

SULLE DISTORSIONI DEI CILINDRI ELASTICI PIÙ VOLTE CONNESSI.

DOTT. ELEONORA FREDA.

Oggetto di questa nota è lo studio delle distorsioni dei cilindri elastici più volte connessi, dal punto di vista da cui furono già studiate dal prof. Volterra [Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes 1907].

In questa memoria, il prof. Volterra studia le deformazioni a spostamenti polidromi, dei solidi elastici più volte connessi.

Egli suppone i coefficienti della deformazione, le loro derivate prime e seconde, continue nel corpo elastico e fa vedere come una deformazione di questo tipo, sia necessariamente a spostamenti monodromi, in uno spazio semplicemente connesso. Perciò, facendo variare u, v, w lungo un cammino s , tutto interno al corpo elastico, essi ritornano al punto di partenza con lo stesso valore. A tale risultato, il prof. Volterra giunge con un'applicazione del teorema di Stokes, ad una superficie σ tutta interna al corpo di cui la linea s , può sempre in uno spazio semplicemente connesso, considerarsi contorno. In un corpo elastico più volte connesso, potrà invece avvenire che pur essendo continui i coefficienti della deformazione e le loro derivate prime e seconde, pur essendo verificate le condizioni del Saint-Venant, gli spostamenti u, v, w siano discontinui. L'aver ammesso la continuità dei coefficienti della deformazione e delle loro derivate prime e seconde, porta di conseguenza che le discontinuità degli spostamenti lungo la superficie σ , di un taglio che ne diminuisca la connessione, possono essere individuate dalle relazioni

$$(I) \quad \begin{aligned} u_1 - u_2 &= l - qz + ry, & v_1 - v_2 &= m - rx + pz, \\ w_1 - w_2 &= n - py + qx \end{aligned}$$

essendo u_1, v_1, w_1 , i valori di u, v, w da un lato del taglio, u_2, v_2, w_2 i valori dall'altro lato del taglio, l, m, n, p, q, r delle costanti. Di una tale deformazione il prof. Volterra ha messo in luce l'interpretazione fisica. Supponiamo di aver determinato degli spostamenti u, v, w aventi lungo la superficie σ le discontinuità (I) e corrispondenti ad un sistema di forze esterne F — A tale sistema di forze F applicato al corpo allo stato naturale, corrispondono spostamenti regolari u', v', w' , quindi gli spostamenti $u - u', v - v', w - w'$, polidromi come u, v, w , corrispondono a forze esterne nulle ed individuano uno stato di deformazione, che può praticamente prodursi nel corpo, eseguendo un taglio lungo la superficie σ e risaldandone le due facce, dopo aver fatto subire all'una di esse, rispetto all'altra, uno spostamento rigido di componenti l, m, n, p, q, r . Deformazioni di questo tipo, sono state dette dal prof. Volterra distorsioni, e le 6 costanti l, m, n, p, q, r , caratteristiche della distorsione. Il prof. Volterra ha anche osservato che, distorsioni del tipo da lui studiate, eguali, (aventi cioè le stesse caratteristiche) eseguite in due diversi tagli σ_1 e σ_2 , trasformabili l'uno nell'altro con deformazione continua, generano lo stesso stato di deformazione nel corpo (Teorema dei tagli equivalenti).

In due recenti sue note. [*Nuovo Cimento* marzo aprile 1916] il Somigliana generalizza il concetto di distorsione, inizia cioè lo studio sistematico della deformazione di un corpo elastico, una o più volte connesso, in cui venga incuneato o soppresso un sottile strato di materia e l'equilibrio si ristabilisca senza intervento di forze esterne. Un caso perciò, di questa classe generale di deformazioni, è quella studiata dal prof. Volterra.

Il Somigliana proseguendo nello studio generale, del problema delle distorsioni, fa vedere come possa in pratica risolversi il problema della determinazione effettiva, della deformazione elastica, prodotta da una distorsione. Per risolvere problemi di questa natura, si tratta di determinare: 1° — tre funzioni u_1, v_1, w_1 che, regolari in tutto il corpo, abbiano lungo σ la polidromia voluta; 2° — le forze di massa e superficiali che corrispondono agli spostamenti u_1, v_1, w_1 ; 3° — gli spostamenti regolari u_2, v_2, w_2 che corrispondono a tali forze

esterne, quando queste si applichino sul corpo allo stato naturale. Allora gli spostamenti

$$u = u_1 - u_2 \quad v = v_1 - v_2 \quad w = w_1 - w_2 \quad ,$$

corrispondenti a forze esterne nulle, risolvono il problema voluto. Ora il Somigliana fa vedere come u_1, v_1, w_1 possano esprimersi mediante potenziali biarmonici di doppio strato.

