cuspidalebenen die einzigen, nach (zerfallenden) Kegelschnitten berührenden Ebenen sind. Ebenso vereinigen sich je zwei Doppelpunkte der Kummer'schen Fläche hier in einen Cuspidalpunkt**).

Der allgemeinste Complex zweiten Grades hat *19 Constante*, dieser aber nur noch *17*, seine Singularitätenfläche 16. Dieser Fall geht also aus dem allgemeinsten durch zweifache Particularisation hervor.

Wenn man hier die Constanten λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 so verändert, dass

---

*) Man vergleiche hierzu die bekannte Abhandlung: „*Sulle superficie gobbe di quarto grado*“, memorie dell' Accademia delle scienze, tomo VIII (serie 2ª).

**) Es mag hier ein für alle Mal auf die Arbeit von Kummer: „*Ueber die algebraischen Strahlensysteme etc.*“, Abh. d. Berl. Akad., hingewiesen werden. Hier vgl. man insbesondere S. 71.

nie zwei einander gleich, und nie eine gleich Null wird, so erhält man stets Complexe, die zu [1111(11)] gehören. Die absolute Invariante von vorhin wird sich verändern. Ist z. B.

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4)=\lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6),$$

so fällt das Glied mit $y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot y_4\cdot$ weg. Bei der Singularitätenfläche fallen für jede Doppelgerade zwei Cuspidalstellen zusammen. Diese Fläche ist bestimmt durch die folgenden Linien als Leitlinien: Zwei Gerade und eine ebene Curve dritter Ordnung (ohne Doppelpunkt), die von den beiden Geraden in zweien ihrer Wendepunkte getroffen wird*).

2. Indem wir uns dem Fall *[111(111)]* zuwenden, setzen wir im vorigen Fall am einfachsten eines der λ, z. B. λ_3, Null. Es ergiebt sich dann:

$$\Omega\equiv\lambda_4x_4^2+\lambda_5x_5^2+\lambda_6x_6^2=0$$
$$\Omega'\equiv\lambda_4^2x_4^2+\lambda_5^2x_5^2+\lambda_6^2x_6^2=0.$$

Wir haben hier eine Regelschaar $x_4=x_5=x_6=0$ von doppelten Complexlinien. Jede derselben ist Doppellinie der Singularitätenfläche. Wir finden damit das Resultat: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiter Ordnung, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden resp. vierfachen singulären Linien besteht.*

Das Verhalten der *singulären Linien* ist in diesem Fall ein sehr eigenthümliches. *Die von ihnen gebildete Congruenz zerfällt in vier lineare.* Aus $\Omega=0$, $\Omega'=0$ ergeben sich nämlich die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{x_4^2}{x_5^2}=\frac{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)},\quad \frac{x_5^2}{x_6^2}=\frac{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)}{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)},\quad \frac{x_6^2}{x_4^2}=\frac{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)}{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}.$$

Indem wir die Bezeichnung einführen:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6):\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4):\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)=\alpha^2:\beta^2:\gamma^2,$$

erhalten wir:

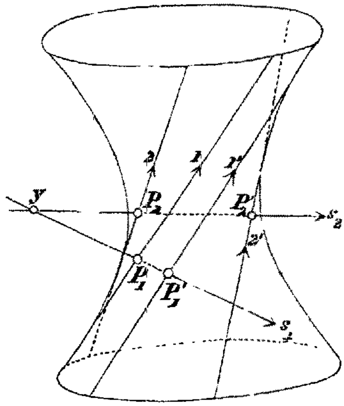
$$\frac{x_4}{\pm\alpha}=\frac{x_5}{\pm\beta}=\frac{x_6}{\pm\gamma}.$$

Es treten vier wesentlich verschiedene Zeichencombinationen auf, welche unsere vier Congruenzen ergeben.

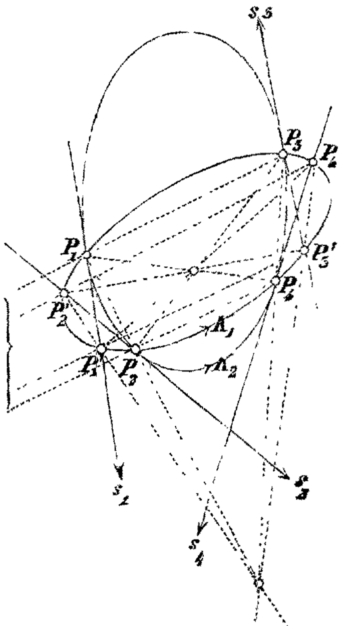
Die zu einer linearen Congruenz gehörigen, zweifach unendlich vielen Linien treffen stets zwei bestimmte Raumgerade, welche man die Directricen der Congruenz nennt. (Diese Directricen können auch unendlich nahe zu einander sein, oder sich schneiden.) In unserm Fall erhalten wir 8 Directricen, die paarweise eine Congruenz ergeben; insbesondere aber liegen sie sämmtlich auf der Singularitätenfläche,

*) Vgl. Cremona, a. a. O. § 12.

gehören jedoch nicht der Erzeugung an, die aus doppelten Complexgeraden besteht. Von ihnen fallen keine zwei zusammen. 1, 1' seien die Directricen der ersten; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4' die der übrigen Congruenzen. Durch einen beliebigen Raumpunkt y geht an 11' etc. je eine Transversale, es sind das die vier singulären Linien des Punktes y. Die Directricen 1, 2, 3, 4 sollen von diesen singulären Linien in den Punkten P_1, P_2; P_3, P_4 getroffen werden, die vier andern in P_1', P_2', P_3', P_4'. Von den Punkten P_1, P_1' etc. ist je einer der singuläre, es seien dies P_1, P_2, P_3, P_4. Dann sind die Ebenen durch diese singulären Linien und die Directricen 1', 2', 3', 4' die zugehörigen singulären Ebenen. Diese Trennung der 8 Directricen ist für alle Raumpunkte dieselbe. Wir sehen also, dass die *Brennfläche der singulären Linien sich in 8 Gerade aufgelöst hat, wovon vier erfüllt sind von singulären Punkten, die andern vier aber umhüllt von singulären Ebenen.*



In der obenstehenden Figur sind zwei Directricenpaare und die zugehörigen singulären Linien für den Punkt y verzeichnet. — In P_1 wird die singuläre Linie der ersten Congruenz die Singularitätenfläche berühren; die Fläche zweiten Grades wird dort durchsetzt (da sie aber doppelt zu zählen ist, kann man dies doch als Berührung auffassen). — Liegt der Punkt y insbesondere auf der Singularitätenfläche, so fallen die vier singulären Linien in eine zusammen. Wir sehen jetzt deutlich, dass die eine Erzeugung der Fläche aus vierfachen singulären Linien besteht*).



*) Vgl. die Habilitationsschrift von Pasch, insbesondere § 5. In unserm Fall würde die Fläche zweiter Ordnung, welche Singularitätenfläche ist, doppelt zählend als Brennfläche der (gesammten) singulären Linien auftreten.

In einer beliebigen Ebene habe man die vier singulären Linien s_1, s_2, s_3, s_4, diese Ebene treffe die 8 Directricen in P_1, P_2, P_3, P_4; P_1', P_2', P_3', P_4'; s_1 ist dann die Verbindungslinie von P_1 mit P_1', P_1 ihr singulärer Punkt. Der Kegelschnitt der 8 Punkte P: K_1 ist der Schnitt unserer Ebene mit der Singularitätenfläche; der Complexkegelschnitt K_2 derselben Ebene geht dann durch P_1, P_2, P_3, P_4 und tangirt in ihnen die Linien s. (Vgl. die Figur auf der vorstehenden Seite.) Die 8 Punkte P gruppiren sich in zwei Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und P_1', P_2', P_3', P_4', welche dasselbe Diagonaldreieck haben. (Umgekehrt bilden stets die acht Ecken von zwei Vierecken mit gemeinsamem Diagonaldreieck eine dem entsprechende Figur.)

Wie für den Complexkegelschnitt erhält man auch für einen Complexkegel acht Elemente. Der Mittelpunkt sei y, so sind vier Erzeugende des Kegels die Transversalen σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 an die Directricenpaare $1\,1'$, $2\,2'$, $3\,3'$, $4\,4'$. Die Tangentialebenen längs diesen vier Erzeugenden (den vier singulären Geraden des Complexkegels) gehen ausserdem durch die Directricen $1'$, $2'$, $3'$, $4'$.

Dieser Complex ist durch dreifach unendlich viele Raumtransformationen in sich selbst überführbar. Jede solche Transformation muss die Singularitätenfläche (zweiten Grades) in sich überführen, insbesondere aber diejenige Erzeugung ganz unverändert lassen, welcher die acht Directricen angehören. Die Geraden der zweiten Erzeugung (die vierfach singulären Linien) schieben sich so fort, dass die von ihnen gebildete Erzeugung als Ganzes bestehen bleibt. Und das ist eben auf dreifach unendlich viele Weisen zu erreichen: je drei Geraden der Erzeugung können drei beliebige andere zugeordnet werden, und dann ist allemal eine Transformation völlig bestimmt. — Dass aber hiebei der Complex durchaus nicht verändert wird, folgt ganz einfach daraus, dass nach wie vor die Complexkegelschnitte und die Complexkegel für alle Ebenen, bez. Punkte des Raumes auf dieselbe Weise construirt werden, also identisch sind. — Der Complex hat *14 Constante.* Zwei von ihnen sind *absolute Invarianten*, da der Complex dreifach unendlich viele Transformationen in sich hat. Dieses sind die beiden absoluten Invarianten, welche den fünf Erzeugenden zukommen, die den Complex bestimmen.

3. Werden im ersten Fall (S. 155) irgend zwei der Grössen λ gleichgesetzt, so erhält man den durch *[11(11)(11)]* dargestellten Fall. Es sei $\lambda_4 = \lambda_3$ gewählt, so hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_3 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_3^2 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5^2 x_5^2 + \lambda_6^2 x_6^2 = 0\,.$$

Der Vergleich mit dem Fall [1111(11)] (S. 155) zeigt, dass zwei

Paare von sich nicht schneidenden Doppelgeraden auftreten. Die Geraden des ersten Paares werden jedoch die des zweiten treffen. Die Formeln ergeben nämlich durchgehends die Regel: *Ist p_i eine doppelte Complexgerade, herrührend von einer vielfachen Wurzel λ_i, p_k eine solche, die mit einer weiteren vielfachen Wurzel λ_k auftritt, so schneidet die Gerade p_i die Gerade p_k.*

Der Rückblick auf [1111(11)] sagt weiter, dass die Geraden unseres doppelten windschiefen Vierseits für die Singularitätenfläche gewöhnliche Doppelstrahlen und Doppelaxen sind. Dann hat man aber nothwendig das Folgende:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiter Ordnung, die zwei Linien jeder Erzeugung (ein windschiefes Vierseit) gemein haben.

Unser Resultat wird bestätigt durch die Gleichung der Singularitätenfläche. Indem wir die Grösse $\frac{2\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3(\lambda_5+\lambda_6)}{\lambda_3(\lambda_5-\lambda_6)}$ mit C bezeichnen, ergiebt sich für dieselbe:

$$(1) \quad \left(y_1y_4+(C+\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)\left(y_1y_4+(C-\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)=0.$$

Die beiden Flächen bezeichnen wir mit F_1 und F_2. Die ihrer Unterscheidung entsprechende Trennung der singulären Linien ergiebt sich folgendermassen. Aus den beiden Gleichungen

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0$$

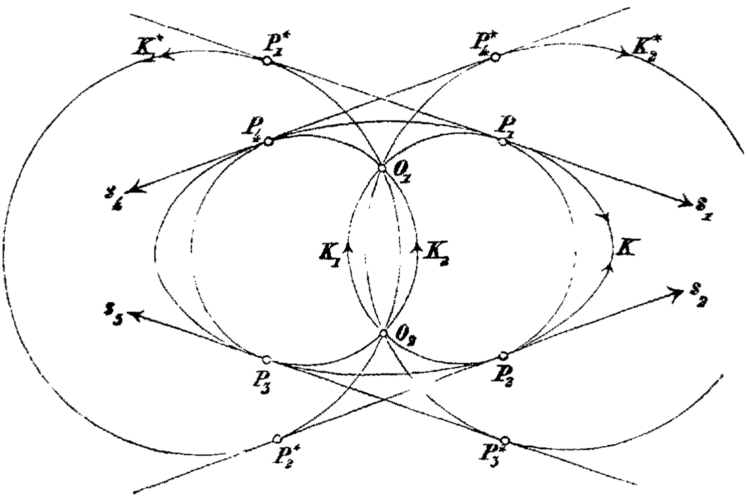
lässt sich insbesondere die zerfallende ableiten:

$$(2) \qquad \Omega' - \lambda_3\Omega \equiv (x_5+\alpha x_6)(x_5-\alpha x_6) = 0\,,$$

(wo $\alpha = i\sqrt{\frac{\lambda_6(\lambda_6-\lambda_3)}{\lambda_5(\lambda_5-\lambda_3)}}$). *Die singulären Linien bilden also zwei Congruenzen zweiten Grades.* — Es ist einleuchtend, dass die eine Congruenz den Tangenten von F_1, die andere denen von F_2 angehört.

Aber in diesem Falle können wir auch die *vollständige Brennfläche* der Congruenz der singulären Linien angeben, für welche die Singularitätenfläche nur einen Theil bildet. Ersichtlich besteht dieselbe überdiess noch aus denjenigen beiden Flächen zweiten Grades F_1^* und F_2^*, welche aus F_1 und F_2 durch die dualen Umformungen hervorgehen, welche durch die mit ihnen bez. zusammengehörigen linearen Complexe (2) gegeben sind. *Diese beiden Flächen enthalten ebenfalls die vier Doppelgeraden des zu untersuchenden Complexes; die Congruenz vierten Grades der singulären Linien besteht aus einem quadratischen Theile derjenigen Congruenz vierten Grades, welche F_1 und F_1^* umhüllt, und aus einem eben solchen Theile der Congruenz vierten Grades, welche F_2 und F_2^* umhüllt.*

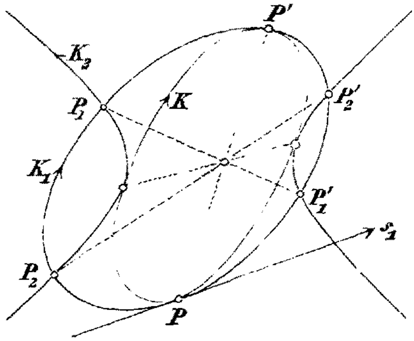
Die nebenstehende Figur soll diese Verhältnisse durch einen ebenen Schnitt zur Anschauung bringen. K_1, K_2, K_1^*, K_2^* gehören F_1, F_2, F_1^*, F_2^* an. Die Grundpunkte des Büschels, dem diese vier Kegelschnitte angehören, sind O_1, O_2 und die Kreispunkte der Ebene; s_1, s_2, s_3, s_4 sind die singulären Geraden der Ebene, K der Complex-



kegelschnitt. Die andern Tangenten, die K_1 und K_1^* gemein sind, gehören der quadratischen Congruenz $(F_1\, F_1^*)$ an, die hier nicht in Frage kommt etc. — Die Figur zeigt deutlich, wie K_1 und K_2 vor K_1^*, K_2^* bevorzugt sind und zwar dadurch, dass sie vom Complexkegelschnitt berührt werden. *Ebenso sind die Flächen F_1 und F_2 dadurch vor F_1^* und F_2^* bevorzugt, dass nur sie von den Complexkegelschnitten berührt werden.*

Wie der vorige Complex kann auch dieser auf eine ganz einfache Weise erzeugt werden. — Die Singularitätenfläche F_1, F_2 bestimmt den Complex nicht, sondern erst einfach unendlich viele Complexe. Nimmt man eine beliebige Raumgerade als Complexgerade hinzu, so erhält man noch vier Complexe. Denn in einer beliebigen Ebene durch diese Gerade giebt es noch vier Kegelschnitte, welche sie und den Schnitt mit F_1 und F_2 je zweimal berühren. Wählt man einen von ihnen als Complexkegelschnitt aus, so finden sich weitere Complexkegelschnitte eindeutig durch Drehung um eine seiner Tangenten, resp. um eine der schon bekannten Complexlinien.

Ist insbesondere eine singuläre Complexgerade s_1 gegeben, die F_1 berühren mag, so ist der Complex eindeutig bestimmt und seine Construction viel einfacher. Man lege wieder durch s_1 eine Ebene (vgl. nebenstehende Figur), sie schneide F_1 in K_1, F_2 in K_2. Die Schnittpunkte von K_1 mit K_2: P_1, P_1', P_2, P_2' sind die Schnittpunkte der Ebene mit dem Vierseit, das F_1 und F_2 gemein ist. (Dabei seien P_1 und P_1' die Schnittpunkte mit zwei Gegenseiten dieses Vierseits, ebenso P_2 und P_2'.) Es giebt zunächst drei Kegelschnitte, welche K_1 im Berührungspunkt P mit s_1 und einem weitern Punkt, ebenso K_2 in zwei Punkten berühren; von ihnen ist jedoch nur einer als Complexkegelschnitt der Ebene zulässig. Verbinde ich nämlich P mit einem Diagonalpunkt des Vierecks $P_1 P_1' P_2 P_2'$ und schneide K_1 mit dieser Linie, so giebt es je einen Kegelschnitt, welcher K_1 in P und in diesem Schnittpunkt,



so wie auch K_2 zweimal berührt. Aber es ist einer der Diagonalpunkte ausgezeichnet, nämlich der Schnittpunkt der Geraden $\overline{P_1 P_1'}$, $\overline{P_2 P_2'}$ (weil P_1, P_1' die Schnittpunkte mit dem einen, P_2, P_2' die mit dem andern Gegenseitenpaar des windschiefen Vierecks sind). Wird er bei der Construction verwandt, so erhält man den Complexkegelschnitt. — Durch Drehung der Ebene um alle Tangenten dieses eben construirten Kegelschnittes erhält man durch diese, resp. die vorige Construction alle Complexgeraden.

