

Das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Ordnung.

Von

OTTO STAUDE in Rostock.

Mehrere der zahlreichen *Beweise für die Realität der Wurzeln* der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ des Hauptachsenproblems der Flächen 2. Ordnung beruhen darauf, daß die *Diskriminante* als eine *Summe von Quadraten* dargestellt wird.

Auf einen ähnlichen Grundgedanken stützt sich auch der im folgenden mitgeteilte neue Beweis, indem er das *Produkt der Diskriminante D* der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ und der *Diskriminante D'* der Gleichung $\Delta'(\lambda) = 0$ durch die *Quadrate* der Unterdeterminanten der Determinante $\Delta(\lambda)$ und zugleich die *Diskriminante D'* selbst durch die Quadrate der Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$ ausdrückt (vgl. die Gleichungen (31), (22) und (28), (24)).

Dieser neue Beweis hat den doppelten Vorzug, daß die benutzten Quadratdarstellungen sich ohne jeden Umweg ergeben, und daß sie zugleich das Verschwinden der Unterdeterminanten von $\Delta(\lambda)$ für eine zweifache und der Elemente von $\Delta(\lambda)$ für eine dreifache Wurzel unmittelbar zum Ausdruck bringen.

1. *Die Diskriminanten D und D' bei der kubischen Gleichung.* Wir bezeichnen die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(1) \quad g(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

mit x_1, x_2, x_3 ; die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(2) \quad g'(x) = 3x^2 + 2px + q = 0$$

mit x'_1, x'_2 und die Wurzel der linearen Gleichung:

$$(3) \quad \frac{1}{2} g''(x) = 3x + p = 0$$

mit $x'' = -\frac{p}{3}$.

Die *Diskriminanten* der beiden Gleichungen (1) und (2):

$$(4) \quad D = -(x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2,$$

$$(5) \quad D' = -(x'_1 - x'_2)^2$$

lauten in den Koeffizienten:

$$(6) \quad D = 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2,$$

$$(7) \quad D' = -\frac{4}{9}(p^2 - 3q).$$

2. *Bedingung reeller und Bedingungen mehrfacher Wurzeln.*

Die kubische Gleichung (1) hat drei verschiedene reelle Wurzeln unter der Bedingung:

$$(8) \quad D < 0.$$

Sie hat eine zweifache und eine einfache Wurzel für:

$$(9) \quad D = 0, \quad D' \neq 0$$

und eine dreifache Wurzel für:

$$(10) \quad D = 0, \quad D' = 0.$$

Die Bedingungen sind in allen drei Fällen notwendig und hinreichend.

3. *Andere Darstellung der Diskriminanten D und D' .* Indem man mittels der Relationen:

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 &= -\frac{2p}{3}, & x'_1 x'_2 &= \frac{q}{3}, \\ x'^2_1 + x'^2_2 &= \frac{4p^2}{9} - \frac{2q}{3}, & x'^3_1 + x'^3_2 &= -\frac{8p^3}{27} + \frac{2pq}{3} \end{aligned}$$

die symmetrischen Funktionen $g(x'_1) \cdot g(x'_2)$ und $g''(x'_1) \cdot g''(x'_2)$ von x'_1, x'_2 berechnet, erhält man für D und D' die neue Darstellungsweise:

$$(11) \quad \frac{1}{27}D = g(x'_1) \cdot g(x'_2),$$

$$(12) \quad 9D' = g''(x'_1) \cdot g''(x'_2).$$

Zugleich ist nach (2) unter Benutzung des Wertes $x'' = -\frac{p}{3}$:

$$(13) \quad \frac{3}{4}D' = g'(x'').$$

4. *Die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ des Hauptachsenproblems.*

Die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems der Flächen 2. Ordnung lautet:

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0. \end{aligned}$$

Hier sind $a_{ki} = a_{ik}$ reelle Konstanten und ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(15) \quad r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(16) \quad p = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad q = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

wobei $A_{ki} = A_{ik}$ die Unterdeterminanten 2. Grades von r sind.