Il problema è ridotto quindi alla determinazione degli spostamenti u_2, v_2, w_2 , ossia alla risoluzione, per date forze esterne, del problema generale dell'equilibrio elastico.

Formole generali, per la trattazione della classe più particolare di problemi da lui studiati, furono anche date dal prof. Volterra, nel secondo capitolo della sua memoria « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes ».

Tali formole danno il mezzo di ottenere, sebbene difficilmente in termini finiti, degli spostamenti soddisfacenti alle equazioni indefinite della elasticità, per forze di massa nulle, discontinui lungo σ , con la discontinuità individuata dalle formole (I), e corrispondenti in genere a tensioni superficiali non nulle. Il problema della determinazione della deformazione derivante da una distorsione, esigerebbe quindi ancora la ricerca della deformazione a spostamenti regolari che il corpo subirebbe per effetto delle suddette tensioni superficiali, problema possibile in generale, ma assai difficile a risolversi se non per spazi di forma assai particolare.

Lasciando perciò da parte le formole generali, mi son servita nello studio delle distorsioni dei cilindri elastici, due volte connessi, di alcuni risultati dati dal prof. Almansi nella sua nota « Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindri » (*Rend. R. Accademia dei Lincei* 5^a serie t. XVI).

In un solido cilindrico più volte connesso (l'asse delle z è parallelo alle generatrici del cilindro) si considerino gli spostamenti

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \frac{L + 2K}{4K(L + K)} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \\ v = -\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} - \frac{L + 2K}{4K(L + K)} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \\ w = 0 \end{array} \right.$$

dove $\Phi(x, y)$ è una funzione che gode delle seguenti proprietà: essa è biarmonica, le sue derivate prime rispetto ad x e ad y sono monodrome in tutto lo spazio occupato dal solido, finite e continue e di più assumono valori costanti sulle varie superficie cilindriche limitanti il corpo, φ è una funzione armonica tale che

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$$

Le (II) rappresentano spostamenti soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1. — soddisfano alle equazioni dell'equilibrio, in assenza di forze di massa;

2. — corrispondono a forze superficiali nulle sulle superficie cilindriche laterali, come risulta da ciò che segue. Infatti le tensioni interne corrispondenti agli spostamenti (II), sono espresse dalle formole

$$t_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad t_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad t_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0.$$

Dette L, M, N le componenti delle tensioni superficiali sulle superficie cilindriche laterali, poichè su esse $\cos \widehat{nz} = 0$, [se s_i è una delle linee limitanti una sezione normale] si ha

$$-\cos \widehat{nx} = \cos \widehat{s_i y} \quad \cos \widehat{ny} = \cos \widehat{s_i x}$$

$$L = t_{11} \cos \widehat{nx} + t_{12} \cos \widehat{ny} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \widehat{nx} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \widehat{ny} = - \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{\partial s_i}$$

$$M = t_{12} \cos \widehat{nx} + t_{22} \cos \widehat{ny} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \widehat{nx} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \widehat{ny} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\partial s_i}$$

$$N = t_{13} \cos \widehat{nx} + t_{23} \cos \widehat{ny} = 0 ,$$

verificata quindi la condizione che $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ siano costanti sulle linee s_i contorni delle sezioni normali, risultano

$$L = M = 0, N = 0$$

ossia è verificata la 2ª proprietà enunciata;

3. — se le tensioni interne fondamentali, corrispondenti agli spostamenti (II), non sono tutte nulle, u, v, w sono discontinue.

Infatti consideriamo la quantità, essenzialmente positiva, (che può solo annullarsi quando siano nulle tutte le tensioni interne)

$$Q = \int_{\sigma} \left[t_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + t_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + t_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\sigma$$

σ essendo l'area di una qualunque sezione normale. Se u, v, w sono funzioni continue, si ha

$$\left[\text{poichè } \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} = 0 \right]$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \int \left[\frac{\partial(t_{11}u)}{\partial x} + \frac{\partial(t_{12}u)}{\partial y} \right] d\sigma + \int_{\sigma} \left[\frac{\partial(t_{12}v)}{\partial x} + \frac{\partial(t_{22}v)}{\partial y} \right] d\sigma = \\
 &= \sum_{s_i} \int \left[u \left(t_{11} \cos \widehat{nx} + t_{12} \cos \widehat{ny} \right) + v \left(t_{12} \cos \widehat{nx} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + t_{22} \cos \widehat{ny} \right) \right] ds_i
 \end{aligned}$$

ed essendo per ipotesi nulle le tensioni superficiali, sulle superficie cilindriche laterali, se ne deduce $Q = 0$, quindi se qualcuna delle t_{rs} non è nulla, debbono u, v, w essere funzioni discontinue.