Es lässt dieser Complex einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst zu. Eine Abzählung würde in der That ergeben, dass er *15 Constante* hat, aus denen sich eine absolute Invariante zusammensetzen lässt. Diese Transformationen sind besonders einfach und geben eine directe Anschauung von den singulären Linien.

Für den allgemeinen Complex zweiten Grades hat Klein*) die Aufgabe gelöst, in der Congruenz der singulären Linien je einfach unendlich viele (consecutive) zu Developpabeln zusammenzufassen. Jede singuläre Gerade wird nämlich von zwei andern, unendlich nahen, geschnitten**). Geht man also von einer beliebigen aus, so erhält

*) Diese Annalen Bd. V, S. 296.

**) Vgl. die schon erwähnten Arbeiten von Kummer und Pasch.

man diese Developpabeln durch Aneinandersetzung solcher sich schneidender, consecutiver. Um die endliche Gleichung herzustellen, ist eine Differentialgleichung zu integriren, die auf hyperelliptische Integrale führt. — In diesem speciellen Fall gestaltet sich diese Sache etwas anders, jedenfalls aber bedeutend einfacher. Den Uebergang von einer solchen singulären Linie zur nächsten können wir nämlich als eine unendlich kleine Raumtransformation*) auffassen resp. darstellen, welche den ganzen Complex in sich selbst überführt. Die auftretenden Integrationen sind besonders einfach.

Um später die Gleichung der Developpabeln, resp. deren Rückkehrgeraden, in Punktcoordinaten schreiben zu können, soll zunächst unser Problem in den Coordinaten p_{ik} gelöst werden. (Klein benutzt in seiner Arbeit andere Coordinaten, die wir weiterhin ebenfalls anwenden wollen.) — Für die singulären Linien haben wir die Gleichungen (2) abgeleitet. Die dort auftretenden linearen Complexe schreiben wir in der Form:

$$(3) \qquad a p_{14} + b p_{23} = 0$$

(wo $a = 1 \pm \frac{\alpha}{i}$, $b = 1 \mp \frac{\alpha}{i}$). In der Annahme dieser Form liegt enthalten, dass wir uns nur mit der einen und nicht gleichzeitig mit beiden Congruenzen zweiten Grades beschäftigen. Es ist das erlaubt, da sich beide genau gleich verhalten. — Ausser der Gleichung (3) genügen die singulären Linien auch noch $\Omega = 0$, oder $\Omega' + \lambda\Omega = 0$. Indem man zu den p_{ik} übergeht und λ in der richtigen Weise wählt, erhält man insbesondere die Gleichung:

$$2\lambda_5\lambda_6 p_{12}p_{34} + (2\lambda_5\lambda_6 + \lambda_3(\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_3))p_{13}p_{42} = 0$$

oder

$$\alpha p_{12}p_{34} + \beta p_{13}p_{42} = 0.$$

Dieser Complex ist ein *tetraedraler*; er ist auf S. 169 behandelt als Fall [(11)(11)(11)]. — Für die singulären Linien (für die eine Congruenz) haben wir also:

$$(4) \qquad a p_{14} + b p_{23} = 0, \quad \alpha p_{12} \cdot p_{34} + \beta p_{13} \cdot p_{42} = 0.$$

Sei y ein Punkt der Singularitätenfläche, so geht durch ihn eine bestimmte singuläre Linie. Dieselbe verbindet ihn mit dem ihm unendlich nahen Punkte $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$, der in der Tangentialebene der Singularitätenfläche liegt und dessen Coordinaten die Werthe haben:

$$\varrho z_1 = y_1, \quad \varrho z_2 = y_2(1 + \sqrt{\beta}d\sigma), \quad \varrho z_3 = y_3(1 - \sqrt{\alpha}d\sigma),$$
$$\varrho z_4 = y_4(1 + (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})d\sigma),$$

*) Ueber solche unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst vergleiche man „*sur une certaine famille de courbes et de surfaces*“ par Klein et Lie, Comptes rendus, 1870; sowie diese Annalen t. IV, S. 50 ff.

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor, $d\sigma$ eine unendlich kleine Strecke. — Die Zunahmen der Coordinaten sind also bezüglich:

$$dy_1 = 0\,, \quad dy_2 = \sqrt{\beta}\, d\sigma\,, \quad dy_3 = -\sqrt{\alpha}\, d\sigma\,, \quad dy_4 = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})\, d\sigma\,.$$

Durch sie gelangen wir zu z, von z gehen wir zu $z + dz$ etc. Die Zusammensetzung dieser Punkte giebt die continuirliche Curve:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B\lambda^{\sqrt{\beta}} : C\lambda^{-\sqrt{\alpha}} : D\lambda^{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\,,$$

deren sämmtliche Tangenten singuläre Complexgeraden sind. — Die Constanten $A : B : C : D$ unterliegen einer Bedingungsgleichung, welche aussagt, dass diese Curve auf der richtigen Fläche $y_1 y_4 + \mu\, y_2 y_3 = 0$ liege. (Am einfachsten setzt man dabei $\lambda = 1$, nimmt also den Punkt $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B : C : D$ als Anfangspunkt der Raumtransformationen, die alle die Flächen μ in sich transformiren.)

Ersichtlich ist die Art der Curven nur von α und β abhängig. Aendern sich dann noch die A, B, C, D, so erhält man nur zweifach unendlich viele, im Allgemeinen gleich beschaffene Curven, von denen durch jeden Raumpunkt eine geht. — Ist das Verhältniss

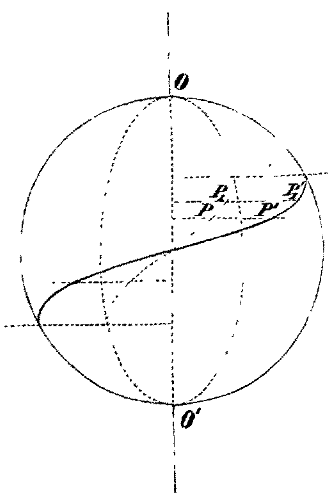
$$1 : \sqrt{\beta} : -\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$$

rational, so sind die Curven *algebraisch*. Ist das Verhältniss dagegen *incommensurabel*, so sind sie *transcendent*. So erhält man z. B. für $\beta = 1$, $\alpha = 4$ die Raumcurven dritter Ordnung, dargestellt durch $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A\lambda^2 : B\lambda^3 : C : D\lambda$.

Wenn eine gewisse metrische Specialisirung, welche der Allgemeinheit durchaus keinen Eintrag thut, angewandt wird, erhält man eine bequeme Anschauung der gemachten Transformationen, sowie der Curven. Für F_1 und F_2 nehmen wir nämlich zwei Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe und vereinigten Polen. (Dieselben mag man sich entstanden denken durch Rotation von zwei Kegelschnitten, die eine ihrer Axe vollständig, Grösse und Lage nach, vereinigt haben. In den Polen O und O' gehen für beide Flächen die Erzeugenden nach den Kreispunkten der dort gemeinsamen Tangentialebenen. Die Flächen haben also vier gemeinsame Erzeugende, die sich paarweise in O, O' und in zwei Kreispunkten treffen.

Wir denken OO' vertical (vgl. die Figur), die eine Fläche als Ellipsoid, die andere als Kugel. Die Transformationen dieser Flächen in sich selbst setzen sich aus Rotationen um die gemeinsame Axe OO' und um deren in Bezug auf die Flächen conjugirte Gerade, die unendlich ferne Horizontale, zusammen. Im erstern Fall hat man, wenn man nur reelle Ebenen in's Auge fasst, weiter keine Einschränkung, jedoch im letztern. Diese verschieben nämlich alle

Horizontalebenen unter sich, dürfen aber unter ihnen die durch O und O' gehenden nicht verändern. Man überzeugt sich, dass hiebei auch das Vierseit der gemeinsamen Erzeugenden unverändert bleibt.



Ein Punkt P der innern Fläche sei fixirt. Dreht man seinen Meridian unendlich wenig, so bewegt er sich horizontal auf seinem Parallelkreis. Unsere Curvengleichung giebt dann für ihn eine Bewegung in dem neuen Meridian, so dass er nach P_1 kommen möge. Dann bewegen sich alle Raumpunkte analog. Jeder dreht sich um denselben Winkel horizontal wie P und stellt sich dann in dieselbe Verticalebene ein wie P_1 (ferner bleibt er in der Fläche des Büschels, die durch ihn bestimmt ist). Der Punkt P' z. B. auf der Kugel, der mit P in derselben Parallelkreis- und Meridianebene liegt, bewegt sich nach P_1', so dass diese Beziehung zu P_1 dieselbe ist wie vorhin die von P' zu P. Beschreibt P eine von den singulären Linien umhüllte Curve, so thut das auch P'; die Figur giebt hiervon ein Bild.

Sind unsere Curven algebraische Raumcurven von ungerader Ordnung, so werden sie in diesem Fall stets imaginär. Sind dieselben transcendent, so werden sie sich im Allgemeinen um die Punkte O und O' unendlich oft herumwinden. Ein bekanntes Beispiel einer solchen ist die Loxodrome auf der Kugel, welche überall die Meridiane unter constantem Winkel trifft (vgl. hier insbesondere die angeführte Arbeit von Klein und Lie, sowie auch Plücker, Neue Geometrie, S. 61. Note).

Sehr einfach stellen sich diese Loxodromen in Liniencoordinaten dar. Wir nehmen wieder die eine Congruenz der singulären Linien und schreiben sie in der Form:

$$p_{13} \cdot p_{42} = K p_{14} p_{23}$$
$$p_{14} = A p_{23}$$

(vgl. die Formeln (4)). Wir führen jedoch statt der p_{ik} andere Coordinaten ein. Es ist nämlich möglich, eine Gerade durch vier Parameter auszudrücken, die wir mit A, B, C, K bezeichnen mögen und welche zu den p_{ik} in der folgenden Beziehung stehen:

$$A = \frac{p_{14}}{p_{23}}, \quad B = \frac{p_{12}}{p_{34}}, \quad C = \frac{p_{13}}{p_{42}}, \quad K = \frac{p_{13} \cdot p_{42}}{p_{14} \cdot p_{23}}.$$

Ist eine Gerade p gegeben, so sind die Grössen A, B, C, K eindeutig bestimmt, dagegen ist das Umgekehrte nicht der Fall. Sind nämlich die Werthe der vier Parameter bekannt, so ist die gesuchte Gerade der Schnitt von drei linearen Complexen und einem tetraedralen, oder der Schnitt des tetraedralen mit der Erzeugung (A, B, C) einer Fläche zweiten Grades. Es werden also vier sich nicht schneidende Gerade dargestellt, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Eine solche Coordinatenbestimmung wurde zuerst von Klein eingeführt*). Die einfach unendliche Complexschaar, die dazu verwandt wird, nennt man ein *Involutionssystem* (das unsrige ist nicht das allgemeine). Seine wesentlichen Eigenschaften sind die folgenden: Eine jede Raumgerade wird durch einen Parameter im vierten Grad bestimmt, so dass also durch sie vier Complexe der Schaar gehen. Diese vier liegen paarweise in Bezug auf die Gerade in Involution.

In unserm Fall sind nun A und K zwei constante Grössen, und die zweifach unendlich vielen Geraden der Congruenz sind durch zwei Parameter, B und C, dargestellt. — Es ist nothwendig, die p_{ik} durch die vier Parameter auszudrücken. Es ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
p_{12} &= \pm\sqrt{-AB(1+K)}\,, & p_{34} &= \pm\sqrt{-\frac{A}{K}(1+K)}\,,\\
p_{13} &= \pm\sqrt{AKC}\,, & p_{42} &= \pm\sqrt{\frac{A}{K}C}\,,\\
p_{14} &= A\,, & p_{23} &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Die Vorzeichen in p_{12} und p_{34} ändern sich zusammen, ebenso in p_{13} und p_{42}. — Es sind alle Linien singulär, für welche A und K die gegebenen Werthe haben. Wir sehen daher A und K fortan als constant an. — Zunächst ist die Bedingung, dass die Gerade p_{ik} und die unendlich nahe $p_{ik}+dp_{ik}$ sich schneiden, die folgende:

$$dp_{12}\cdot dp_{34}+dp_{13}\cdot dp_{42}+dp_{14}\cdot dp_{23}=0\,.$$

Nun benutzen wir die obigen Formeln zwischen den p und den vier Parametern und drücken aus, dass die Geraden A, B, C, K und A, $B+dB$, $C+dC$, K sich schneiden. Es ergiebt sich ohne Weiteres:

$$(1+K)\left(\frac{dB}{B}\right)^2-K\left(\frac{dC}{C}\right)^2=0\,.$$

Indem wir integriren, fassen wir unendlich viele singuläre Linien zusammen, die eine Developpable bilden. In unseren neuen Coordinaten hat diese die Gleichung:

---

*) Vgl. „*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*“ diese Annalen Bd. V, S. 272.

$$B = cC^{\pm\sqrt{\frac{K}{1+K}}},$$

wo c eine willkürliche Constante. Für jeden Werth c hat man eine Developpable dargestellt; man erhält sie alle, wenn man c von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändert.

4. In dem Falle [111(111)], S. 158, bestand die Singularitätenfläche doppelt zählend aus einer Fläche zweiten Grades, und die singulären Linien bildeten vier lineare Congruenzen etc. Wenn noch zwei einfache Elementartheiler zu einer Wurzel gehören, also für *[1(11)(111)]*, so treten noch zwei Doppelgerade auf. Es fallen dann je zwei Congruenzen in eine specielle zusammen, wie wir sehen werden*). — Wir haben zunächst:

$$\Omega \equiv \lambda_4\,(x_4{}^2 + x_5{}^2) + \lambda_6\,x_6{}^2 = 0\,,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_4{}^2(x_4{}^2 + x_5{}^2) + \lambda_6{}^2 x_6{}^2 = 0\,.$$

Die Regelschaar $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ besteht aus doppelten Complexgeraden, die vierfache singuläre Linien sind. — Die Congruenz singulärer Linien ist:

$$(x_4 + i x_5)\,(x_4 - i x_5) = x_6 = 0\,.$$

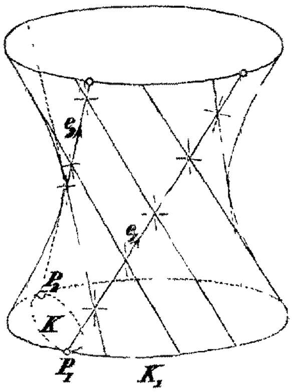
Die Complexe $x_4 + ix_5 = 0$ und $x_4 - ix_5 = 0$ sind aber specielle, nämlich: $p_{23} = 0$ und $p_{14} = 0$. Ihre Directricen schneiden die vorige Regelschaar von doppelten Complexgeraden. Mit $x_6 = 0$ ergeben diese Complexe offenbar zwei specielle lineare Congruenzen. Auf diese Weise finden wir: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiter Ordnung. Ihre eine Erzeugung besteht aus vierfachen singulären Linien. Von der andern Erzeugung sind zwei: e_1, e_2, ausgezeichnet, indem alle Tangenten der Fläche, welche irgend eine von ihnen treffen, doppelte singuläre Linien sind.*

Die Fläche als Brennfläche der singulären Linien hat sich in zwei Erzeugende der Singularitätenfläche zusammengezogen. In denselben berühren Complexkegel und Complexkegelschnitte diese Fläche. In der Figur auf S. 169 sind diese einfachen Verhältnisse dargestellt. In einer Schnittebene ist K der Complexkegelschnitt, K_1 der Schnitt mit der Fläche zweiter Ordnung.

Sind die Singularitätenfläche F und die beiden Erzeugenden e_1 und e_2, welche die Directricen der beiden Congruenzen singulärer Linien sind, gegeben, so ist der Complex noch nicht bestimmt, sondern es sind noch unendlich viele möglich. Ich lege nämlich eine

*) Es ist sehr leicht, den Vergleich weiter zu führen, besonders an der Hand der Figuren auf S. 159. Man stelle sich vor, die Geraden s_1 und s_2 fallen zusammen, anderseits auch s_3 und s

Schnittebene (vgl. die Figur), welche aus F den Kegelschnitt K, aus e_1 und e_2 die Punkte P_1 und P_2 schneidet. Dann habe ich in dieser Ebene ein Kegelschnittbüschel (mit den doppelten Grundpunkten P_1 und P_2); jeder Kegelschnitt desselben kann als Complexkegelschnitt gewählt werden. Die Wahl desselben entspricht der Festsetzung des Werthes einer absoluten Invariante des Complexes. Ist der Kegelschnitt gewählt, so ist *die Erzeugung des Complexes* sehr einfach. Ich drehe eine Ebene je um eine der Tangenten dieses Kegelschnittes und habe in jeder Ebene für den darin liegenden Complexkegelschnitt fünf Tangenten gegeben. Hierdurch wird auch eine gewisse Anschauung des Complexes erzielt. — Ferner ergiebt sich aus der Construction, dass der Complex 12 Constante hat, von denen eine absolute Invariante ist. Hieraus ergiebt sich, dass der Complex durch vierfach unendlich viele Transformationen in sich übergeht.