5. *Die Unterdeterminanten und Ableitungen von $\Delta(\lambda)$.* Wir bezeichnen mit $\Delta_{ki}(\lambda)$ die Unterdeterminanten 2. Grades von $\Delta(\lambda)$, so daß insbesondere:

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta_{11}(\lambda) = (a_{22} + \lambda)(a_{33} + \lambda) - a_{23}^2, \\ \Delta_{22}(\lambda) = (a_{33} + \lambda)(a_{11} + \lambda) - a_{31}^2, \\ \Delta_{33}(\lambda) = (a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}^2. \end{cases}$$

Danach ergibt sich für die *Ableitungen* von $\Delta(\lambda)$:

$$(18) \quad \Delta'(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda),$$

$$(19) \quad \frac{1}{2} \Delta''(\lambda) = (a_{11} + \lambda) + (a_{22} + \lambda) + (a_{33} + \lambda).$$

6. *Identische Gleichungen zwischen $\Delta(\lambda)$, $\Delta'(\lambda)$, $\Delta''(\lambda)$.* Für die Determinante (14) gelten die Gleichungen:

$$(20) \quad \begin{cases} \Delta_{22}(\lambda)\Delta_{33}(\lambda) - \Delta_{23}^2(\lambda) = (a_{11} + \lambda)\Delta(\lambda), \\ \Delta_{33}(\lambda)\Delta_{11}(\lambda) - \Delta_{31}^2(\lambda) = (a_{22} + \lambda)\Delta(\lambda), \\ \Delta_{11}(\lambda)\Delta_{22}(\lambda) - \Delta_{12}^2(\lambda) = (a_{33} + \lambda)\Delta(\lambda). \end{cases}$$

Nach (18) und (20) wird nun:

$$\Delta_{11}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{12}^2(\lambda) + \Delta_{13}^2(\lambda) + ((a_{22} + \lambda) + (a_{33} + \lambda))\Delta(\lambda),$$

$$\Delta_{22}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{21}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda) + ((a_{33} + \lambda) + (a_{11} + \lambda))\Delta(\lambda),$$

$$\Delta_{33}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{31}^2(\lambda) + \Delta_{32}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + ((a_{11} + \lambda) + (a_{22} + \lambda))\Delta(\lambda).$$

Durch Addition der drei Gleichungen folgt mit Hinblick auf (18) und (19):

$$(21) \quad \Delta'^2(\lambda) = S^2(\lambda) + \Delta''(\lambda)\Delta(\lambda),$$

falls zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(22) \quad S^2(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + 2\Delta_{23}^2(\lambda) + 2\Delta_{31}^2(\lambda) + 2\Delta_{12}^2(\lambda).$$

Aus (19) und (17) ergibt sich:

$$(a_{11} + \lambda) \frac{1}{2} \Delta''(\lambda) = (a_{11} + \lambda)^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda),$$

$$(a_{22} + \lambda) \frac{1}{2} \Delta''(\lambda) = a_{21}^2 + (a_{22} + \lambda)^2 + a_{23}^2 + \Delta_{33}(\lambda) + \Delta_{11}(\lambda),$$

$$(a_{33} + \lambda) \frac{1}{2} \Delta''(\lambda) = a_{31}^2 + a_{32}^2 + (a_{33} + \lambda)^2 + \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (19) und (18):

$$(23) \quad \frac{1}{4} \Delta''^2(\lambda) = s^2(\lambda) + 2\Delta'(\lambda),$$

falls zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(24) \quad s^2(\lambda) = (a_{11} + \lambda)^2 + (a_{22} + \lambda)^2 + (a_{33} + \lambda)^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{31}^2 + 2a_{12}^2.$$

Die beiden Gleichungen (21) und (23) gelten identisch in λ .

7. Die Diskriminante D' der Gleichung $\Delta'(\lambda) = 0$. Sind λ'_1, λ'_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(25) \quad \Delta'(\lambda) = 0,$$

so ist für die Diskriminante D' derselben Gleichung nach (13):

$$(26) \quad \frac{3}{4} D' = \Delta'(\lambda''),$$

wo λ'' die Wurzel der Gleichung:

$$(27) \quad \Delta''(\lambda) = 0$$

ist. Wendet man daher die in λ identische Gleichung (23) auf $\lambda = \lambda''$ an, so ergibt sich:

$$(28) \quad \frac{3}{2} D' = -s^2(\lambda'').$$

Hieraus folgt nach (24), da λ'' reell ist:

Die Diskriminante D' der quadratischen Gleichung (25) ist negativ; die Wurzeln λ'_1, λ'_2 der Gleichung (25) sind reell (vgl. (5)).