Dei risultati ora esposti, e della conoscenza degli spostamenti polidromi, soddisfacenti alle equazioni indefinite della elasticità, per forze di massa nulle

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\pi} \left[(l - qz + ry) \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(-m - pz - \frac{rK}{L + 2K} x \right) \log(x^2 + y^2) \right] \\
 v &= \frac{1}{2\pi} \left[(m - rx + pz) \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(l - qz - \frac{rK}{L + 2K} y \right) \log(x^2 + y^2) \right] \\
 w &= \frac{1}{2\pi} \left[(n - py + qx) \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (px + qy) \log(x^2 + y^2) \right]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

dati dal prof. Volterra a pag. 429 della sua memoria più volte citata, ho fatto in questo lavoro un'applicazione allo studio delle distorsioni in un solido elastico, limitato fra due cilindri circolari, in generale non aventi lo stesso asse e soggetto a sole azioni sulle basi. [Ricavando le formole particolari al caso di cilindri limitanti aventi lo stesso asse, ho ritrovato abbastanza semplicemente, formole date per altra via dal professore Volterra].

La conoscenza degli spostamenti (II) mi ha permesso la risoluzione dei tre seguenti problemi, in cui le tensioni risultano funzioni di x ed y soltanto.

In un solido cilindrico limitato fra due cilindri circolari, non aventi in generale lo stesso asse, e riferito ad una terna di assi, di cui l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro e interno alla cavità interna del corpo, si eseguisce un taglio con un semipiano avente origine nell'asse z e si risaldano le facce del taglio dopo aver fatto subire all'una di esse, una traslazione l secondo l'asse delle x , o una traslazione m secondo l'asse delle y ovvero una rotazione r intorno all'asse delle z . Determinare gli spostamenti nella ipotesi che il cilindro non sia soggetto nè a forze di massa, nè a tensioni superficiali, sulle superficie cilindriche laterali, potendo invece le basi essere sollecitate.

Alcuni risultati contenuti in una seconda nota del prof. Almansi, e che in seguito riassumerò [*Rendiconto Istituto Lombardo* T. XL serie 2^a], mi hanno poi permesso la determinazione degli spostamenti di un solido limitato fra due cilindri circolari coassiali, per una rotazione di una faccia del taglio, intorno all'asse delle y .

Mi son proposta la risoluzione di tali problemi, a meno di spostamenti regolari, dovuti ad azioni sulle basi del cilindro, sulle quali azioni non ho fatto nessuna ipotesi. Di tale arbitrarietà, mi son servita per soddisfare nel modo più immediato e semplice, alle varie condizioni imposte dal prof. Almansi.

Le formole risolutive dei problemi relativi al cilindro elastico limitato fra due cilindri circolari, non aventi lo stesso asse, rappresentano anche una certa deformazione di un mezzo elastico limitato fra due piani paralleli indefiniti ed avente in

sè due cavità cilindriche circolari, con assi normali ai due piani limitanti.

Nell'ultima parte di questa nota, espongo alcune proprietà di equivalenza fra le distorsioni fatte in un corpo più di due volte connesso, in tagli non trasformabili l'uno nell'altro con deformazione continua. Tali proprietà, generalizzano in qualche modo, il teorema dei tagli equivalenti dato dal prof. Volterra.

* * *

Premetterò allo studio dei problemi sopra detti, le seguenti osservazioni. Mediante una inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad un cerchio, posso mutare in una corona circolare lo spazio compreso fra due circonferenze interne l'una all'altra, ovvero lo spazio esterno a due circonferenze esterne l'una all'altra ¹⁾. Per effettuare una tale trasformazione basta infatti prendere come centro del cerchio d'inversione, uno dei punti P e Q della congiungente i centri, che separano armonicamente, entrambe le coppie di punti in cui i due cerchi segano la congiungente stessa. I punti P e Q risultano sempre esterni allo spazio che si vuol trasformare in una corona circolare. Nel caso cioè che le due circonferenze siano esterne l'una all'altra, i due punti in questione si trovano rispettivamente nell'interno del cerchio di raggio minore ed all'esterno del cerchio di raggio maggiore, se le due circonferenze sono esterne l'una all'altra, P e Q risultano rispettivamente interni alla 1.^a ed alla 2.^a circonferenza. Se le circonferenze date sono

$$(IV) \quad \begin{cases} (x+c)^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x-c)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$$

¹⁾ Levi Civita — Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$. *Atti Istituto Veneto* (7) pag. 1399-1410.