5. Für den Fall *[(11)(11)(11)]* kann man die Gestalt der Singularitätenfläche leicht übersehen. Im Vergleich mit früheren Fällen (n. 1. und 3.) zeigt es sich, dass sechs Doppelgerade vorhanden sind, nämlich die Kanten eines Tetraeders. *Dieses Tetraeder ist selbst die Singularitätenfläche* und dann folgt auch sofort: *Die Seitenflächen des Tetraeders sind gebildet von singulären Punkten und seine Ecken umhüllt von singulären Ebenen.* Es ist dies der bekannte *tetraedrale Complex**).

Die Ecken und Seitenflächen des Tetraeders sind Ausnahme-Punkte und Ebenen etc. — Die allgemeine Gleichung eines solchen Complexes in den Coordinaten p_{ik} ist:

$$\Omega \equiv a p_{12} \cdot p_{34} + b p_{13} \cdot p_{42} + c p_{14} \cdot p_{23} = 0\,,$$

Die Complexgeraden treffen das Tetraeder unter constantem Doppelverhältniss, welches eine absolute Invariante des Complexes ist. Das Tetraeder selbst hat 12 Constante, der Complex ist durch dasselbe und durch die absolute Invariante völlig bestimmt, hat also 13 Constante. Dreifach unendlich viele *Raumtransformationen führen den Complex in sich selbst über.* (In Punktcoordinaten sind diese Transformationen: $y_i' = a_i y_i$) **).

---

*) Vgl. Chasles, Reye, Müller, Lie.

**) Dieser Complex kann insbesondere (vgl. Lie in den Göttinger Nachrich-

6. Der letzte Fall in dieser kanonischen Form, den wir betrachten, ist *[(111)(111)]*. Er ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_4 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0 .$$

Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in $\Omega = 0$ das eine oder das andere Glied fortschaffen und sieht, dass von einer Fläche zweiten Grades beide Erzeugungen vierfache singuläre Linien sind. Diese Fläche bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Jeder ihrer Punkte ist Doppelpunkt des Complexes; es gehören alle ihre Tangenten dem Complexe an: *Der Complex besteht aus allen Tangenten einer Fläche zweiten Grades*); er ist ein specieller. Die Erzeugenden sind doppelte Complexgeraden; er hat 9 Constante.*

Ein specieller Complex besteht immer aus den Geraden, die eine Fläche umhüllen**), wobei Curven und Developpable gleichmässig mit zu den Flächen gezählt werden müssen. Jede seiner Geraden ist singulär etc.

III.

Zweite kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\, x_5 x_6 = 0$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + 2\, \lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0.$$

In dieser kanonischen Form kommen *vier einfache und ein zweifacher Elementartheiler* vor. Mit dem doppelten Elementartheiler tritt eine Doppelgerade auf. In dem allgemeinsten Fall [11112] ist sie die einzig vorhandene; dieser Complex steht von unsern 48 Complexen

---

ten 1870) auf folgende Weise erzeugt werden: Man wendet auf eine bestimmte Raumgerade dreifach unendlich viele lineare Raumtransformationen an, die unter sich vertauschbar sind und die ein vollständiges Tetraeder in sich überführen; der Ort der Geraden ist ein tetraedraler Complex. Dieser Process giebt auch dann noch irreducible Complexe zweiten Grades, wenn von den Tetraederebenen beliebig welche zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise *vier directe Ausartungen des tetraedralen Complexes*. — Fallen *zwei* Ebenen zusammen, so hat man den Fall [(11)(22)], n. 29. Sind *drei* vereinigt, so wird [(33)], n. 47. erzeugt; bei *vier* zusammengefallenen [(123)], n. 38. Sind endlich die vier Ebenen *paarweise* identisch, so erscheint [(11)(112)], n. 14. Der erste Fall kommt in der That in der Mechanik als Ausartung des tetraedralen vor. — Das Tetraeder ist auch bei den ausgearteten Fällen immer noch die Singularitätenfläche.

Auf diese letzteren Complexe wurden Klein und Lie bei Gelegenheit von Untersuchungen über unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst geführt, die sie im Auszuge in den Comptes rendus 1870 veröffentlicht haben. Von Herrn Klein erhielt ich auch die Gleichungen der betr. Complexe.

*) Vgl. Klein Math. Annalen II. S. 209.

**) Vgl. Pasch a. a. O. § 9.

dem allgemeinsten am nächsten. — Indem wir die 3 zerfallenden Complexe ausschliessen, kommen hier noch die folgenden *neun Fälle* vor

$$[11112], \ [111(12)], \ [11(11)2], \ [11(112)], \ [1(11)(12)], \ [1(111)2],$$
$$[(11)(11)2], \ [(11)(112)], \ [(111)(12)].$$

Von den Fundamentalcomplexen sind zwei, $x_5 = 0$ und $x_6 = 0$, speciell. Ihre Directricen gehören den andern an. — Beim Uebergang zu den p_{ik} benutzen wir die folgende Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}, \qquad x_5 = p_{14},$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \qquad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}), \qquad x_6 = 2 p_{23}.$$

7. Der Complex *[11112]* ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + x_5^2 = 0.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2 \qquad = 0.$$

Die Doppelwurzel λ_5, die zum doppelten Elementartheiler gehört, ist als Null angenommen. — In dieser Darstellung ist ferner der Fundamentalcomplex $x_5 = 0$ vor dem ursprünglich gleichberechtigten $x_6 = 0$ ausgezeichnet. Seine Directrix gehört allen in Ω (und Ω') vorkommenden Fundamentalcomplexen an und ist in Folge dessen *Complex-Doppelgerade* (und vierfache singuläre Linie). Eine weitere Doppelgerade kommt nicht vor.

Die Singularitätenfläche hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^4 + y_4^4) \\ &- 4\lambda_3\lambda_4(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^2 y_3^2 + y_4^2 y_2^2) \\ &+ 2\{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) - 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)\} y_1^2 y_4^2 \\ &+ 8\{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)\} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0. \end{aligned}$$

Es ist $y_1 = y_4 = 0$, die Directrix von $p_{14} = 0$, resp. $x_5 = 0$, Doppelgerade. Um die Fläche zu untersuchen, lege man durch dieselbe die Ebene $y_4 = \mu y_1$. Die Betrachtung der dabei auftretenden Kegelschnitte ergiebt die folgenden Resultate:

Jeder Kegelschnitt ergiebt für die Doppelgerade $(A_2 A_3)$ einen Pol, dessen Ort eine Gerade ($A_1 A_4$, Kante unsers Tetraeders) ist. Diese Gerade sei hier und im Folgenden als die *„adjungirte Gerade"* (zur Doppelgeraden) bezeichnet.

Unter den Kegelschnitten sind vier, die in Punktepaare zerfallen etc.

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Plücker'sche Complexfläche). — Der Complex hat 18 Constante.*

---

*) Kummer giebt diese Particularisation seiner allgemeinen Fläche selbst

Diese Fläche steht zwischen der Kummer'schen Fläche (111111) und der Singularitätenfläche von [1111(11)] in der Mitte. Sie geht aus der ersteren hervor, wenn in jener 8 Doppelpunkte paarweise in einer Geraden zusammen fallen. Diese Punkte sind die Cuspidalpunkte der Complexfläche. Fallen die übrigen 8 von den 16 Knotenpunkten der Kummer'schen Fläche ebenso paarweise in einer weiteren Geraden (in der adjungirten) zusammen, so hat man die Linienfläche des Falles [1111(11)] mit ihren 8 Cuspidalpunkten.

Das Coordinatensystem hat zu der Fläche eine möglichst einfache Lage. Eine Kante desselben ist die Doppelgerade, ihre gegenüberliegende die adjungirte. Auf beiden hat man die vier Schnittpunkte mit den einfachen Geraden der Fläche paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken gelegen. Letztere sind also die Doppelpunkte je einer durch die resp. vier Punkte bestimmten Involution. Da sich aber die Punkte beider Geraden in bestimmter Weise (durch die einfachen Geraden) zugeordnet sind, so ist diese Wahl auf drei verschiedene Weisen möglich. Dem entsprechend kann man auch die Liniencoordinaten x in die p_{ik} auf drei wesentlich verschiedene Weisen so transformiren, wie es eben geschah.

8. In dem Fall *[111(12)]* gehören ein einfacher und der doppelte Elementartheiler zu derselben dreifachen Wurzel. — Wir wollen diesen Fall dadurch aus dem vorigen ableiten, dass wir λ_4 Null setzen. Wir erhalten insbesondere die folgende Singularitätenfläche:

$$\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)-4\lambda_1\lambda_2\lambda_3(y_1y_3-y_4y_2)^2 \\ +2(\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)-2\lambda_1\lambda_2)y_1^2y_4^2=0.$$

An Stelle der früheren Doppelgeraden $y_1=y_4=0$ ist hier eine *Selbstberührungsgerade* der Fläche aufgetreten. Dieselbe hat (für den Complex) die Bedeutung von *zwei unendlich nahen Complexgeraden.* — Cayley betrachtete bei Linienflächen zuerst solche zwei unendlich nahe Doppelgerade, er nennt sie in der Regel *„doppelte Doppelgeraden"* *). Wir wollen uns nur merken, dass eine solche (für den Complex und die Singularitätenfläche) auftritt, wenn ein einfacher und ein doppelter Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören.

Wir erhalten ein deutliches Bild von der Gestalt der Singularitätenfläche in der Nähe dieser Geraden, wenn wir die Fläche zweiter Ordnung hinzunehmen:

$$y_1y_3-y_4y_2=0.$$

---

an. Vgl. a. a. O. S. 70. — Eine eingehende Behandlung giebt Plücker in der *„Neuen Geometrie"*.

*) Vgl. Cayley: „On skew surfaces, otherwise scrolls". Phil. Trans. 1863, 64.

Längs $y_1 = y_4 = 0$ fallen die Fortschreitungsrichtungen dieser Fläche und unserer Singularitätenfläche zusammen.

Dass unsere Gerade Selbstberührungsgerade und nicht etwa dreifache Gerade ist, erkennt man aus dem Vorhergehenden in Verbindung damit, dass eine Ebene durch sie aus der Fläche noch zwei Gerade ausschneidet. Wir erhalten auf diese Weise:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierten Grades mit einer Cayley'schen doppelten Doppelgeraden, die Gattung XII von Cremona. Der Complex hat 16 Constante.

Es ist leicht zu beweisen, dass dies die allgemeine Fläche der genannten Cremona'schen Gattung ist. — Beim Uebergang von der allgemeinen Complexfläche zu dieser rückt die adjungirte Gerade an die Doppelgerade unendlich nahe heran. Die noch vorhandenen 8 Doppelpunkte rücken paarweise in Cuspidalpunkte zusammen.

9. Für die Verbindung *[11(11)2]* der Elementartheiler lässt sich die Gestalt der Singularitätenfläche sofort angeben. Neben der Doppelgeraden und ihrer adjungirten hat man hier noch zwei Doppelgerade, die von der ersteren geschnitten werden. — In dem Fall [1111(11)] hatte man eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden, hier tritt ausserdem eine doppelte Erzeugende auf. Von Cremona XI kommen wir also zu V. Es ist jedoch besonders zu beweisen, dass wir hier die allgemeine Gattung V vor uns haben. Wir sehen hier nämlich, dass der Ort der Pole der Doppelerzeugenden in Bezug auf die Kegelschnitte der Fläche eine Gerade ist, welche die doppelten Leitgeraden trifft. Cayley und Cremona geben aber für ihre allgemeinen Flächen eine solche Eigenschaft nicht an.

In dem allgemeinsten Fall einer solchen Fläche hat man in jeder Ebene durch die Doppelerzeugende einen Kegelschnitt und seinen Pol P. Dieser Punkt P beschreibt eine Raumcurve bei der Drehung der Ebene des Kegelschnittes; es soll deren Ordnung bestimmt werden. Die Frage nach der Ordnung ist identisch mit der Frage nach der Anzahl der Punkte P, die auf der Doppelerzeugenden liegen. Liegen n darauf, so ist die Ordnung $n+1$. — In unserm allgemeinen Fall aber wird die Doppelerzeugende nie von einem Kegelschnitt berührt*) als im uneigentlichen Sinn von den beiden zerfallenden, den Doppelgeraden. Suchen wir also die Pole für diese zerfallenden Kegelschnitte. Indem wir uns ihnen als Gränzlage annähern, finden wir, dass das Paar der Cuspidalpunkte auf jeder Doppelgeraden die Scheitel des ausgearteten Kegelschnitt's vorstellt. Diese Cuspidalpunkte sind aber im allgemeinen Fall verschieden und keiner liegt auf der Doppelerzeugenden. Der Pol

---

*) Vgl. Cremona a. a. O. §§ 6., 7.

in dieser Ebene liegt also keinesfalls auf der Doppelerzeugenden. — Es ist also $n = 0$, die Ordnung unserer Curve 1, d. h. *der Ort der Pole ist auch im allgemeinen Fall eine Gerade, welche die doppelten Leitgeraden in zwei bekannten Punkten trifft**). — Wir finden überhaupt:

Der Complex hat drei Doppelgerade. Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Fläche der Gattung V von Cremona's Linienflächen. Der Complex hat 16 Constante.

10. Der nun zu behandelnde Fall *[11(112)]* ist ganz analog [111(111)] (S. 158) der ersten kanonischen Form. Wir haben:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 \qquad = 0\,.$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt auch hier in die folgenden vier linearen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \pm i\lambda_2 : \pm \lambda_1 : \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}\,.$$

Wir werden unten die Directricen aufsuchen und uns jetzt zur Singularitätenfläche wenden. — Die Leitgerade von $x_5 = 0$ gehört $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ an, sie erleidet durch dieselben zwei projectivische Zuordnungen ihrer Punkte und Ebenen. Zweimal hat man für beide Fälle dieselbe Zuordnung von zwei Elementen. Wir erhalten auf diese Weise die beiden Büschel $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, bestehend aus *doppelten Complexgeraden*. Daraus folgt: *Der Complex hat zwei Büschel von Doppelgeraden, deren Mittelpunkte und Ebenen doppelt zählend die Singularitätenfläche bilden.*

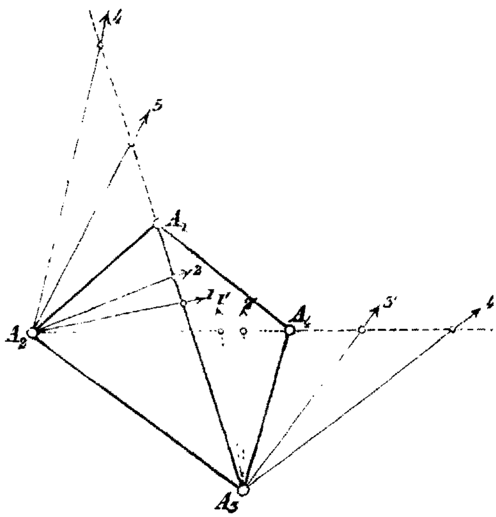
Wie wir sehen werden, geht dieser Fall aus [111(111)] direct hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in zwei Ebenen und zwei Punkte ihrer Schnittlinie zerfällt. Diese sind an unserm Coordinatentetraeder $y_1 = 0$, $y_4 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ (A_2, A_3). Als Erzeugende der zerfallenden Fläche sind die vier Büschel $(y_1 = 0, u_2 = 0)$, $(y_1 = 0, u_3 = 0)$ etc. aufzufassen. Zwei von ihnen, $(y_1 = 0, u_2 = 0)$ und $(y_4 = 0, u_3 = 0)$ bilden die *„eine Erzeugung", die aus Doppelgeraden besteht*, die anderen beiden bilden die zweite Erzeugung der zerfallenen Fläche (die dem Complex nicht angehört).

Die Directricen der vier Congruenzen singulärer Linien finden sich wieder beim Uebergang zu den p_{ik}. Sie seien bezeichnet mit 1, 1′; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′ (wo allemal k, k' zu derselben Congruenz gehören). Dann hat man für die Coordinaten die Tabelle:

*) In dem allgemeinsten Fall einer Doppelgeraden auf einer Fläche vierter Ordnung wäre dieser Ort eine *Raumcurve fünfter Ordnung* mit der Doppelgeraden als vierfacher Secante.

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
1′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$

Es ist dabei α eine der Grössen $\pm\sqrt{\lambda_4\lambda_2(\lambda_2-\lambda_4)}$. — Die nebenstehende Figur giebt ein Bild von der Lage dieser Directricen im Raume. 1234 liegen in $y_4=0$ und gehen darin durch A_2. Ferner liegen sie paarweise harmonisch zu A_2A_1 und A_2A_3. Analog verhalten sich 1′2′3′4′ in $y_1=0$ durch A_3.



Diese Directricen gehören also derjenigen Erzeugung der „Fläche zweiten Grades" an, die nicht aus doppelten Complexgeraden besteht, ganz wie bei [111(111)]. Die Construction des Complexes ist wie in jenem allgemeineren Fall. — Seien $iklm$ die Zahlen 1 2 3 4, so bedeuten $i, i', k, k', l, l', m, m'$ unsere Directricen. Wie bei [111(111)] sind von ihnen *vier erfüllt mit singulären Punkten, die andern vier mit singulären Ebenen. Erstere seien i, k, l', m', letztere sind dann i', k', l, m.* Wir werden später diese Bezeichnung oft anwenden. — In $ikl'm'$ durchsetzen die Complexkegelschnitte die Ebenen $y_1=0$ und $y_4=0$, und berühren dort die singulären Linien ihrer Ebenen; $i'k'lm$ geben die Tangentialebenen der Complexkegel an den betreffenden singulären Geraden etc.