Andererseits ist nach (12):

$$(29) \quad 9D' = \Delta''(\lambda'_1) \cdot \Delta''(\lambda'_2).$$

8. Die Diskriminante D der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$. Für die Diskriminante D der kubischen Gleichung (14) ist nach (11):

$$(30) \quad \frac{1}{27} D = \Delta(\lambda'_1) \cdot \Delta(\lambda'_2).$$

Wendet man nun die in λ identische Gleichung (21) auf die beiden Wurzeln von λ'_1, λ'_2 von (25) an, so ergibt sich:

$$\Delta''(\lambda'_1) \cdot \Delta(\lambda'_1) = -S^2(\lambda'_1), \quad \Delta''(\lambda'_2) \cdot \Delta(\lambda'_2) = -S^2(\lambda'_2)$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$\Delta''(\lambda'_1) \cdot \Delta''(\lambda'_2) \cdot \Delta(\lambda'_1) \cdot \Delta(\lambda'_2) = S^2(\lambda'_1) \cdot S^2(\lambda'_2)$$

und nach (29) und (30):

$$(31) \quad \frac{1}{3} D' D = S^2(\lambda'_1) \cdot S^2(\lambda'_2).$$

Da nun nach Nr. 7 λ'_1 und λ'_2 reell und daher nach (22) $S^2(\lambda'_1)$ und $S^2(\lambda'_2)$ positiv sind, dagegen nach (28) D' negativ ist, so folgt:

Die Diskriminante D der kubischen Gleichung (14) ist negativ; die drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Gleichung (14) sind reell (vgl. (4)).

9. *Eine zweifache und eine einfache Wurzel.* Wenn die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_3$ hat, so ist jene zugleich einfache Wurzel von $\Delta'(\lambda) = 0$, so daß etwa:

$$(32) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'_1 \neq \lambda'_2.$$

Alsdann folgt aus (31) mit Rücksicht auf (9):

$$S^2(\lambda'_1) \cdot S^2(\lambda'_2) = 0.$$

Nun kann aber $S^2(\lambda'_2)$ nicht Null sein; denn sonst würden nach (22) alle Unterdeterminanten $\Delta_{ki}(\lambda'_2)$ und damit neben $\Delta'(\lambda'_2)$ auch $\Delta(\lambda'_2)$ verschwinden; es wäre daher λ'_2 zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$, was nach (32) nicht der Fall ist. Daher muß $S^2(\lambda'_1) = 0$ sein, und daher folgt mit Rücksicht auf (22) und (32):

Für eine zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$ verschwinden stets alle Unterdeterminanten $\Delta_{ki}(\lambda)$.

Wenn andererseits für irgend einen Wert $\lambda = \lambda'_1$ alle Unterdeterminanten $\Delta_{ki}(\lambda)$ Null sind, so verschwindet für ihn nach (14) und (18) auch $\Delta(\lambda)$ und $\Delta'(\lambda)$. Daher ist $\lambda = \lambda'_1$ eine zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$.

10. *Dreifache Wurzel.* Wenn die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine dreifache Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ hat, so ist diese zugleich zweifache von $\Delta'(\lambda) = 0$ und einfache von $\Delta''(\lambda) = 0$, so daß:

$$(33) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda''.$$

Aus (28) folgt daher mit Rücksicht auf (10) und (24):

Für eine dreifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$ verschwinden stets alle Elemente von $\Delta(\lambda)$.

Wenn andererseits für irgend einen Wert $\lambda = \lambda''$ alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ Null sind, so verschwinden für ihn nach (14), (18) und (19) auch $\Delta(\lambda)$, $\Delta'(\lambda)$ und $\Delta''(\lambda)$. Daher ist $\lambda = \lambda''$ eine dreifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$.

Rostock, Mai 1905.