perchè le inverse siano concentriche, il centro di inversione deve essere in uno dei punti P e Q, di coordinate

$$(V) \begin{cases} x_P = \frac{r_1^2 - r_2^2 - \sqrt{(r_1^2 - r_2^2)^2 + 8c^2(2c^2 - r_1^2 - r_2^2)}}{4c} & y_P = 0 \\ x_Q = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \sqrt{(r_1^2 - r_2^2)^2 + 8c^2(2c^2 - r_1^2 - r_2^2)}}{4c} & y_Q = 0 \end{cases}$$

Nel caso che le (IV) siano interne l'una all'altra P è interno ad entrambe le circonferenze e Q è esterno ad entrambe. Le equazioni delle circonferenze inverse delle (IV) rispetto al cerchio di raggio unitario e centro P, sono

$$(x - a)' + y^2 = R_1'^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = R_2'^2$$

se

$$a = \frac{c - x_P}{c + x_P - 2cx_P - r_2^2}$$

(VI)

$$R_1'^2 = a^2 - \frac{1}{c^2 + x_P^2 + 2cx_P - r_1^2}$$

$$R_2'^2 = a^2 - \frac{1}{c^2 + x_P^2 - 2cx_P - r_2^2}.$$

Si vede quindi che l'espressione

$$I = \frac{1}{x + y^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} + a^2 = \frac{a^2 \left[x - \frac{1}{a} \right]^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

[dove a, R_1', R_2' hanno i valori (VI)] è costante sui due cerchi e precisamente è eguale a $R_1'^2$ sul primo, ad $R_2'^2$ sul secondo.

Se i due cerchi (IV) fossero concentrici $c = x_P = a = 0$

$$x_Q = \infty \quad R_1'^2 = \frac{1}{r_1^2} \quad R_2'^2 = \frac{1}{r_2^2} \quad I = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

*
* *

Mi proporrò ora tre problemi relativi ad un mezzo elastico isotropo limitato fra due cilindri circolari non aventi lo stesso asse.

Riferisco tale corpo ad una terna di assi cartesiani ortogonali, di cui l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro e luogo dei punti P delle sezioni normali, l'asse delle x sulla congiungente i centri dei cerchi di una sezione normale.

I.° Problema.

In un corpo elastico isotropo, limitato, fra due cilindri circolari non aventi lo stesso asse, si eseguisce un taglio con un semipiano uscente dall'asse delle z . L'orientazione di questo piano non ha, per teorema dei tagli equivalenti, importanza; per fissare le idee, suppongo che esso coincida col semipiano xz in cui la y è positiva. Si sposta l'una faccia del taglio parallelamente all'asse x di l , e si risalda. Voglio determinare gli spostamenti, nell'ipotesi che sul corpo non agiscano forze di massa, nè tensioni superficiali, nelle superficie cilindriche laterali. Per risolvere il problema basta, secondo i risultati del prof. Almansi, tenuto conto dell'esistenza degli integrali polidromi (III) delle equazioni indefinite dall'equilibrio elastico, che determini una funzione Φ tale che $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ siano regolari in tutto il corpo e costanti per $I = R_1^2$, $I = R_2^2$, ed una funzione armonica φ tale che $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sia regolare nel corpo, mentre

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{funzione monodroma} + \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \operatorname{artg} \frac{y}{x}$$

quindi

$$(2) \quad \varphi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ x \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \log(x^2 + y^2) + \psi \right\}$$

dove ψ deve essere armonica, con derivate rispetto ad x e ad y regolari in tutto il solido, e di più tale che risulti

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = \Delta^2 \Phi$$

quindi

$$(3) \quad \Phi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{y}{4} \log(x^2+y^2) + \frac{1}{2} \rho \right\}$$

ρ essendo una funzione biarmonica tale che $\frac{1}{2} \Delta^2 \rho = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.

Ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{xy}{2(x^2+y^2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{y^2}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{4} \log(x^2+y^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\}$$

debbono ridursi costanti per $I = R_1^2$, $I = R_2^2$. Sarà soddisfatta tale condizione, se mi riuscirà di determinare una funzione ρ , per esempio tale che

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{xy}{x^2+y^2} + f_1(xy) (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \lambda (I) \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \\ \quad + f_2(xy) (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \mu (I) . \end{array} \right.$$

Perchè una tale funzione ρ esista, occorre che coincidano le due espressioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} + \lambda'(I) \frac{\partial I}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial y} (I - R_1^2)(I - R_2^2) + f_1(x, y)(2I - R_1^2 - R_2^2) \frac{\partial I}{\partial y} \\ & \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} + \mu'(I) \frac{\partial I}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial f_2}{\partial x} (I - R_1^2)(I - R_2^2) + f_2(x, y)(2I - R_1^2 - R_2^2) \frac{\partial I}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