Die Brennfläche der singulären Geraden hat sich in 8 Strahlen zusammengezogen, von denen je vier in einer Ebene durch einen Punkt gehen. Vier von den 8 Geraden enthalten die singulären Punkte der singulären Linien, die andern vier die singulären Ebenen. Zwei Büschel von Geraden treffen alle Directricen, sie bestehen aus doppelten Complexgeraden. — Der Complex hat 13 Constante.

11. Die Complexe unter der Form *[1(11)(12)]* gestalten sich sehr einfach. Die Verbindung (12) veranlasst eine „doppelte Doppelgerade“, ferner (11) zwei Doppelgerade, welche erstere treffen. *Der Complex hat vier Doppelgerade, die ein windschiefes Vierseit bilden, von denen zwei Gegenseiten benachbart sind. Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach einer Erzeugenden berühren, und die noch zwei verschiedene (der andern Erzeugung) gemein haben. Der Complex hat 14 Constante.*

Das übrige Verhalten des Complexes ist wie bei [11(11)(11)] (S. 160). Die Construction ist ganz so wie dort; dabei gelten die benachbarten Doppelgeraden als ein Gegenseitenpaar des Vierseits der Doppelgeraden, die nicht consecutiven bilden das andere. — Der frühere Complex hatte 15 Constante, darunter eine absolute Invariante; er erlaubte also einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst. Hier hat man 14 Constante, wovon eine absolute Invariante ist; dieser Complex erlaubt also zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst.

12. Für *[1(111)2]* haben wir die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5\,(\lambda_5 x_6 + x_5) = 0\,.$$

Es ist hier, im Gegensatz zu den vorigen Fällen, λ_5 nicht als Null angenommen, dafür aber die dreifache Wurzel λ_2. — Die singulären Linien erfüllen insbesondere die Gleichung $\Omega' - \lambda_1\,\Omega = 0$, also:

$$x_5\,\{2\,\lambda_5\,(\lambda_5 - \lambda_1)\,x_5 + (2\,\lambda_5 - \lambda_1)\,x_6\} = 0\,.$$

$x_5 = 0$ ist ein specieller Complex, dessen Directrix der Regelschaar $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ angehört. Die Regelschaar $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, welche die eben genannte schneidet, besteht aus doppelten Complexgeraden und vierfachen singulären Linien, d. h.:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten, welche eine bestimmte Erzeugende treffen, sind doppelte singuläre Linien. Die Erzeugung unserer Fläche, die sich unter dieser befindet, besteht aus doppelten Complexgeraden. Ausserdem hat man noch zwei allgemeine lineare Congruenzen singulärer

Linien, deren Directricen derselben Erzeugung angehören, wie die schon ausgezeichnete Erzeugende. — Der Complex hat 13 Constante.

Wir haben hier eine directe Degeneration des Falles [111(111)] (S. 158) vor uns. Vier von den 8 dort vorkommenden Directricen, z. B. 1, 1', 2, 2', fallen zusammen, also in der zweiten Figur auf S. 159, die Punkte P_1, P_1', P_2, P_2'. Die Kegelschnitte K_1 und K_2 berühren sich. Wie von jenem Complex, haben wir also auch von diesem eine directe Anschauung und wir können auch diesen einfach erzeugen. Sind nur die ausgezeichnete Erzeugende $e = (1\ 1'\ 2\ 2')$ und drei der noch übrigen gegeben, so ist die Construction entweder durch Complexkegelschnitte (wenn gegeben sind e, 3, 3', 4) oder durch Complexkegel (wenn e, 3, 3', 4' gegeben) sehr einfach. (Dabei sollen auch hier 3 und 4 Reihen singulärer Punkte, 3' und 4' Axen singulärer Ebenen sein.) — Die Transformationen des Complexes in sich selbst sind noch wie bei [111(111)].

Unser Fall giebt als Degeneration den Fall [1(111)(11)] (S. 168), es fallen dann auch noch 3, 3', 4, 4' zusammen.

13. Bei der Verbindung *[(11)(11)2]* der Elementartheiler werden wir nebst der ursprünglichen Doppelgeraden noch vier weitere haben, welche diese schneiden. Die Geraden (11)(11) bilden ein windschiefes Vierseit, die Gerade 2 soll alle treffen, verbindet also 2 Ecken dieses Vierseits. Die Doppelgeraden haben demnach eine Gruppirung wie fünf Kanten eines Tetraeders. Wir finden das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche löst sich in eine Fläche zweiten Grades mit zweien ihrer Punkte und den Tangentialebenen in diesen auf. Die Punkte liegen nicht auf derselben Erzeugenden. Neben diesen Punkten und Ebenen hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades von singulären Linien, die aus den Tangenten unserer Fläche durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschnitten werden, welcher die Kanten des windschiefen Vierseits enthält.

Die irreducible Congruenz singulärer Linien kann auch als Schnitt eines allgemeinen linearen mit einem tetraedralen Complex dargestellt werden, dessen Tetraeder durch die fünf Doppelgeraden bezeichnet ist.

Der Complex erlaubt zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst, er ist durch *14 Constanten* bestimmt (unter denen eine absolute Invariante vorkommt).

Wir wollen diesen Complex noch mit [11(11)(11)] (S. 160) vergleichen. Eine der dort auftretenden Flächen zweiten Grades zerfällt in zwei Ebenen und zwei Punkte. Der Vergleich giebt ohne Weiteres die Construction dieses Complexes; auf S. 162 löst sich der Kegelschnitt K_2 in zwei Gerade auf. — Aus unserm Fall erhalten wir dagegen durch Specialisirung den tetraedralen. Es löst sich dann die vorhandene Fläche zweiten Grades auch noch in ein Ebenen- bez. Punktepaar auf.

14. Der Fall $[(11)(112)]$ verhält sich analog mehreren schon betrachteten Fällen. Wir haben die Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_5^2 \equiv 4 \lambda_1 p_{12} \cdot p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) \qquad \equiv 4 \lambda_1^2 p_{12} \cdot p_{34} .$$

Für die singulären Linien hat man $p_{12}=p_{14}=0$ und $p_{14}=p_{34}=0$. Es sind das zwei doppeltzählende zerfallende Congruenzen. Ihnen sind zwei Büschel doppelter Complexgeraden gemeinsam.

Der Complex hat zwei Büschel doppelter Complexgeraden. Ihre Mittelpunkte und Ebenen (deren Axe durch die Mittelpunkte geht) bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche; als Liniengebilde geben sie, ebenfalls doppelt zählend, die singulären Linien. Der Complex besitzt 11 Constante.

Dieser Complex geht aus $[1(11)(111)]$ (S. 168) hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in ein Ebenen- resp. Punktepaar sich auflöst. — Aus $[11(112)]$ (S. 174) geht dieser Fall hervor, wenn i und k in $A_1 A_2$, $i' k'$ in $A_2 A_3$, l und m in $A_2 A_3$, l' und m' in $A_3 A_4$ hineinfallen. Die Construction des Complexes ändert sich dem entsprechend. — Einen ähnlichen Fall werden wir ferner später betrachten, nämlich $[2(112)]$ (S. 187); die dort auftretenden Directricen fallen hier theilweise zusammen.

Die Singularitätenfläche kann auch hier als zerfallende Fläche zweiten Grades aufgefasst werden. Eine Erzeugung, in Gestalt von zwei Büscheln, besteht aus doppelten Complexgeraden. Die Complexkegelschnitte berühren die beiden Ebenen an zwei bestimmten Geraden (p_{12} und p_{34}) etc.

15. Der letzte Fall dieser kanonischen Form *$[(111)(12)]$* ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega = \lambda_4 (x_1^2 + 2 x_5 x_6) + x_5^2 = 0, \quad \Omega' = \lambda_4^2 (x_4^2 + 2 x_5 x_6) + 2 \lambda_4 x_5^2 = 0.$$

Wir erhalten als Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten längs einer bestimmten Erzeugenden sind vierfache singuläre Linien. Die unter ihnen vorkommenden Erzeugenden zweiter Art, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, sind doppelte Complexgeraden. Der Complex hat 11 Constante.

In $[111(111)]$ (S. 159) fallen alle Directricen $1, 1' \cdots$ zusammen. Wir erhalten als Folge dessen: *Die Complexkegelschnitte osculiren die Singularitätenfläche vierpunktig an der ausgezeichneten Erzeugenden.* Ebenso verhalten sich die Complexkegel. — Sind die Fläche zweiten Grades und die ausgezeichnete Erzeugende gegeben, so kennt man für jeden Complexkegelschnitt vier Punkte; eine absolute Invariante bestimmt ihn. Wir sehen so, dass der Complex fünffach unendlich viel Transformationen in sich erlaubt. — Ich unterlasse es, an die Zwischenstufen von [111(111)] und diesem Fall zu erinnern.

IV.

Dritte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + 2\, x_4 x_6\,,$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4\,(x_5^2 + 2\, x_4 x_6) + 2\, x_4 x_5 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form hat man einen *dreifachen Elementartheiler.* — Bei einem zweifachen Elementartheiler trat eine Doppelgerade und eine adjungirte auf; hier fallen beide zusammen; man erhält eine *Rückkehrgerade.*

Von den 7 Fällen dieser kanonischen Form zerfällt einer und es bleiben die folgenden *sechs* zu untersuchen:

[1113], [11(13)], [1(11)3], [1(113)], [(11)(13)], [(111)3].

Als Uebergang von den Linien-Coordinaten x zu den p_{ik} hat man das Folgende:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42})\,, \qquad x_4 = p_{11}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_5 = p_{13} + p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}.$$

16. Der erste Fall *[1113]* besitzt folgende Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)-\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^3 y_2-y_3 y_4^3)-4\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3(y_1 y_3-y_4 y_2)^2$$
$$-4(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-2\,\lambda_1\lambda_2)y_1 y_4(y_1 y_3-y_4 y_2)+2(\lambda_1+\lambda_2-2\,\lambda_3)y_1^2 y_4^2=0.$$

Die dreifache Wurzel λ_4 ist dabei als Null angenommen. — Die Gerade $y_1 = y_4 = 0$ ist Rückkehrgerade, denn sie gehört dem Schnitt von $y_1 y_3 - y_4 y_2 = 0$ mit unsererer Fläche dreifach an. Diese Fläche zweiten Grades giebt die Zuordnung der Punkte und Tangentialebenen an der Rückkehrgeraden.

Eine nähere Betrachtung der Kegelschnitte der Fläche (welche die Doppelgerade berühren) ergiebt das Resultat, *dass die Fläche eine Complexfläche ist, deren Leitgerade eine Complexgerade ist*).*

Es ist eine deutliche Abstufung von [111111], [11112] zu diesem Fall sichtbar. — Dieser Complex hat *17 Constante.*

17. Beim Uebergang zu [11(13)] wollen wir im vorigen Fall λ_3 Null setzen. Die Singularitätenfläche wird:

---

*) Vgl. Plücker, Neue Geometrie.

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)+8\lambda_1\lambda_2 y_1 y_4(y_1 y_3+y_4 y_2)+2(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2 y_4^2=0.$$

$y_1=y_4=0$ ist hier *dreifach* auf der Fläche, diese also eine Linienfläche. — Die dreifache Gerade ist einfache Axe, hat aber zwei stationäre Tangentialebenen, ferner ist sie einfacher Strahl und hat zwei stationäre Punkte. Es sind also auf der einfachen Leitgeraden zwei Erzeugende zusammengefallen. Der dritte Mantel der Fläche an der Doppelgeraden, der nicht überall gleiche Richtung hat, ist wie vorhin bestimmt durch $y_1 y_3 - y_4 y_2 = 0$. — Wir haben:

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Gattung X von Cremona's Linienflächen). Der Complex hat 15 Constante.*

Die dreifache Linie der Fläche ist natürlich nicht dreifache Gerade des Complexes, sondern ist *als die Vereinigung von drei Doppelgeraden des Complexes* aufzufassen. Diese kann man kurz bezeichnen als die Leitgerade und die beiden singulären Erzeugenden der Linienfläche (die der ersteren unendlich nahe sind und sie schneiden).

Dieser Complex hat also drei Doppelgerade, die unendlich nahe sind und wo die eine von den beiden andern geschnitten wird.

Der Beweis dessen liegt darin, dass bei [(11)(13)] S. 182) dieselben Doppelgeraden auch auftreten, nebst solchen, die von (11) herrühren, welch letztere aber bekannt sind.

Unsere stationären Ebenen sind $y_1=0$ und $y_4=0$, sie sind verschieden, d. h. man hat hier die allgemeine Fläche X von Cremona.

18. Auch bei [1(11)3] tritt, wie man voraussehen kann, eine Linienfläche auf. Zwei Doppelgerade schneiden eine Rückkehrgerade, d. h.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Specialfall von Cremona's Gattung V. Der Complex besitzt 15 Constante.

Cremona giebt diesen Specialfall ebenfalls an. Es entsteht, wenn in seiner Construction der Fläche die doppelte Erzeugende den Leitkegelschnitt berührt. — Es mag hier noch auf [11(11)2] (S. 173) hingewiesen werden, dort hatte man die allgemeine Fläche V von Cremona.

19. Bei *[1(113)]* ist gegenüber dem ersten Fall $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_5=0$, was die Gleichungen ergiebt:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2x_4 x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in $x_1 = x_4 = 0$ doppelt zählend, ferner in: $(\lambda_1 x_1 + i x_4)(\lambda_1 x_1 - i x_4) = 2\lambda_1 x_5 - x_4 = 0$. Die erste Congruenz ist speciell, die andern beiden sind allgemeine

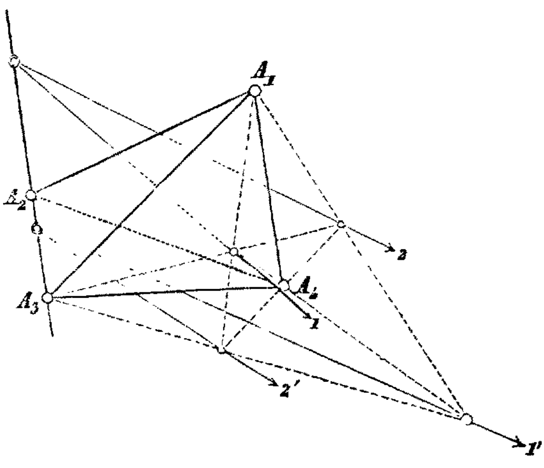
*) Carl Eichler behandelt in seiner Inauguraldissertation: „*Uebertragung eines Steiner'schen Problems von der Ebene auf den Raum*", Göttingen 1871, besonders die Abbildung dieser Fläche.

lineare. Ihre Directricen liegen in den Ebenen $y_1+iy_4=0$, $y_1-iy_4=0$ (welche doppelt zählend zur Singularitätenfläche gehören). Ferner verlaufen je die beiden, in derselben Ebene liegenden, durch einen und denselben Punkt der Schnittlinie beider Ebenen. Diese Punkte sind $u_2+iu_3=0$, $u_2-iu_3=0$.

Die untenstehende Figur veranschaulicht die Lage der Directricen und die nachfolgende Tabelle giebt ihre Coordinaten.

	p_{12}	p_{31}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	1	1	$+i$	$+i$	0	$\frac{3i}{2\lambda_1}$
1′	1	1	$-i$	$-i$	0	$\frac{i}{2\lambda_1}$
2	1	1	$+i$	$+i$	0	$-\frac{i}{2\lambda_1}$
2′	1	1	$-i$	$-i$	0	$-\frac{3i}{2\lambda_1}$

1, 1′ sind die Directricen der einen, 2, 2′ der andern Congruenz. Die Directrix der doppelten speciellen ist A_2A_3. Wir haben wieder i und k' erfüllt mit singulären Punkten, i' und k als Axen von singulären Ebenen etc.



Zwei Ebenen E_1, E_2 und zwei Punkte P_1, P_2 ihrer Schnittlinie bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche. Die Congruenz singulärer Linien zerfällt in eine doppelt zählende, specielle lineare, deren Directrix die Linie $\overline{E_1E_2}$ ist, ferner in zwei allgemeine lineare, deren Directricen durch P_1 und P_2 in E_1 und E_2 verlaufen.

Für die Construction des Complexes verweise ich auf [11(112)] (S. 174). Man lasse dort i, k, i', k' unverändert, lasse aber l, m, l', m' an A_2A_3 heran rücken. Dann hat man auch eine Anschauung der speciellen Congruenz A_2A_3. — Die Construction wird dadurch etwas modificirt, bleibt aber im Wesentlichen dieselbe. — Wir können auch hier die zwei Ebenen und Punkte als *zerfallene Fläche zweiten Grades auffassen, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden* *besteht.* — Diesen Fall erhält man ferner als eine directe Degeneration von [1(111)2] (S. 176).

Der Complex hat 12 Constante.

20. Den Fall *[(11)(13)]* haben wir schon bei [11(13)] erwähnt. Man hat hier an der Singularitätenfläche fünf Doppelgerade. Ein ebener Schnitt besteht aus einem Kegelschnitt und zwei Geraden, die sich auf demselben schneiden. Wir haben:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades F_2 mit zweien ihrer Ebenen E_1 E_2, welche eine Erzeugende e gemein haben, und den Berührungspunkten P_1, P_2 dieser Ebenen. Neben den zerfallenden linearen Congruenzen singulärer Linien hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades, die aus den Tangenten von F_2 durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschieden wird. Der Complex hat 13 Constante.