Prendendo

$$f_1(x, y) = \alpha(I) y \frac{\partial I}{\partial x} \quad f_2(x, y) = \alpha(I) y \frac{\partial I}{\partial y}$$

$$\lambda(I) = 0 \quad \mu'(I) = \alpha(I) (I - R_1^2) (I - R_2^2)$$

le (5) divengono entrambe

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} + \\ & + (I - R_1^2)(I - R_2^2) \left[\alpha(I) \frac{\partial I}{\partial x} + y \alpha(I) \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} + y \alpha'(I) \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} \right] + \\ & + y \alpha(I) (2I - R_1^2 - R_2^2) \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} . \end{aligned}$$

Ora debbo scegliere $\alpha(I)$ in modo che $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ non contengano più rispettivamente i termini

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

altrimenti troverei:

$$\rho = \frac{y}{2} \log(x^2 + y^2) + \dots\dots$$

e si perderebbe in φ il termine polidromo che voglio compaia.

Prendendo:

$$\alpha(I) = -\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{I^2}$$

e sostituendo nelle espressioni delle derivate prime di ρ ottengo

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left[-\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{I} - \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \right] y \frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial y} = & \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \left[-\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{I} - \right. \\ & \left. - \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \right] y \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} I + \frac{1}{2} \log I + \\ & + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \end{aligned}$$

da cui integrando

$$\rho = \frac{1}{2} y \log(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} y \log I - \frac{y}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right]$$

ossia:

$$\rho = \frac{1}{2} y \log \left\{ a^2 \left[\left(\alpha - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \right\} - \frac{y}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right]$$

Tale funzione soddisfa appunto alla condizione di essere biarmonica, con derivate rispetto ad x ed y regolari, nell'interno del corpo. L'asse di singolarità

$$x = \frac{1}{a} \qquad y = 0$$

è infatti esterno al corpo perchè è il luogo dei punti Q delle sezioni normali (vedi formole VI).

Ora debbo determinare una funzione armonica ψ tale che

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = \frac{1}{2} \Delta^2 \rho$$

essendo

$$\begin{aligned} \Delta^2 \rho = & \frac{2y}{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2} - \frac{4a}{R_1^2 + R_2^2} \frac{xy}{[x^2 + y^2]^2} - \\ & - \frac{4R_1^2 R_2^2}{a^3(R_1^2 + R_2^2)} \frac{\left(x - \frac{1}{a}\right)y}{\left[\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = & - \left(x - \frac{1}{a}\right) \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} - \frac{y}{2} \log \left[\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right] - \\ & - \frac{a}{R_1^2 + R_2^2} \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{R_1^2 R_2^2}{a^3(R_1^2 + R_2^2)} \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Ho quindi infine:

$$\Phi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[\frac{1}{4} y \log I - \frac{y}{4(R_1^2 + R_2^2)} \left(I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[x \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \left(x - \frac{1}{a}\right) \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} - \right. \\ & \left. - \frac{y}{2} \log I - \frac{a}{R_1^2 + R_2^2} \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{R_1^2 R_2^2}{a^3(R_1^2 + R_2^2)} \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} \right]. \end{aligned}$$

Determinate così Φ e φ dalle formole (I) del prof. Almansi, ho le componenti degli spostamenti, che risolvono il problema.

Nel caso che i due cilindri abbiano lo stesso asse,

$$I = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad R_1^2 = \frac{1}{r_1^2}, \quad R_2^2 = \frac{1}{r_2^2}$$

si ha quindi

$$\Phi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[-\frac{1}{4} y \log(x^2 + y^2) - \right. \\ \left. - \frac{r_1^2 r_2^2}{4(r_1^2 + r_2^2)} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{4(r_1^2 + r_2^2)} y(x^2 + y^2) \right]$$

da cui

$$\Delta^2 \Phi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2}{r_1^2 + r_2^2} y \right]$$

e poichè

$$(*) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[\operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{2}{r_1^2 + r_2^2} x y \right]$$

$$\varphi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[x \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \log(x^2 + y^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \left(y x^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \right]$$

φ risulta determinata dalla relazione (*) a meno di una espressione del tipo

$$C_1(y)x + C_2(y)$$

con $C_1(y)$ e $C_2(y)$ funzioni arbitrarie di y , mi servo di questa arbitrarietà per rendere φ , e nel modo più semplice, armonica.

Trovate Φ e φ applicando le formule (II) ho

$$u = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{L+K}{4(L+2K)} \left(r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r^2}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}$$

$$v = \frac{l}{2\pi} \left\{ -\frac{K}{2(L+2K)} \log r^2 - \frac{L+K}{4(L+2K)} \left(r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r^2}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{(L-K)y^2 + (3L+5K)x^2}{2(L+2K)(r_1^2 + r_2^2)} \right\}$$

$$w = 0.$$

II.° Problema

Suppongo ora, che eseguito nel cilindro in questione un taglio, che lo renda semplicemente connesso, con un semipiano uscente dall'asse delle z , si sposti l'una faccia del taglio parallelamente all'asse delle y , di m . Per determinare gli spostamenti, sempre nell'ipotesi che il cilindro sia soggetto a sole azioni sulle basi, debbo, analogamente a ciò che ho fatto per il problema precedente, determinare due funzioni φ e Φ che soddisfino alle varie condizioni stabilite dal prof. Almansi e di più tali che $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sia regolare, mentre

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{funzione monodroma} - \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \operatorname{artg} \frac{y}{x}$$

da cui

$$(2) \quad \varphi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{x}{2} \log(x^2 + y^2) + \psi \right\}$$

dove ψ è una funzione armonica [perchè tale deve essere φ] con derivate rispetto ad x ed y regolari nell'interno del cilindro in questione.

Dalla (2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}.$$

Ma φ deve essere tale che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$$

quindi

$$(4) \quad \Delta^2 \Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}$$

da cui

$$(5) \quad \Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{1}{4} x \log(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \rho \right\}$$

dove ρ è una funzione biarmonica, [perchè tale deve essere Φ]
tale che

$$\frac{1}{2} \Delta \rho = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Ora Φ deve avere derivate prime rispetto ad x e ad y
costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$. Dalla (5) ho

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{1}{4} \log(x^2 + y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^3}{2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{xy}{2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right.$$

Cercherò di soddisfare alla condizione esposta, determinando la funzione biarmonica ρ , in modo che si abbia

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \\ \quad + f_1(x, y) (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \lambda(I) \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{xy}{x^2 + y^2} + f_2(x, y) (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \mu(I) \end{array} \right.$$

dove $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\mu(I)$, $\lambda(I)$ sono simboli di funzioni per ora qualsiasi.

Perchè una tale funzione ρ esista occorre che coincidano le due espressioni della $\frac{\partial \rho}{\partial x \partial y}$ ricavate dalle due relazioni (7) ossia

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{2yx^2}{[x^2 + y^2]} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial f_1}{\partial y} (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \\ \quad + \left\{ f_1(x, y) [2I - R_1^2 - R_2^2] + \lambda'(I) \right\} \frac{\partial I}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2 y}{[x^2 + y^2]} + \frac{\partial f_2}{\partial x} (I - R_1^2) (I - R_2^2) + \\ \quad + \left\{ f_2(x, y) [2I - R_1^2 - R_2^2] + \mu'(I) \right\} \frac{\partial I}{\partial x} . \end{array} \right.$$

L'ispezione della forma di tali derivate seconde e l'opportunità di far sparire da esse alcuni termini, suggeriscono la scelta

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{x}{I^2} \frac{\partial I}{\partial x} \quad f_2(x, y) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{y}{I^2} \frac{\partial I}{\partial y}$$

$$\mu(I) = 0 \quad \lambda'(I) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[1 - \frac{R_1^2 + R_2^2}{I} + \frac{R_1^2 R_2^2}{I^2} \right]$$

in tal caso infatti, le due espressioni (8) coincidono nell'unica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = & \frac{2yx^2}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \left[\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{1}{2I} + \right. \\ & + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \left. \right] \left[x \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} - \frac{2x}{I} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} \right] + \\ & + \left[x \frac{\partial I}{\partial x} \left(\frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{I} - \frac{x}{2I} \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{1}{2I} + \right. \\ & + \left. \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I} \right] \frac{\partial I}{\partial x} \end{aligned}$$

mentre le derivate prime di ρ divengono:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} = & -\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \\ & + x \frac{\partial I}{\partial x} \left[\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{1}{2I} + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \right] + \\ & + \frac{I}{2(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{1}{2} \log I - \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I} \\ \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = & -\frac{xy}{x^2 + y^2} + \\ & + x \frac{\partial I}{\partial y} \left[\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{1}{2I} + \frac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \right] \end{aligned} \right.$$

da cui tenuto conto dell'espressione di I

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right\} - \frac{x \left(x - \frac{1}{a} \right)}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} + \\ &+ \frac{x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{\partial I}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{I^2} \right\} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{xy}{2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right]} + \\ &+ \frac{x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{\partial I}{\partial y} \left\{ 1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{I^2} \right\} . \end{aligned} \right.$$