Dass man hier *fünf doppelte Complexgerade* hat, ist evident. Die dreifache Gerade der Singularitätenfläche ist als drei unendlich nahe doppelte aufzufassen. Das sieht man sehr deutlich bei der Ableitung dieses Falles aus dem Fall [(11)(11)2] (S. 177). Dort hat man fünf Doppelgerade, von denen drei in unendliche Nähe rücken, wenn die dort auftretenden beiden Punkte der Singularitätenfläche in eine Erzeugende von F_2 rücken. Dieser Uebergang giebt auch deutlich die Gruppirung der drei unendlich nahen Doppelgeraden, ferner die Construction dieses Complexes. Man erhält z. B. das Resultat, *dass alle Complex-Kegelschnitte und Kegel die F_2 an der Erzeugenden e berühren* (und weiterhin natürlich in noch einem Punkt, die beiden Ebenen E_1 und E_2 aber nur noch uneigentlich).

21. Der Fall [*(111)3*] stellt sich zwischen [(111)12] und [(111)(12)] in die Mitte. Wir haben hier:

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche zweiten Grades F_2, doppelt zählend. Alle ihre Tangenten, die eine bestimmte Erzeugende e treffen, sind dreifach singulär. Die Erzeugenden unter ihnen sind vierfache singuläre Linien und doppelte Complexgerade. Es kommt noch eine allgemeine lineare Congruenz singulärer Linien vor, die ebenfalls zwei Erzeugende von F_2, und zwar von derselben Schaar wie e, zu Directricen hat. Der Complex hat 12 Constante.

Gegenüber dem oft genannten Fall [111(111)] (S. 158) fallen hier drei Congruenzen zusammen, also z. B. die Directricen 11′, 22′, 33′. Wir sehen, *dass die Complexkegelschnitte und Complexkegel F_2 sämmtlich an e dreipunktig osculiren.* Für alles Weitere sei auf [111(111)] verwiesen.

V.

Vierte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_4 + 2\,x_5 x_6 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form haben wir *zwei einfache und zwei doppelte Elementartheiler.* In allen Fällen treten also zwei sich schneidende Doppelgerade auf, welche adjungirte Gerade besitzen. — Es kommen neun Fälle vor, einer zerfällt, es bleiben für die Behandlung die folgenden *acht:*

[1122], [11(22)], [12(12)], [(11)22], [(12)(12)], [(112)2], [1(122)], [(11)(22)]

Es sind hier nur noch zwei allgemeine Fundamentalcomplexe vorhanden. Die Directricen x_3, x_4, x_5, x_6 der speciellen bilden ein windschiefes Vierseit, von dem x_3 und x_4 das eine, x_5 und x_6 das andere Gegenseitenpaar sind. Die beiden Geraden, welche das Vierseit zum Tetraeder ergänzen, sind die Directricen der Complexe $x_1 + i x_2 = 0$, $x_1 - i x_2 = 0$. — Bei dem Uebergang von den x zu den p_{ik} wollen wir setzen:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_5 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_4 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

22. In dem allgemeinen Fall [*1122*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_4 x_5 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

und für die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,y_1^4 - 4\,\lambda_3^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\,\lambda_1 \lambda_2 y_1^2 y_3^2$$
$$+ 4\,(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2) y_1^2 y_1^2 - 8\,\lambda_3 \left\{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\,\lambda_1 \lambda_2\right\} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

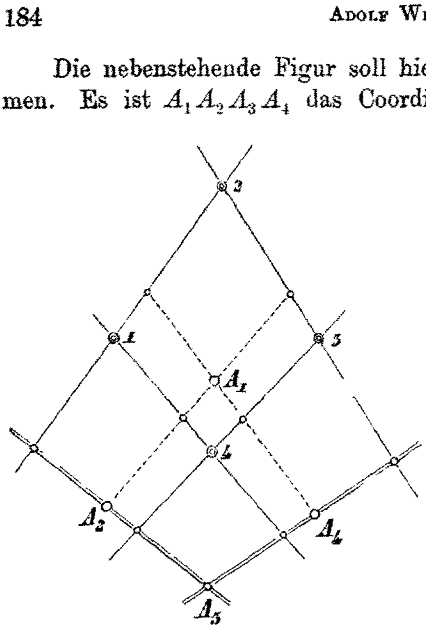
Die Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ sind Doppelgerade der Fläche, $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ deren adjungirte. Unter den durch eine Doppelgerade gelegten Ebenen enthalten, ausser $y_1 = 0$, noch je zwei zerfallende Kegelschnitte der Fläche. Sie bestehen aus Punktepaaren, resp. Doppelgeraden. Im Vergleich mit [11112] (S. 171) haben wir:

Die Singularitätenfläche besitzt vier (konische) Knoten und vier Doppelebenen. Vier Verbindungslinien der ersteren sind einfache Geraden der Fläche, sie besitzen stationäre Tangentialebenen. Zwei Doppelgerade der Fläche, die sich schneiden, treffen je ein Gegenseitenpaar des Vierseits der einfachen Geraden. Diese Doppelgeraden besitzen adjungirte Gerade etc.). Der Complex hat 17 Constante.*

---

*) Plücker nennt diese Fläche a. a. O. S. 339, II. Sie findet sich weiterhin bei Sturm, diese Annalen, Bd. IV, S. 269, u. c.

Die nebenstehende Figur soll hier der Anschauung zu Hülfe kommen. Es ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ das Coordinatentetraeder. Die Doppelgeraden sind doppelt gezogen. Die Punkte 1234 sind Doppelpunkte, 12, 34, 14, 23 sind die Geraden der Fläche, welche constante Tangentialebenen haben, welch letztere insbesondere auch durch die Doppelgeraden gehen. Aus den harmonischen Punktgruppen der Figur sieht man sofort, dass die Geraden $A_2 A_3$, $A_1 A_4$, 14, 23 vier harmonische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades sind. Dasselbe gilt für $A_3 A_4$, $A_1 A_2$, 34, 12, d. h. *alle Geraden der Fläche und auch die beiden adjungirten der Doppelgeraden sind auf einer Fläche zweiten Grades als zwei Gruppen von vier harmonisch liegenden Erzeugenden gelegen.*



Diese Fläche kann leicht aus der allgemeinen Complexfläche (S. 172) abgeleitet werden. Die letztere habe die Knotenpunkte 11′, 22′, 33′, 44′, wo allemal $\overline{ii'}$ die Doppelgerade und die adjungirte trifft und i, i' zu diesen Schnittpunkten harmonisch liegen. Man lasse 3 mit 4 und anderseits 3′ mit 4′ zusammenfallen in Punkte der Geraden 12, 1′2′, so dass die Verbindungslinie dieser beiden neuen Punkte die vorhandene Doppelgerade trifft. Auf diese Weise erhält man gerade das Singularitätensystem, welches bei unserer Fläche vorhanden ist. Um die Abstufung von der Kummer'schen Fläche zu der allgemeinen Complexfläche und zu diesem Fall noch deutlicher zu sehen, muss man auf die Gruppirung der 16 Knotenpunkte der erstgenannten Fläche zurückgehen, was indess nicht geschehen soll.

23. Der Fall *[11(22)]* ist der erste vorkommende einer Reihe von ganz eigenthümlichen Complexen. Wir haben die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv (\lambda_1 x_1 + i\lambda_2 x_2)\,(\lambda_1 x_1 - i\lambda_2 x_2) = 0\,.$$

Die singulären Linien bilden zwei nicht zerfallende Congruenzen zweiten Grades. Dem entsprechend treten zwei Flächen zweiten Grades als Singularitätenfläche auf. In Punktcoordinaten heissen sie:

$$y_1^2 \left\{(\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1^2 - 4\, \lambda_1 \lambda_2 \,(y_3^2 + y_4^2)\right\} = 0\,.$$

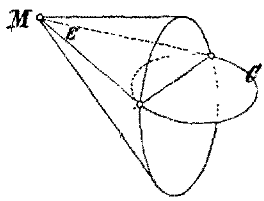
Es ist dies ein Kegel, dessen Mittelpunkt A_2 ist, und eine Ebene durch diesen, welche doppelt zählt.

Indem wir die Enveloppe der singulären Ebenen aufsuchen, finden wir:

$$v_2^2 \left\{(\lambda_1 - \lambda_2)\, v_2^2 - 4\, \lambda_1 \lambda_2 \,(v_3^2 + v_4^2)\right\} = 0\,.$$

Der erste Factor ergiebt den Kegel in Ebenencoordinaten, der zweite aber einen Kegelschnitt in der vorhin aufgetretenen Doppelebene. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche ist ein Kegel K und ein Kegelschnitt C, dessen Ebene E durch den Mittelpunkt M von K geht. Der Kegelschnitt berührt die beiden Erzeugenden, die E aus K ausschneidet. Die nebenstehende Figur giebt ein Bild dieser Verhältnisse. — Kegel und Kegelschnitt haben zunächst zwei Erzeugende gemein, die für den Schnitt doppelt zu zählen sind. Doch sieht man aus der Gleichung des Complexes, dass man hier *ein ganzes Büschel von Complex-Doppelgeraden* hat. Dieses Büschel heisst in Liniencoordinaten: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$; *es besteht aus den Geraden in der Ebene von C durch M.*



Die *Congruenz der singulären Linien* entsteht nun auf die folgende Weise. Zunächst ist dem Kegel K ein linearer Complex zugeordnet, der mit seinen Tangenten die eine quadratische Congruenz ergiebt. Ein weiterer linearer Complex, der mit dem vorigen in Involution liegt, schneidet aus den Treffgeraden von C die zweite Congruenz. — Die singulären Linien sind also nicht etwa die gleichzeitigen Tangenten an K und C (welche auch zwei irreducible quadratische Congruenzen bilden). Wir können sie vielmehr durch folgende Construction erzeugen: Zu K gehört in dem ersten linearen Complex ein Kegelschnitt in E durch M. Die Congruenz zweiten Grades seiner Treffgeraden, die K berühren, besteht aus singulären Linien. Die zweite Congruenz erhält man auf duale Weise aus C und einem (im zweiten Complexe zugeordneten) Kegel, dessen Mittelpunkt M ist*). — Diese Construction zeigt, wie die Geraden, die in E durch M verlaufen, aus vierfach singulären Linien bestehen (womit sie ohne Weiteres doppelte Complexgerade sind). — Man vergleiche auch diese Construction mit der des Falles [11(11)(11)] (S. 164); sie ist im Wesentlichen dieselbe. Eine beliebige Ebene trifft K in einem Kegelschnitt C' und C in den zwei

*) Vgl. Kummer a. a. O., Sätze XIII und XIV.

Punkten P_1, P_2. Die Complexkegelschnitte gehen durch P_1 und P_2 und berühren den Kegelschnitt C' zweimal etc.

Der Complex hat *14 Constante.*

24. In dem Fall [*12(12)*] treten drei Doppelgerade auf, wovon zwei, (12), unendlich nahe liegen, die dritte, 2, aber beide trifft. Wir kommen also hier wieder auf Linienflächen, und zwar auf Cremona's Gattung VI. Gegenüber dem Fall [111(12)] (S. 172) ist hier einfach eine doppelte Erzeugende aufgetreten. Wir finden zu ihr wieder eine adjungirte Gerade, welche beide doppelte Leitgeraden trifft. Es wäre also auch hier wieder der Beweis zu führen, dass man hier die allgemeine Gattung VI hat. Der Beweis ist aber ganz derselbe wie bei [11(11)2] (S. 173).

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Linienfläche, die Cremona als seine VI^te^ Gattung anführt. Sie hat eine Selbstberührungsgerade und eine doppelte Erzeugende. Der Complex hat 15 Constante.

25. Der Complex [*1(122)*] ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 = 0\,.$$

Die Congruenz der singulären Linien besteht augenscheinlich aus zwei doppelt zählenden speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen ($x_3 + ix_5$, $x_3 - ix_5$) sich schneiden. In Punktcoordinaten sind diese Directricen $y_1 = y_3 + iy_4 = 0$ und $y_1 = y_3 - iy_4 = 0$. — Wir haben hier die directe Degeneration des Falles [11(22)] (S. 184). Der Kegelschnitt C artet in den doppeltzählenden Punkt M, der Kegel K in die doppelte Ebene E aus.

Die singulären Linien bilden zwei doppelt zählende, specielle lineare Congruenzen, deren Directricen sich schneiden. Ihr Schnittpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und die ihnen gemeinsame Ebene vierfach zählend die Fläche der singulären Punkte. Der Complex besitzt 12 Constante.

Dieser Fall kann auch als directe Specialisirung von [11(112)] (S. 174) angesehen werden. Man stelle sich vor, es fallen dort die beiden Ebenen der Directricen, $y_1 = 0$ und $y_4 = 0$, ebenso die Schnittpunkte A_2 und A_3 je unendlich nahe zusammen. In der einen Ebene seien ik, ferner lm je vereinigt, ebenso in der zweiten einerseits $i'k'$, anderseits $l'm'$. Diese Vereinigung geschieht so, dass (ik) und $(i'k')$ selbst unendlich nahe verlaufen etc. — Indem wir so die Grenzlage auffassen, können wir diese Singularitätenfläche wieder ansehen *als degenerirte Fläche zweiten Grades, von der eine Erzeugung aus Doppelgeraden des Complexes besteht.*

26. Der Fall $[(11)22]$ ist durch die Gruppirung seiner vier Doppelgeraden bemerkenswerth. — Indem wir an Stelle der Gleichung $\Omega = 0$ nehmen: $\Omega - \lambda_1 P = 0$, erkennt man, dass die Geraden $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, also $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ Complexdoppelgerade sind. Ebenso führt $\Omega - \lambda_5 P = 0$ auf $A_2 A_3$, $\Omega - \lambda_3 P = 0$ auf $A_2 A_1$. *Die Doppelgeraden $A_3 A_4$, $A_4 A_2$, $A_2 A_3$ bilden ein Dreieck, $A_1 A_2$ geht durch eine seiner Ecken.* — Bis jetzt bildeten allemal vier Doppelgerade ein windschiefes Vierseit.

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in eine lineare, deren Gerade eine Ebene und einen darin liegenden Punkt erfüllen, und eine vom dritten Grad. — Dem entsprechend löst sich die Singularitätenfläche auf in eine allgemeine Linienfläche dritten Grades mit einer ihrer Doppeltangentialebenen und dem in derselben liegenden Doppelpunkt. — Der Complex hat 15 Constante.

Beim Uebergang von $[(11)112]$ zu diesem Fall mögen wir uns vorstellen, dass dort die Ebene der Doppelerzeugenden (der Cremona'schen Gattung V) mit der einen doppelten Leitgeraden und der Schnittpunkt der doppelten Erzeugenden mit der andern doppelten Leitgeraden sich als Fläche ersten Grades absondern.

27. In dem Fall $[(112)2]$ wollen wir ausgehen von:

$$\Omega \equiv 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv 2\,\lambda_3 x_3\,(x_3 + \lambda_3 x_4) = 0\,.$$

Zunächst haben wir doppelt als singuläre Linien zählend die Congruenz $x_3 = x_5 = 0$, resp. $p_{13} = p_{14} = 0$. Diese bilden ein Strahlbündel und ein Strahlfeld. Eine weitere Congruenz zweiten Grades ist: $(x_5 + c\,x_4)\,(x_5 - c\,x_4) = x_3 + \lambda_3\,x_4 = 0$, also das Product von zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen sich treffen. — Doppelte Complexgeraden sind $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Sie bilden zwei Büschel.

Der Complex besitzt eine doppelte Ausnahmeebene und einen in ihr liegenden doppelten Ausnahmepunkt. Beide bilden doppelt zählend einen Theil der Singularitätenfläche, ebenso doppelt zählend eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien. In der Ausnahmeebene durch den Ausnahmepunkt geht eine Gerade, welche sowohl die singulären Punkte, als auch die singulären Ebenen dieser singulären Geraden bestimmt. — In einer weiteren Ebene durch den Ausnahmepunkt hat man zwei Gerade, Directricen von zwei speciellen linearen Congruenzen singulärer Linien, die durch einen Punkt der Ausnahmeebene gehen. Dieser neue Punkt und diese neue Ebene gehören ebenfalls doppelt zählend zur Singularitätenfläche etc. Der Complex hat 12 Constante.

Die Complexkegelschnitte berühren die Ebene $(x_3 x_5)$ an x_3 und durchsetzen $(x_1 x_5)$ an den beiden genannten Directricen. Man vergleiche diesen Fall mit [11(112)] (S. 174). Man lasse dort die Directricen i und k in $A_1 A_2$ hineinfallen, ferner i' und k' in $A_2 A_3$ rücken. Die andern bleiben ungeändert.

28. Eine einfache Abstufung ist: [11(11)(11)], [1(11)(12)], [*(12)(12)*]. Zuerst ist die Singularitätenfläche das Product von zwei Flächen zweiten Grades, die ein windschiefes Vierseit gemein haben. Dann rücken in diesem zwei Gegenseiten zusammen. Bei dem nun zu betrachtenden Complexe [(12)(12)] thun das beide Paare:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach zwei sich schneidenden Erzeugenden berühren. Der Complex hat 13 Constante.

Die singulären Linien verhalten sich sehr einfach. Für sie finden wir das Folgende:

Die singulären Linien bilden zwei irreducible Congruenzen zweiten Grades. Die erste wird aus den Tangenten der einen F_2 durch einen speciellen linearen Complex ausgeschnitten, dessen Directrix durch den Schnittpunkt der beiden doppelten Doppelgeraden in deren Ebene verläuft. Die zu diesen drei Geraden harmonische ist ebenfalls Directrix eines speciellen Complexes, der mit den Tangenten der zweiten Fläche die zweite Congruenz ergiebt.

Man erkennt, dass beide Congruenzen ein Büschel gemein haben. Dasselbe hat als Mittelpunkt und Ebene den Schnittpunkt und die Ebene der beiden Erzeugenden, nach denen sich die F_2 berühren. Dasselbe ist *Büschel von doppelten singulären Linien, die einfache Complexgerade sind.*

29. In dem Fall [*(11)(22)*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Die singulären Linien werden aus den speciellen Complexen $x_3 + i x_5 = 0$, $x_3 - i x_5 = 0$, deren Directricen sich schneiden, durch $x_1 + i x_2 = 0$, $x_1 - i x_2 = 0$, die ebenfalls speciell sind, ausgeschnitten. Drei dieser Directricen liegen in einer Ebene und drei gehen durch einen Punkt etc. — *Wir erhalten eine doppelte und zwei einfache Ausnahmeebenen, ferner je damit vereinigt einen doppelten und zwei einfache Ausnahmepunkte.* — Damit hat man die singulären Linien und die Singularitätenfläche vollständig.

Man vergleiche mit [11(22)] (S. 184). Der dort genannte Kegelschnitt zerfällt hier in ein Punktepaar, der Kegel in ein Ebenenpaar. Der Complex ist wie jener zu construiren. Die Complexkegelschnitte berühren die doppelte Ausnahmeebene an einer bestimmten Geraden, nämlich an der Verbindungslinie der beiden einfachen Ausnahmepunkte etc. *Der Complex hat 12 Constante. Das Büschel der Geraden in der Doppelebene durch den Doppelpunkt besteht auch hier aus doppelten Complexgeraden. Eine weitere doppelte Complexgerade in der doppelten Ausnahmeebene, die nicht durch den doppelten Ausnahmepunkt geht, ist die Verbindungslinie der einfachen Doppelpunkte. Ebenso gehört die Schnittlinie der einfachen Ausnahmeebenen doppelt dem Complexe an.*

Das Letztere ergiebt sich sofort, wenn man in Ω die zweifache Wurzel λ_1 gleich Null setzt und die vierfache λ_3 als von Null verschieden annimmt.

VI.

Fünfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_6 + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,x_3 x_5 + x_4^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form kommt ein *vierfacher Elementartheiler* vor. Die vierfache Wurzel, die zu ihm gehört, ist hier als Null angenommen.

Es kommen keine zerfallenden Complexe vor; wir haben die folgenden *vier* Möglichkeiten:

$$[114],\ [1(14)],\ [(11)4],\ [(114)].$$

Die Form P geht in die Bedingungsgleichung der Coordinaten p_{ik} über bei folgender Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_4 = 2\,p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_6 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_5 = p_{23}\,.$$

30. In dem Fall *[114]* haben wir die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) y_3^4 - 4\,y_3^2 y_1^2 + 8\,\lambda_1 \lambda_2 y_3^2 y_1 y_2 + 4\,(\lambda_1 + \lambda_2) y_3 y_1^2 y_4$$
$$- 8\,(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^3 y_2 + 16\,\lambda_1 \lambda_2 y_1^2 y_1^2 = 0\,.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist Doppelgerade, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifacher Punkt. Die Kegelschnitte berühren die Doppelgerade im dreifachen Punkte etc.

Die Singularitätenfläche ist die Complexfläche, deren Leitgerade (im allgemeinen Complex zweiten Grades) eine singuläre Complexgerade ist. Diese Gerade ist die einzige Doppelgerade des Complexes, der 16 Constante besitzt.

31. Für $\lambda_2 = 0$ erhält man aus dem vorigen Fall *[1(14)]*. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_3^2 (\lambda_1 y_3^2 - 4 y_1^2) + 8 \lambda_1 y_1^2 (y_3 y_4 - y_1 y_2) = 0 .$$

Die Gerade $y_1 = y_3 = 0$ ist dreifach geworden, die Fläche also eine Linienfläche. Es ergiebt sich:

Die Singularitätenfläche ist derjenige Specialfall von Cremona's Gattung X, bei dem die beiden stationären Tangentenebenen zusammenfallen. Der Complex hat 14 Constante.

Cremona erzeugt die allgemeine Gattung X durch eine ebene Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt und eine Gerade, welche durch den Doppelpunkt geht. In diesem Fall ist aus dem Doppelpunkt eine Spitze geworden.

Wie [11(13)] (S. 179) hat auch dieser Complex *drei unendlich nahe Doppelgerade.* Sie sind dargestellt wie bei [11(13)] durch die Leitgerade und die singulären Erzeugenden der Linienfläche. (Nur die gegenseitige Lage ist anders, da hier diese beiden Erzeugenden zusammenfallen).

32. In dem Fall *[(11)4]* hat man:

Die Singularitätenfläche besteht aus der allgemeinen Linienfläche dritten Grades und einer ihrer Cuspidalebenen mit dem darin liegenden Cuspidalpunkt. Der Complex hat 14 Constante.

Die *vier Doppelgeraden des Complexes* haben eine Anordnung wie bei [(11)22] (S. 187). Zwei sind in einer Ebene unendlich benachbart, eine dritte liegt in ihrer Ebene und geht nicht durch den Schnittpunkt, die vierte thut das Umgekehrte.

33. Für *[(114)]* hat man:

$$\Omega \equiv 2\, x_3 x_5 + x_1^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv 2\, x_3 x_4 = 0\,.$$

Die singulären Linien bestehen aus der dreifach zählenden zerfallenden Congruenz $x_3 = x_4 = 0$ und aus der allgemeinen linearen $x_1 = x_5 = 0$. Die beiden Büschel $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ bestehen aus doppelten Complexgeraden, sie geben doppelt zählend die Singularitätenfläche. Der Complex hat 11 Constante.

Vergleichen wir mit [1(113)] (S. 180). Die Congruenz $2, 2'$ falle dort in die doppelt zählende specielle hinein; $1, 1'$ lasse man unverändert. Man findet so, dass die Complexkegelschnitte die Ebene, welche dreifache singuläre Linien enthält, an der Schnittlinie unserer beiden Ebenen berühren, die andere aber an einer bestimmten Geraden in bekannter Richtung durchsetzen. Das Duale gilt für die Complexkegel.

VII.

Sechste kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2\,x_2x_3 + 2\,x_4x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_2 x_2 x_3 + x_2^2 + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$

Man hat hier *einen einfachen, einen doppelten und einen dreifachen Elementartheiler.* Die dreifache Wurzel ist in Ω als Null angenommen. Es kommen die folgenden *fünf Fälle* vor, von denen keiner einen zerfallenden Complex ergiebt:

$$[123],\quad [1(23)],\quad [2(13)],\quad [(12)3],\quad [(123)].$$

Durch die folgende Substitution wollen wir in die p_{ik} transformiren:

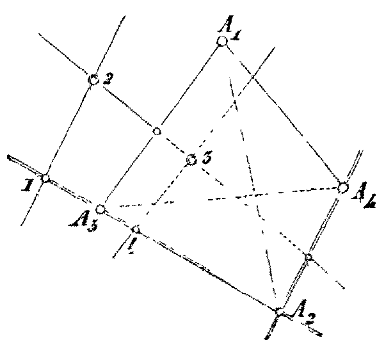
$$x_1 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,,\qquad x_2 = p_{13}\,,\qquad x_4 = p_{14}\,,$$
$$x_5 = p_{12} + p_{34}\,,\qquad x_3 = 2\,p_{42}\,,\qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

34. Die Singularitätenfläche des Falles $[123]$ hat die folgende Gleichung:

$$-y_1^4 - 4\,\lambda_1 y_1^3 y_3 + 4\,\lambda_1\lambda_2^2(y_1y_2 - y_3y_4)^2 + 8\,\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)y_1y_4(y_1y_2 - y_3y_4) + 4\,(\lambda_1 - \lambda_2)y_1^2y_4^2 = 0\,.$$

Wir sehen, dass $y_1 = y_3 = 0$ Doppelgerade, $y_1 = y_2 = 0$ die zu ihr adjungirte, $y_1 = y_4 = 0$ endlich Rückkehrgerade ist. Wir suchen wieder die zerfallenden Kegelschnitte und finden:

Die Singularitätenfläche besitzt eine Doppelgerade mit adjungirter Geraden und eine Rückkehrgerade, welche die adjungirte trifft. Die Verbindungslinie der zwei conischen Knoten der Fläche trifft die Doppelgerade und gehört der Fläche an; ferner gehen durch die Knoten noch zwei Geraden der Fläche, die wie die eben genannte Gerade constante Tangentialebene haben. Der Complex hat 16 Constante.



Die Lagenbeziehung der Geraden der Fläche ist durch die nebenstehende Figur deutlich gemacht. $A_2\,A_3$ ist die Rückkehrgerade, $A_2\,A_4$ die Doppelgerade, $A_1\,A_3$ die adjungirte. 2 und 3 sind conische Knoten. $\overline{23}$ ist eine einfache Gerade der Fläche, sie trifft Doppelgerade und adjungirte Gerade, ihre constante Tangentialebene geht durch A_2A_4. — Die Geraden A_2A_1, 24, A_1A_3, 13 sind vier harmonische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades, der auch $A_2 A_3$ und $\overline{23}$ angehören. — Man stelle sich in [1122] (S. 183) vor, dass die Punkte 1 und 4 in $A_2 A_3$ fallen. Die adjungirte von $A_2 A_3$ rückt mit heran und macht die Doppelgerade zur Rückkehrgeraden.

35. In dem Fall *[1(23)]* haben wir:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_2^2 + 2\, x_4 x_5\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + x_4^2 = 0\,.$$

Die Geraden $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ bilden in $y_1 = 0$ ein Büschel durch den Punkt A_2, bestehend aus doppelten Complexgeraden. — Aus $\Omega = 0$ werden die singulären Linien durch zwei allgemeine, in Involution liegende lineare Complexe ausgeschieden. Dem entsprechend zerfällt auch die Singularitätenfläche. In Punkt- und Ebenencoordinaten erhalten wir:

$$y_1^2\,(y_1^2 + 4\,\lambda_1 y_1 y_3 - 4\,\lambda_1 y_4^2) = 0\,,$$
$$v_2^2\,(v_2^2 - 4\,\lambda_1 v_4 v_2 - 4\,\lambda_1 v_{32}) = 0\,.$$

Die Singularitätenfläche zerfällt in einen Kegel und einen Kegelschnitt, welch' letzterer in einer Tangentialebene des ersteren liegt und die Erzeugende des Kegels, die in seiner Ebene liegt, an der Kegelspitze berührt. Dem Kegel und dem Kegelschnitt sind lineare, in Involution liegende Complexe zugeordnet, die aus ihren Treffgeraden, bez. Tangenten die singulären Linien ausschneiden. Der Complex besitzt 13 Constante.

Dieser Complex verhält sich wie [11(22)] (S. 184). Die Construction ist noch genau dieselbe, nur die gegenseitige Lage von C und K hat sich verändert.

36. In dem Fall *[2(13)]* tritt wegen 2 eine Complexdoppelgerade, wegen (13) aber treten drei solche auf, die unendlich benachbart sind. Wir finden das Folgende:

Die Singularitätenfläche ist die Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit einer Ebene ihrer Doppeldeveloppabeln und dem zu dieser gehörenden Punkt der Doppelgeraden. Der Complex hat vier Doppelgerade, er hat 14 Constante.

Die Doppelgeraden bilden augenscheinlich zunächst in der Doppeltangentialebene ein ausgeartetes Dreieck und die vierte geht durch eine seiner Ecken. Man vergleiche die Fälle: [(11)22] (S. 187) und [(11)4] (S. 190).

37. Für den Fall *[(12)3]* ergiebt sich das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit einer Selbstberührungsgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Unterfall von der Gattung Cremona VI. Der Complex hat drei Doppelgerade und 14 Constante.

38. Sehr einfache Verhältnisse sind bei *[(123)]*. Es ist:

$$\Omega \equiv x_2^2 + 2\,x_4 x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv x_4^2 = 0.$$

Die Geraden $x_2 = x_4 = 0$ bilden den *Ausnahmepunkt* A_2 und die *Ausnahmeebene* $y_1 = 0$. Diese Linien sind doppelte singuläre. Diejenigen von ihnen, die in $y_1 = 0$ durch A_1 gehen, sind vierfach singulär.

Der Complex besitzt ein Büschel von doppelten Complexgeraden: sein Mittelpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und seine Ebene ebenfalls vierfach zählend der Ort der singulären Punkte. Die Zahl der Constanten ist 11.

Vergleichen wir hiermit [1(122)] (S. 186). Es rücken dort die Directricen der speciellen Congruenzen in eine Gerade g zusammen. Sei E die Ausnahmeebene, P in ihr der Ausnahmepunkt, so liegt g in E und geht durch P. Alle Complexkegelschnitte berühren E an g, die Complexkegel g in P.

VIII.

Siebente kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23} = 0$$
$$\Omega \equiv 2\lambda_1 x_1 x_2 + 2\lambda_2 x_3 x_4 + 2\,\lambda_3 x_5 x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0.$$

Es sind *drei zweifache Elementartheiler* vorhanden. Damit treten *drei Doppelgerade* auf, die sich alle schneiden, die also entweder in einer Ebene ein Dreieck bilden, oder durch einen Punkt gehend ein Trieder bilden. Das sehen wir auch bei Ω. Ersetzen wir dort die drei quadratischen Glieder durch p_{12}^2, p_{13}^2, p_{14}^2, so tritt der erstere Fall ein, da die Directricen p_{12} etc. diese Doppelgeraden sind. Setzen wir dagegen p_{34}^2, p_{42}^2, p_{23}^2 hin, so haben wir den zweiten Fall. Weiterhin werden wir überall diese zwei dual gegenüberstehenden Möglichkeiten auseinanderhalten.

Es gehören die folgenden *drei* Gattungen hieher:

$$[222], \qquad [2(22)], \qquad [(222)].$$

39. In dem ersten Fall, *[222]*, haben wir:

(A.) *Die Doppelgeraden liegen in einer Ebene.* Es ist:

$$\Omega \equiv 2\lambda_1 p_{12} p_{34} + 2\lambda_2 p_{13} p_{42} + p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0.$$

Die Directricen von $p_{12} = 0$ etc. sind Complexdoppelgerade. Sie machen die Ebene $y_1 = 0$, in der sie liegen, zur *Ausnahmeebene*. Die noch bleibende Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse hat die Gleichung:

$$y_1 \left\{ y_1^2 - \lambda_2 y_2^2 - \lambda_1 y_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2 y_4^2 \right\} - 2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Die Untersuchung der Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen durch $y_1 = y_2 = 0$ etc. gehen, ergiebt das Resultat:

Die Singularitätenfläche ist die bekannte Fläche dritter Ordnung vierter Klasse mit vier conischen Knotenpunkten (deren 6 Verbindungslinien einfache Geraden der Fläche mit constanter Tangentialebene sind). Als ergänzende Ebene kommt die Ebene der drei Doppelaxen (die im Pentaeder der Fläche ausgezeichnete Ebene) hinzu.

(B.) *Die drei Doppelgeraden gehen durch einen Punkt.* Es ist:

$$\Omega \equiv 2\lambda_1 p_{12} \cdot p_{34} + 2\lambda_2 p_{13} \cdot p_{42} + p_{31}^2 + p_{42}^2 + p_{23}^2 = 0\,.$$

Wir haben hier vollständig den dualen Fall des Vorigen.

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Punkt und einer Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse, welche drei Doppelgerade besitzt, die sich in einem dreifachen Punkt treffen. Sie besitzt ausserdem vier Doppelebenen etc. und ist die sog. „Steiner'sche Fläche" („römische Fläche von Steiner"). Ihr dreifacher Punkt ist der ergänzende Complex-Ausnahmepunkt.

In beiden Fällen, A. und B., hat der Complex *16 Constante.*

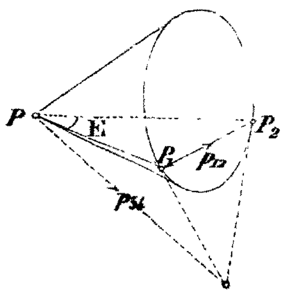
40. Setzen wir im vorigen Fall eines der λ Null, oder beide einander gleich, so erhalten wir für den Fall *[2(22)]*:

(A.) *Die Singularitätenfläche ist ein Kegel zweiter Ordnung K mit einer doppelt zählenden Ebene* E *durch seine Spitze P. Als Klassenfläche hat man zu betrachten: P doppelt zählend und zwei Punkte* P_1, P_2 *der in* E *liegenden Erzeugenden von K. Das Büschel von Geraden durch P in* E *besteht aus doppelten Complexgeraden.*

Die *singulären Linien* sind:

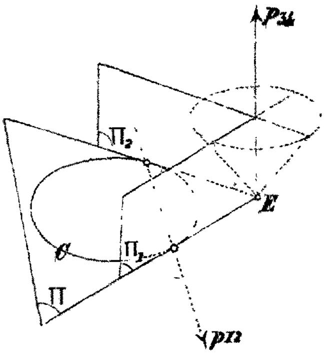
$$\begin{cases} p_{12} = (p_{13} + ip_{14})(p_{13} - ip_{14}) = 0\,. \\ p_{34} = p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0\,. \end{cases}$$

Die ersten beiden Congruenzen geben P_1, P_2 und doppelt die Ebene E. (Die Geraden in E sind also doppelte singuläre Linien, einfache Complexgerade, ausgenommen das Büschel durch P.) Die zweite Congruenz besteht aus den Geraden des speciellen Complexes $p_{34} = 0$, welche die Ebene E ($y_1 = 0$) in einem Kegelschnitt ($y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$) treffen (s. Fall [(222)]). Die Construction des Complexes ist sehr einfach.