Da queste con una integrazione ho

$$\rho = -\frac{x}{2} \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \frac{x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right\}$$

Ma tale funzione ρ non soddisfa che in parte alle condizioni volute dal problema; essa infatti sostituita nella (5) fa sì che $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ siano costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$ ma non è biarmonica per la comparsa del termine

$$-\frac{R_1^2 R_2^2}{2a^2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{x}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} .$$

Cercherò di rendere ρ biarmonica aggiungendo alcuni termini la cui somma soddisfi ancora alla proprietà di avere de-

rivate rispetto ad x e ad y costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$. Aggiungo intanto a ρ la funzione

$$- \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ I - (R_1^2 + R_2^2) \log I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right\}$$

che gode di questa proprietà. Allora

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho = & -\frac{x}{2} \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \\ & + \frac{(1-s)x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right] - \frac{s}{2a} \log I + \\ & + \frac{s \left(x - \frac{1}{a} \right)}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right] \end{aligned} \right.$$

la quale non è biarmonica per la comparsa dei termini

$$- \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{(1-s)(R_1^2 R_2^2)}{2a^2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{x}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2}$$

Elimino tale inconveniente aggiungendo la funzione

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu = & (x^2 + y^2) \left[c + \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} I^2 \right] + \\ & + \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \left[b + \frac{(1-s)a^3 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{I^2} \right] . \end{aligned} \right.$$

Ora però debbo determinare le costanti c, b, s , il cui valore è ancora in mio arbitrio, in modo che $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ siano costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$.

La funzione μ è della forma:

$$(13) \quad \mu = \varphi(I)(x^2 + y^2) + \psi(I) \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right]$$

e poichè

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= -\frac{2x}{x^2 + y^2} (I - a^2) - \frac{2a}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{2x}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} \left\{ \frac{I^2}{a^2} - I \right\} - \frac{2a}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} \frac{I}{a^2} \\ \frac{\partial I}{\partial y} &= -\frac{2y}{x^2 + y^2} (I - a^2) = \\ &= -\frac{2y}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} \left[\frac{I^2}{a^2} - I \right] \end{aligned} \right.$$

si ha

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} &= 2x \left\{ \varphi(I) + \psi(I) + \varphi'(I)(a^2 - I) + \right. \\ &\quad \left. + \psi'(I) \left(I - \frac{I^2}{a^2} \right) \right\} - \frac{2}{a} \psi(I) - 2a \varphi'(I) - \frac{2I}{a} \psi'(I) \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} &= 2y \left\{ \varphi(I) + \psi(I) + \varphi'(I)(a^2 - I) + \right. \\ &\quad \left. + \psi'(I) \left(I - \frac{I^2}{a^2} \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

tali due espressioni sono costanti sui due cilindri se per $I = R_1^2$, $I = R_2^2$

$$(16) \quad \varphi(I) + \psi(I) + \varphi'(I)(a^2 - I) + \psi'(I) \left(I - \frac{I^2}{a^2} \right) = 0.$$

Tale condizione applicata alla (12) dà le equazioni

$$(17) \left\{ \begin{aligned} c + b + \frac{as}{R_1^2 + R_2^2} R_1^2 - \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} R_1^4 - \\ - \frac{(1-s)a^3}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{(1-s)aR_2^2}{R_1^2 + R_2^2} = 0 \\ c + b + \frac{as}{R_1^2 + R_2^2} R_2^2 - \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} R_2^4 - \\ - \frac{(1-s)a^3}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{(1-s)aR_1^2}{R_1^2 + R_2^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

soddisfatte per

$$s = \frac{a^3 [a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2]}{R_1^2 R_2^2 [R_1^2 + R_2^2 - 2a] + a^3 [a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2]}$$

$$b = - \frac{1}{[R_1^2 + R_2^2]^2} \frac{a R_1^4 R_2^4 (R_1^2 + R_2^2 - 2a^2)}{R_1^2 R_2^2 [R_1^2 + R_2^2 - 2a^2] + a^3 [a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2]}$$

$$c = h \frac{R_1^6 (R_1^2 - 2a) - R_2^6 (R_2^2 - 2a)}{R_1^2 R_2^2 [R_1^2 + R_2^2 - 2a^2] + a^3 [a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2]}$$

dove

$$h = \frac{a [a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2]}{2(R_1^2 + R_2^2)(R_1^4 - R_2^4)} .$$