(B.) *Die Singularitätenfläche besteht doppelt zählend aus der Ebene* Π *und zwei Ebenen* Π_1, Π_2. *Als Klassengebilde hat man dagegen einen Kegelschnitt C in* Π, *den* Π_1 *und* Π_2 *berühren, ferner einen Punkt E, in dem sich die drei Ebenen* Π *schneiden, letzteren doppelt zählend.*

Die *singulären Linien* bestehen aus den Geraden in Π_1 und Π_2, ferner aus denen in Π doppelt zählend. Eine weitere Congruenz zweiten Grades (eine irreducible) wird gebildet durch die Geraden, welche die Verbindungslinie der Berührungspunkte von Π_1 und Π_2 mit C treffen, und ausserdem einen Kegel ($v_2^2+v_3^2+v_4^2=0$) berühren. Die Mitte dieses Kegels ist E. Die Ebene Π ist die auf ihn bezügliche Polarebene für die Gerade (Π_1, Π_2). Er berührt ferner die Geraden $\Pi\Pi_1$ und $\Pi\Pi_2$ in den Berührungspunkten derselben mit C etc.



Der Complex hat ein *Büschel von Doppelgeraden*. Diese liegen im Fall (A) in E und gehen durch P, bei (B) gehen sie durch E und liegen in Π. Die Geraden $\overline{P_1 P_2}$ und $(\Pi_1 \Pi_2)$ sind ebenfalls Doppelgerade des Complexes und der Singularitätenfläche. — *Der Complex hat 13 Constante.*

Man vergleiche die Complexe mit [11 (22)] (S. 184). Bei (A) zerfällt dort der Kegelschnitt in zwei Büschel, bei (B) der Kegel. Nimmt man im letzteren Fall C als imaginären Kugelkreis, so stehen in unserm gewöhnlichen Raum Π_1 und Π_2 zu einander senkrecht. Diese Specialisirung kommt in der Mechanik vor*). Der Complex hat die Beweglichkeit des tetraedralen, er lässt dreifach unendlich viel Transformationen in sich zu.

41. Der noch einzig zu behandelnde Fall ist *[(222)]*.

$$\text{(A.)} \qquad \Omega \equiv p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0, \qquad \Omega' \equiv 0.$$

Da $\Omega' \equiv 0$ ist, so ist jede Complexgerade singulär, *der Complex ist speciell.* — Eine Raumgerade p_{ik} trifft bekanntlich die Coordinatenebene $y_1 = 0$ in dem Punkt:

$$y_2 : y_3 : y_4 = p_{12} : p_{13} : p_{14}.$$

$\Omega = 0$ sagt also, dass alle Complexgerade die Ebene $y_1 = 0$ in Punkten des Kegelschnittes $y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ ($y_1 = 0$) treffen. D. h.:

Der Complex besteht aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes. Derselbe bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Alle zweifach unendlich vielen Geraden in der Ebene des Kegelschnittes sind Complex-Doppelgerade. (Die Tangenten des Kegelschnitts sind unter ihnen nicht weiter ausgezeichnet.)

(B.) Durch duale Uebersetzung des Vorigen erhalten wir:

---

*) Man vergleiche u. A. Chasles, Comptes rendus, 1843.

Der Complex besteht aus allen Tangenten eines Kegels. Alle Geraden durch den Mittelpunkt desselben sind doppelte Complexgerade.

Diese beiden Complexe haben 8 Constante.

IX.

Achte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2 = 0 .$$
$$\Omega \equiv \lambda x_1^2 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0 .$$

Es kommt ein *fünffacher Elementartheiler* vor. Wir haben hier die folgenden *zwei Fälle.*

$$[15], \qquad [(15)] .$$

Als Substitution der x in die p_{ik} wählen wir die folgende:

$$x_1 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \qquad x_2 = p_{13}, \qquad x_3 = p_{14}$$
$$x_4 = (p_{12} + p_{34}), \qquad x_6 = 2p_{42}, \qquad x_5 = 2p_{23},$$

42. Der Fall *[15]* wird uns über den Einfluss eines fünffachen Elementartheilers Aufschluss geben. — Die Singularitätenfläche wird:

$$\lambda_1 y_3^4 - 2y_3^3y_1 - 2\lambda_1 y_3^2 y_1 y_4 - 4\lambda_1 y_3 y_1^2 y_2 + y_3 y_1^2 y_4 - y_1^3 y_2 + \lambda_1 y_1^2 y_4^2 = 0.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist doppelt auf der Fläche, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifach. $y_1 = 0$ ist stationäre Tangentialebene an der Doppelgeraden. Dieses Verhalten ist noch wie bei [114] (S. 189). Es giebt jedoch hier nur noch einen conischen Knoten. In [114] lasse man einfach einen Knoten in den dreifachen Punkt hineinrücken, so hat man diese Fläche.

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche vierter Ordnung. Dieselbe besitzt eine Doppelgerade, auf ihr einen dreifachen Punkt, längs ihr eine stationäre Tangentialebene. Es kommt noch ein conischer Knoten vor, dessen Verbindungslinien mit dem dreifachen Punkt einfache Gerade der Fläche mit stationärer Tangentialebene ist. Diese letztere Ebene enthält auch die Doppelgerade etc. — Der Complex besitzt 15 Constante.

43. Für *[(15)]* ist oben $\lambda_1 = 0$ und es tritt das Folgende ein:

Die Singularitätenfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit deren stationärer Ebene und deren stationärem Punkte. Der Complex besitzt 13 Constante.

Der Complex besitzt *vier unendlich nahe liegende Doppelgerade.* Sie bilden ein Dreieck, die vierte geht durch eine seiner Ecken. Dies Verhalten ist wie bei [(1)14] (S. 189); nur rückt die eine dort unterschiedene Doppelgerade den drei andern unendlich nahe, da man hier die Cayley'sche Linienfläche hat.

X.

Neunte kanonische Form.

$$P = x_1 x_2 + x_3 x_6 + x_4 x_5 \equiv p_{14} \cdot p_{23} + p_{42} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{34} = 0 .$$
$$\Omega = 2 \lambda_1 x_1 x_2 + x_1^2 + 2 x_3 x_5 + x_4^2 = 0 .$$

Es kommen hier *ein zweifacher und ein vierfacher Elementartheiler* vor. (Die zum letztern gehörige vierfache Wurzel ist hier als Null angenommen.) — Wir haben die *zwei Möglichkeiten:*

$$[24] , \qquad [(24)]$$

44. In dem Fall *[24]* hat man einen *Ausnahmepunkt.* Er ist: $x_4 = x_1 = x_3 = 0$, resp. $p_{12} = p_{14} = p_{42} = 0$. Eine Ausnahmeebene tritt jedoch nicht auf. Wir erhalten also auch hier zwei sich dual gegenüberstehende Complexe. Zunächst erhalten wir bei obenstehendem Ω die Singularitätenfläche:

(A.) $\lambda_1 y_1^2 y_2^2 - 2 \lambda_1 y_1 y_2^2 y_4 + 2 \lambda_1^2 y_2 y_3 y_4^2 + y_2^2 y_4^2 + y_4^4 = 0 .$

Die Singularitätenfläche ist vierter Ordnung, dritter Klasse, sie hat zwei Doppelgerade, die sich in einem dreifachen Punkt schneiden. Eine von ihnen besitzt eine stationäre Tangentialebene, die zweite hat eine adjungirte Gerade, welche die Vorige trifft. Der ergänzende Theil nullter Ordnung erster Klasse ist der dreifache Punkt.

Man sieht deutlich, wie diese Fläche zwischen [114] (S. 189) und [(11)4] in der Mitte steht. Sie ist eine der Plücker'schen Meridianflächen*).

(B.) *In dem dualen Fall* des vorigen erhalten wir für die Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten v eben die vorige Gleichung, statt y_i überall v_i gesetzt. In Punkt-Coordinaten dagegen schreibt sie sich:

$$y_3 \left\{ y_3 (y_1 - \lambda_1 y_4)^2 + 2 y_2 (\lambda_1^2 y_1^2 - y_3^2) \right\} = 0 .$$

Die Discussion dieser Gleichung giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Ebene und einer Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse. Letztere besitzt einen biplanaren Knoten und zwei conische. Die Seiten des durch diese gebildeten Dreiecks sind einfache Geraden der Fläche mit stationären Tangentialebenen. Eine Gerade durch den biplanaren Knoten ist ebenfalls einfache Gerade, nullfache Axe der Fläche. Eine fünfte Gerade endlich trifft diese letztere und die Verbindungslinie der conischen Knoten und ist einfacher Strahl und Doppelaxe der Fläche. Die ergänzende Ebene geht durch den biplanaren Knoten und die viertgenannte Gerade.

---

*) Unter den Modellen von Eigel, Sohn, in Cöln („*Modelle der Plücker'schen Flächen*") ist sie die Nr. 24.

Macht man alle Knoten zu Coordinatenecken, so erhält man als kürzere Gleichungsform dieser Fläche:

$$(y_1 - y_3) y_4^2 + 4 y_1 y_2 y_3 = 0 .$$

Diese Fläche kann kurz bezeichnet werden als *Gattung VIII von Schläfli's Flächen dritter Ordnung.**)

Der Complex hat 15 Constante. In beiden Fällen erhält man aus $\Omega = 0$ die beiden Doppelgeraden, wenn man das eine Mal die vierfache Wurzel λ_3, das andere Mal die doppelte λ_1 als Null annimmt.

45. Für *[(24)]* ist im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$ zu nehmen. Wir erhalten für die Singularitätenfläche

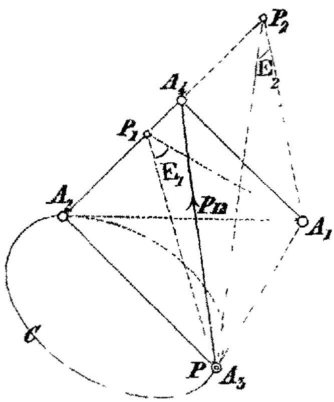
(A.) $y_4^2(y_2^2 + y_4^2) = 0$ und: $v_3^2(v_1^2 - 2 v_2 v_3) = 0$.

Das ist ein Kegelschnitt C mit einem seiner Punkte P doppelt zählend, und mit zwei seiner Tangentialebenen E_1, E_2 *durch P.*

Für *die singulären Linien* erhält man:

$$p_{12} = p_{14}^2 + 2 p_{12} \cdot p_{34} = 0 , \quad p_{42} = (p_{14} + i p_{12})(p_{14} - i p_{12}) = 0 .$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Treffgeraden unseres Kegelschnitts C, welche die Gerade $A_3 A_4$ (s. die Figur) treffen. Die zweite besteht aus den zwei Ebenen E_1, E_2, *ferner doppelt zählend aus den Geraden durch P. — Das Büschel der Geraden durch P in der Ebene von C besteht aus doppelten Complexgeraden.* (Die Ebenen E_1, E_2, die Kegelschnittebene und $y_2 = 0$ liegen harmonisch.)



Die Complexkegelschnitte werden von den Geraden der ersten Congruenz an C berührt. In jeder Ebene hat man, wenn die Singularitätenfläche bekannt ist, für den Complexkegelschnitt sechs bekannte Tangenten, nämlich die vier singulären Linien und von zweien die Berührungspunkte. Der Complex ist damit sehr einfach construirbar. — Man erkennt die Aehnlichkeit mit früheren Fällen z. B. mit [11(22)] (S. 184).

(B.) Die duale Uebersetzung des Vorigen giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Kegel K mit einer seiner Tangentialebenen Π *doppelt zählend und mit zwei Punkten* E_1, E_2 *der Erzeugenden in* Π.

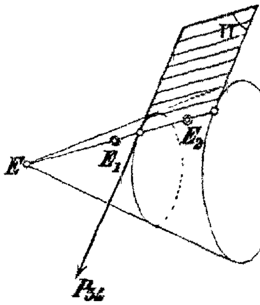
---

*) Vgl. die Abhandlung von Schläfli in den Phil. Transactions 1863, vol. 153.

Die *singulären Linien* sind:

$$p_{34} = p_{23}^2 + 2\,p_{12}\cdot p_{13} = 0\,,\quad p_{13} = (p_{23} + i p_{34})(p_{23} - i p_{34}) = 0\,.$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Tangenten unseres Kegels K, welche eine feste Tangente p_{34} treffen. Diese Tangente liegt in Π und trifft die Erzeugende $E_1 E_2$ des Kegels in einem Punkt, der zur Kegelspitze in Bezug auf E_1 und E_2 harmonisch liegt. Die zweite Congruenz besteht aus allen Geraden, die in Π liegen (dieselben zählen doppelt), sowie aus denjenigen, die durch P_1 oder P_2 gehen.



Wie vorhin die Geraden durch P sind hier die Geraden in Π dreifache singuläre Linien und einfache Complexgerade. Das Büschel der Geraden in Π, die durch den Berührungspunkt von p_{34} mit K gehen, besteht aus doppelten Complexgeraden.

Die Construction dieses Complexes aus Complexkegeln ist die duale Uebersetzung der oben angeführten Construction. Die Complexkegelschnitte berühren den Kegel K zweimal, erstens an $E_1 E_2$ und noch in einem Punkt, dem Berührungspunkt der einfach-singulären Linie der betreffenden Ebene mit K. Der Kegelschnitt ist also durch die Singularitätenfläche nicht direct bestimmt, während der Complexkegel überbestimmt wäre. (Derselbe geht nämlich durch E_1 und E_2, berührt ferner K an den singulären Geraden der oben zuerst angeführten Congruenz.

Der Complex hat 12 Constante.

XI.

Zehnte kanonische Form.

$$P \equiv 2\,x_1 x_3 + x_2^2 + 2\,x_4 x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1(2\,x_1 x_3 + x_2^2) + 2\,x_1 x_2 + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$

Man hat hier *zwei dreifache Elementartheiler.* Es treten nur die folgenden *zwei Fälle* auf:

$$[33]\,,\qquad [(33)]\,.$$

Als Uebergang zu den p_{ik} haben wir:

$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} + p_{34})\,,\qquad x_1 = i p_{13}\,,\qquad x_4 = p_{14}$$
$$x_5 = p_{12} - p_{34}\,,\qquad x_3 = 2\,i p_{42}\,,\qquad x_6 = -2 p_{23}\,.$$

46. Die Singularitätenfläche des Falles *[33]* ist:

$$\lambda_1^3(y_1 y_2 + y_3 y_4)^2 + \lambda_1 y_1^2(y_1 y_2 - y_3 y_4) + y_1^3(y_3 + y_4) = 0\,.$$

$y_1 = y_3 = 0$ und $y_1' = y_4 = 0$ sind die Rückkehrgeraden, die man von vorne herein zu erwarten hatte. Ihr Schnittpunkt ist uniplanar. Die projectivische Zuordnung an *beiden* Rückkehrgeraden ist gegeben durch $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$. Dadurch erkennt man den uniplanaren Knoten deutlich. — Unsere Fläche zweiten Grades schneidet neben den Rückkehrgeraden noch einen Kegelschnitt aus, der nicht zerfällt. — Es giebt eine Schaar von Flächen zweiten Grades, die alle unsere Fläche an beiden Rückkehrgeraden berühren und ausserdem Kegelschnitte ausschneiden. Sie heissen:

$$y_1^2 + \mu(y_1 y_2 + y_3 y_4) = 0 .$$

Eine einzige von ihnen, abgesehen von $\mu = 0$, giebt einen zerfallenden Kegelschnitt. Er besteht aus Geraden der Fläche, die ihrer ganzen Länge nach constante Tangentialebenen besitzen etc. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche besitzt zwei Rückkehrgerade, die sich in einem uniplanaren Knoten schneiden. Ferner hat sie einen conischen Knoten, von dem aus zwei einfache Gerade an die Rückkehrgeraden gehen, die constante Tangentialebenen besitzen. Eine covariante Fläche zweiten Grades berührt nach den Rückkehrgeraden und enthält ausserdem diese einfachen Geraden der Fläche. — Der Complex hat 15 Constante.

Man möge hier die Abstufung betrachten von [1122] (S. 183) zu [123] (S. 191) und diesen Fall. Bei [123] stelle man sich vor, die ganze Gerade 13 falle in $A_1 A_2$ hinein.

47. Setzt man im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$, so hat man *[(33)]*, dargestellt durch:

$$\Omega \equiv x_1 x_2 + x_4 x_5 = 0 , \qquad \Omega' \equiv x_1^2 + x_4^2 = 0 .$$

Die Singularitätenfläche besteht dreifach zählend aus einem Punkt P, mit einer durch ihn gehenden Ebene E. Als Ergänzung hat man eine weitere Ebene durch P und einen weiteren Punkt in E. — Die singulären Linien bestehen aus zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen in E durch P gehen und aus der doppelt zu zählenden, zerfallenden Congruenz, deren Geraden E und P erfüllen. — Der Complex hat 12 Constante.

Das Büschel (EP) besteht aus *doppelten Complexgeraden.*

Es seien E, P und die beiden Directricen d_1, d_2 beliebig angenommen. Eine zu d_1 unendlich nahe Gerade d_1' (die nicht in E verläuft) treffe d_2. Dasselbe thue die Gerade d_2' gegenüber d_2, resp. d_1. In einer beliebigen Ebene des Raumes hat man dann von dem Complexkegelschnitt zwei Tangenten, die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit d_i, d_i' und deren Berührungspunkte, die an d_i liegen, gegeben.

Eine absolute Invariante bestimmt einen solchen Kegelschnitt. Man erhält zweifach unendlich viele Kegelschnitte, wenn man um seine Tangenten die Ebene dreht. Jeder ist durch fünf Gerade gegeben. Die Construction dieses Complexes ist also wieder besonders einfach, im Uebrigen ganz ähnlich wie bei gewissen früheren Fällen.

XII.

Elfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_6 + x_2 x_5 + x_3 x_4 = 0 .$$
$$\Omega \equiv 2\, x_1 x_5 + 2\, x_2 x_4 + x_3^2 = 0 .$$

Hier ist *ein sechsfacher Elementartheiler* vorhanden. Die sechsfache Wurzel ist Null gesetzt. — Alle Fundamentalcomplexe sind speciell und wir dürfen setzen:

(A.) $x_1 = p_{34}, \quad x_2 = p_{14}, \quad x_3 = p_{12}, \quad x_4 = p_{13}, \quad x_5 = p_{23}, \quad x_6 = p_{12}$

(B.) $x_1 = p_{12}, \quad x_2 = p_{23}, \quad x_3 = p_{13}, \quad x_4 = p_{42}, \quad x_5 = p_{14}, \quad x_6 = p_{34} .$

48. Der Fall *[6]* ist der einzige hier vorkommende.

(A.) $$\Omega \equiv 2\, p_{34} \cdot p_{23} + 2\, p_{14} \cdot p_{13} + p_{42}^2 = 0 .$$

$p_{14} = p_{24} = p_{34}$ ist *Ausnahmeebene*, ein Ausnahmepunkt tritt nicht auf. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_4 [y_1^2 y_4 + 2\, y_2 y_3 y_4 - 2\, y_3^3] = 0 .$$

Diese Fläche dritter Ordnung vierter Klasse besitzt den biplanaren Knoten A_2 und den conischen A_4. Ihre Verbindungslinie hat die constante Tangentialebene $y_3 = 0$. Eine weitere Gerade $A_1 A_2$, die durch den conischen Knoten geht, hat eine stationäre dreifache Tangentialebene $y_4 = 0$, an der jeder ebene Schnitt der Fläche eine Wendung hat. Andere Singularitäten kommen nicht vor. — Wir finden durch Vergleich:

Die Singularitätenfläche besteht aus der Gattung XIX der Flächen dritter Ordnung, vierter Klasse von Schläfli, mit ihrer stationären dreifachen Tangentialebene.

Schläfli hat die Fläche auf dasselbe Coordinatensystem bezogen. — *Der Complex hat drei Doppelgerade, die in einer Ebene unendlich nahe liegen.*

(B.) In dem dualen Fall hat man.

$$\Omega \equiv 2\, p_{12} \cdot p_{14} + 2\, p_{23} \cdot p_{42} + p_{13}^2 = 0 .$$

Der Punkt $p_{12} = p_{23} = p_{13}$ ist hier *Ausnahmepunkt.* — Die Gleichung der Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten ist die obenstehende, wenn man statt der y die v setzt; in Punktcoordinaten lautet sie:

$$y_1^4 + 2\, y_1^2 y_2 y_3 + 2\, y_3^3 y_4 + y_2^2 y_3^2 = 0 .$$

Ein Punkt und eine Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse bilden die Singularitätenfläche. Letztere hat einen dreifachen Punkt, der uniplanar ist und durch den eine Doppelgerade der Fläche geht, die eine zweifache stationäre Tangentialebene hat. Die Ergänzung ist der dreifache Punkt.

Der Complex hat 14 Constante.

XIII.

In diesem letzten Abschnitt soll es sich darum handeln, eine Uebersicht über die 48 nunmehr einzeln untersuchte Complexe zu bekommen. Zuerst sollen allgemein geltende Sätze für sich ausgesprochen werden und nachher werden die einzelnen Fälle durch Tabellen verbunden.

Es treten in allen Fällen Gerade auf, die dem Complex doppelt angehören. Für jede solche ist sowohl $\Omega = 0$ als auch $\Omega' = 0$ doppelt erfüllt und wir haben:

In allen den 48 Fällen treten Complexdoppelgerade auf, welche der Congruenz der singulären Linien je vierfach zählend angehören.

Die Bedeutung der Doppelgeraden für den Complex ist die folgende:

Jede Doppelgerade des Complexes ist Doppelgerade der Singularitätenfläche. Umgekehrt ist auch jede Doppelgerade der Singularitätenfläche eine doppelte Complexgerade.

Den ersten dieser Sätze haben wir früher bewiesen, der zweite ist einstweilen Erfahrungssatz. — Für diese Doppelgeraden gilt weiterhin der folgende Satz:

Ist die Zahl der Doppelgeraden discret, so gruppiren sie sich wie eine entsprechende Anzahl von Kanten eines Tetraeders. Mehr als sechs, ausser unendlich viele, kommen nicht vor.

Die Tetraederkanten kann man z. B. auf drei wesentlich verschiedene Weisen zu je drei gruppiren. Entweder liegen sie in einer Seitenfläche, oder sie gehen durch eine Ecke oder endlich zwei von ihnen sind Gegenkanten und werden von der dritten getroffen. Alle diese drei Gruppen (wovon die beiden ersten linien-geometrisch gleichwerthig sind) kommen auch wirklich vor*).

Ist *eine einfach unendliche Anzahl von Doppelgeraden wirklich* vorhanden, so ist der am nächsten liegende Fall, dass sie *eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades* bilden. Diese F_2 ist dann doppelt zählend die Singularitätenfläche. Sie kann allgemein sein, ausarten, insbesondere zerfallen. Wenn sie in eine sich selbst dualistische Form

*) In einer vorläufigen Mittheilung in den Sitzungsberichten der phys.-med. Societät zu Erlangen vom Juli 1873 habe ich die 48 Complexe nach der Anzahl der Doppelgeraden geordnet.

ausarten soll, so zerfällt sie in zwei Ebenen, resp. zwei Punkte auf deren Schnittlinie. Die Erzeugenden bilden vier Büschel, die in den Ebenen E_1, E_2 durch die Punkte P_1, P_2 gehen. Die Büschel $E_1 P_1$ und $E_2 P_2$ bilden dann die eine Erzeugung dieser zerfallenen Fläche, $E_1 P_2$ und $E_2 P_1$ die andere. *Zwei so zusammengehörige Büschel repräsentiren dann die doppelten Complexgeraden.* — In noch speciellleren Fällen können E_1 und E_2, P_1 und P_2 zusammenrücken.

Es kann auch sein, dass *nur ein Büschel von Doppelgeraden* auftritt, das nicht mehr als eine Erzeugung einer F_2 aufgefasst werden kann. Die Ebene des Büschels gehört der Singularitätenfläche doppelt an, ebenso der Mittelpunkt des Büschels. In der ersteren hat man einen Kegelschnitt, durch den letztern einen Kegel, der den genannten Kegelschnitt berührt.

Sind einfach unendlich viel Doppelgerade vorhanden, welche *beide Erzeugungen einer F_2* ausmachen, so besteht der Complex aus allen Tangenten von F_2.

Ist dann F_2 ein *Kegelschnitt*, so besteht der Complex aus *allen Treffgeraden desselben* (dual aus allen Tangenten eines Kegels). Dann giebt es *zweifach unendlich viele Doppelgerade des Complexes*, sie liegen in der Ebene des Kegelschnittes. (Im dualen Fall sind sie die Geraden durch die Kegelspitze.) — Andere Fälle mit zweifach unendlich vielen Doppelgeraden kommen nicht vor, wenn wir zerfallende Complexe ausschliessen.

Das Zerfallen der Singularitätenfläche geschieht stets zusammen mit dem der Congruenz der singulären Linien. Es gilt hiefür das folgende Gesetz:

Ist eine Fläche m^{ter} Ordnung n^{ter} Klasse Theil der Singularitätenfläche, so gehört von ihren Tangenten eine Congruenz n^{ter} Ordnung, m^{ter} Klasse den singulären Linien an, und umgekehrt.

Zerfällt also die Singularitätenfläche nicht, so thut das auch die Congruenz der singulären Linien nicht. Es haben daher gerade die Fälle ein besonderes liniengeometrisches Interesse, bei denen die Singularitätenfläche zerfällt.

In den meisten Fällen ist die Abzählung der *Constanten* sehr leicht. Es dürfen hier ähnliche Inductionsschlüsse angewandt werden, wie bei den Doppelgeraden. Wenn z. B. das Auftreten eines zweifachen Elementartheilers die Constantenzahl um eins verringert, so vermindert ein neu auftretender doppelter Elementartheiler (vorausgesetzt, dass in beiden Fällen derselbe an Stelle von zwei einfachen Elementartheilern tritt) diese Zahl nochmals um eins.

Die Abzählung der *absoluten Invarianten* ist etwas weniger einfach, bietet jedoch keine Schwierigkeiten. Klein giebt eine Formel an für die willkürlichen Constanten, die bei der Transformation in die kanonische Form auftreten*). Hat der Complex m Constante und ist die Zahl dieser willkürlichen Constanten n, so ist die Zahl der absoluten Invarianten $m - 15 + n$. Dabei ist jedoch die erste kanonische Form vorausgesetzt, resp. es tritt als Bedingung auf, dass alle Elementartheiler einfach sind. Für die erste kanonische Form findet man so die Zahlen:

$$\begin{array}{cccccc} [111111], & [1111(11)], & [111(111)], & [11(11)(11)], & [1(11)(111)], \\ 4\ , & 3\ , & 2\ , & 2\ , & 1\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} [(11)(11)(11)], & [(111)(111)]. \\ 1\ , & 0. \end{array}$$

Für spätere Fälle habe ich diese Abzählung unterlassen.

Die Eintheilung der Complexe kann von ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus geschehen. In der Arbeit selbst sind die Elementartheiler obenangestellt, sie gaben die Eintheilung in die kanonischen Formen, was für die Behandlung das einfachste ist, da sie eine übersichtliche und erschöpfende Eintheilung geben. Wir sagten auch früher schon, dass man ganz ebenso erst nach den Wurzeln λ und innerhalb dessen nach den Elementartheilern eintheilen könnte. Hierauf gehen wir auch hier nicht weiter ein. Dagegen soll *die Anzahl der doppelten Complexgeraden* für die erste Tabelle die Unterscheidung abgeben. In der zweiten, ausführlicheren Tabelle soll *nach den Flächengattungen, die als Singularitätenflächen auftreten*, geordnet werden. Für jeden Complex ist die Constantenzahl angegeben. Man erkennt nach den oben ausgesprochenen Sätzen über die Doppelgeraden, dass beide Eintheilungen sich nahe berühren. In der letzten Tabelle sind alle Complexe mit je gleich viel *Constanten* zusammengestellt.

Tabelle I.

Eintheilung nach der Zahl der Doppelgeraden.

1 Doppelgerade	[11112], [1113], [114], [15]
2, sich schneidende . . .	[1122], [123], [24], [33]
2 windschiefe	[1111(11)], [111(12)]
3, als Dreieck resp. Trieder	[222], [6]
3, 2 windsch. treffen die dritte	[11(11)2], [1(11)3], [(11)4], [12(12)], [3(12)], [11(13)]
4, Vierseit	[11(11)(11)], [1(11)(12)], [(12)(12)]
4, Dreieck und Trieder . .	[(11)22], [2(13)], [1(14)], [(15)]
5 Doppelgerade	[(11)(11)2], [(11)(13)]
6 Doppelgerade	[(11)(11)(11)]

*) Vgl. S. 42 der Dissertation.

Ein Büschel	[(11)(22)], [2(22)], [11(22)], [1(23)], [(24)], [(33)]
Eine Erzeugung von F_2 . .	[111(111)], [11(112)], [1(113)], [(114)], [1(11)(111)], [(11)(112)], [(12)(111)], [12(111)], [3(111)], [2(112)], [1(122)], [(123)]
Beide Erzeugungen von F_2 .	[(111)(111)]
Strahlfeld oder Strahlbündel	[(222)].

Tabelle II.

Aufzählung der Singularitätenflächen.

Nicht-Linienflächen 4. Ordnung und Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111111	—	19	Allgemeine Kummersche Fläche.
11112	7	18	Complexfläche, als Leitgerade eine beliebige Raumgerade.
1113	16	17	Complexfläche, als Leitgerade eine Complexgerade,
114	30	16	Complexfläche, als Leitgerade eine singuläre Linie.
15	42	15	Fläche mit 1 Doppelgeraden und 1 con. Knoten.
1122	22	17	Fläche mit 2 Doppelgeraden und 4 con. Knoten.
123	34	16	1 Rückkehrgerade, 1 Doppelgerade, 2 con. Knoten
33	46	15	2 Rückkehrgerade, 1 con. Knoten.

Linienflächen vierten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.		
1111(11)	1	17	Cremona	XI, die allgemeine.
111(12)	8	16	„	XII, die allgemeine (Lie 1)*).
11(13)	17	15	„	X, die allgemeine (Lie 7).
1(14)	31	14	„	X, die stationären Ebenen vereinigt (Lie 10).
11(11)2	9	16	„	V, die allgemeine.
1(11)3	18	15	„	V, mit Rückkehrerzeugender.
12(12)	24	15	„	VI, die allgemeine (Lie 2).
3(12)	37	14	„	VI, mit Rückkehrerzeugender (Lie 4).

Flächen 3. (4.) Ordnung, 4. (3.) Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
222	39	16	Fläche mit 4 conischen Knoten etc. Dual: Steiner'sche Fläche.
24	44	15	Fläche mit 2 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XVIII.

*) Vgl. Lie: „*Ueber Complexe* . . .“ Diese Annalen, Bd. V, S. 238.

El.-Th.	Nr.	Const.	
6	48	14	Fläche mit 1 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XIX.

Linienflächen dritten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)22	26	15	Allgemeine, als Ergänzung ein beliebiger Doppelpunkt etc.
(11)4	32	14	Allgemeine, als Ergänzung ein Cuspidalpunkt.
2(13)	36	14	Cayley'sche, mit bel. Doppelpunkt (Lie 8).
(15)	43	13	„ , mit Cuspidalpunkt (Lie 11).

Zwei Flächen zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
11(11)(11)	3	15	Die F_2 haben ein räumliches Vierseit gemein etc.
1(11)(12)	11	14	Die F_2 berühren sich nach einer Erzeugenden.
(12)(12)	28	13	Die F_2 berühren sich nach zwei Erzeugenden.
11(22)	23	14	Kegel und Kegelschnitt.
1(23)	35	13	Kegel und Kegelschnitt, der letztere durch die Spitze des ersteren.

Eine Fläche zweiten Grades (F_2) und zwei Ebenen (E_1, E_2) nebst zwei Punkten (P_1, P_2).

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)(11)2	13	14	E_1 und E_2 tangiren F_2 in P_1 und P_2.
(11)(13)	20	13	E_1 und E_2 gehen durch dieselbe Erzeugende von F_2, P_1 und P_2 liegen auf ihr.
2(22)	40	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ durch dessen Spitze etc.
(24)	45	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ ist Tangentialebene.

Eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111(111)	2	14	4 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen gehören einer Erzeugung v. F_2 an.
1(11)(111)	4	12	2 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen zu je 4 vereinigt.
(111)(111)	6	9	Der Complex besteht aus den Tangenten von F_2.
12(111)	12	13	3 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und dopp. zählend.
(12)(111)	15	11	1 lin. Cong. sing. Lin, 4fach zählend und spec.
3(111)	21	12	2 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und 3fach zählend.
(222)	41	8	Complex besteht aus den Tangenten eines Kegels resp. den Treffgeraden eines Kegelschnittes.

Vier Ebenen ($E_1 \cdot\cdot E_4$) und vier Punkte ($P_1 \cdot\cdot P_4$).

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)(11)(11)	5	13	Tetraedraler Compl., E und P bild. ein Tetraeder.
11(112)	10	13	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 4 lineare Cong. sing. Lin.
1(113)	19	1	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lineare Cong. sing. Lin. (1 davon speciell).
(11)(112)	14	11	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 2 dopp. Büschel sing. Lin.
1(122)	25	12	$E_1 = \cdot\cdot = E_4$, 2 dopp. zähl. spec. lin. Cong.
2(112)	27	12	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lin. Cong. (1 dopp. zähl. zerfall. und 2 spec.)
(11)(22)	29	12	$E_1 = E_2$, E_3, E_4. E_1 erfüllt mit dopp., E_3 und E_4 mit einf. sing. Lin.
(114)	33	11	$E_1 = E_2$, erfüllt mit dreif. sing. Lin., ausserdem 1 Cong. sing. Lin.
(123)	38	11	$E_1 = \cdot\cdot = E_4$, erfüllt mit vierf. sing. Lin.
(33)	47	12	$E_1 = E_2 = E_3$, erfüllt mit dopp. sing. Lin., 2 spec. Cong. (die Directricen in E_4 durch P_4).

Tabelle III.

Aufzählung nach der Constantenzahl.

Const.	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8.
El.-Th.	111111	11112	1113	114	15	6						
			1111(11)	111(12)	11(13)	1(14)	(15)					
			1122	222	(11)22							
				123	33	(12)3						
				11(11)2	1(11)3	(11)4						
					24	2(13)	2(22)	2(112)				
					11(11)(11)	1(11)(12)	(11)(13)					
					12(12)	11(22)	1(23)	(33)				
						2(11)(11)	(11)(11)(11)	1(11)(111)	(12)(111)		(111)(111)	
						111(111)	11(112)	1(113)	(114)			
							(12)(12)	(11)(22)	(11)(112)			
							1(111)2	(111)3				
								1(122)	(123)			(222)
								(24)				

Erlangen, im Juli 1873.