Tali valori dovrebbero sostituirsi nella funzione

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{m}{2\pi} \left\{ -\frac{x}{4} \log I + \frac{s}{4a} \log I + \right. \\ & + \frac{x - \frac{s}{a}}{4(R_1^2 + R_2^2)} \left(I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right) + \\ & + \frac{x^2 + y^2}{2} \left[c + \frac{sI^2}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \right] + \\ & \left. + \frac{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2}{2} \left[b + \frac{(1-s)a^3 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2) I^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si tratta ora di determinare la funzione armonica φ , tenendo conto della relazione

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Dalla (19) ho

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi = & \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{m}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \left[\left(\alpha - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right]}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \log (x^2 + y^2)}{\partial x} + 2c_1 + 2b_1 - \\ & - \frac{R_1^2 R_2^2 \left(s - \frac{1}{2} \right)}{a^3 (R_1^2 + R_2^2)} \frac{\partial^2 \log \left[\left(\alpha - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right]}{\partial x^2} + \frac{s a^3}{R_1^2 + R_2^2} + \\ & \left. + \frac{(1-s) R_1^2 R_2^2}{a (R_1^2 + R_2^2)} + \frac{a \left(s - \frac{1}{2} \right)}{2 (R_1^2 + R_2^2)} \frac{\partial^2 \log (x^2 + y^2)}{\partial x^2} \right\} \end{aligned}$$

quindi

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = & \frac{m}{2\pi} \frac{4K \cdot L + K}{L + 2K} \left\{ -y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + y \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} + \right. \\ & + \left[\frac{x}{2} + \frac{a \left(s - \frac{1}{2} \right)}{R_1^2 + R_2^2} \right] \log (x^2 + y^2) - \\ & - \left[\frac{x - \frac{1}{a}}{2} + \frac{R_1^2 R_2^2 \left(s - \frac{1}{2} \right)}{a^3 (R_1^2 + R_2^2)} \right] \log \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \\ & \left. + \left[c + b + \frac{sa^3}{2(R_1^2 + R_2^2)} + \frac{(1-s)R_1^2 R_2^2}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \right] (x^2 - y^2) \right\} . \end{aligned} \right.$$

Sostituendo nelle formole (I) del prof Almansi le funzioni Φ e φ date rispettivamente dalle formole (19) e (20) ho gli spostamenti che risolvono il problema propostomi.

*
* *

Per ricavare dalle trovate, formole particolari pel caso che i due cilindri limitanti il solido abbiano lo stesso asse, potrei come nel problema precedente, tener conto delle relazioni che si verificano in tal caso cioè

$$a = 0 \quad R_1^2 = \frac{1}{r_1^2} \quad R_2^2 = \frac{1}{r_2^2} \quad I = \frac{1}{x^2 + y^2} .$$

Le formole così trovate, data la simmetria del solido non differirebbero sostanzialmente da quelle ricavate in fine del precedente problema. Mi propongo ora di far vedere direttamente, come le formole dell'Almansi possano, abbastanza rapidamente, condurre alle formole risolutive di questo problema particolare [Formole già date, a pag. 465 della sua memoria

« Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes », dal prof. Volterra].

Il problema è ridotto al seguente: in un solido elastico isotropo, limitato fra due cilindri circolari concentrici di raggi r_1^2 , r_2^2 si eseguisce un taglio con un semipiano uscente dall'asse delle z , e si risalda dopo aver fatto subire all'una faccia di esso, rispetto all'altra, una traslazione infinitesima m secondo l'asse delle y ; studiare la deformazione del cilindro nell'ipotesi che esso sia soggetto a sole azioni sulle basi.

Per risolvere tale problema debbo determinare, come nei problemi precedenti, due funzioni Φ e φ che soddisfino alle condizioni stabilite dal prof. Almansi e di più tali che $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sia monodroma mentre

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{funzione monodroma} - \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \operatorname{artg} \frac{y}{x}.$$

Dalla (1) ho:

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{2} \log(x^2 + y^2) - y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \psi(x, y) \right\}$$

dove ψ è una funzione armonica e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ sono monodrome in tutto lo spazio occupato dal solido.

Se $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ho

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = \Delta^2 \Phi$$

da cui

$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{2} \log r + \frac{\rho}{2} \right\}$$

dove ρ è una funzione biarmonica tale che

$$\frac{1}{2} \Delta^2 \rho = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

ψ essendo armonica con derivate rispetto ad x e ad y monodrome.

Ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{1}{2} \log r + \frac{x}{2r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{xy}{2r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\}$$

debbono ridursi costanti per $r^2 = r_1^2$, $r^2 = r_2^2$, per soddisfare a questa condizione cerco una funzione ρ tale che

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{x^2}{r^2} + f_1(x, y)(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) + \beta(r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{xy}{r^2} + f_2(x, y)(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) + \lambda(r) .$$

Perchè la funzione ρ esista occorre che coincidano le due espressioni

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2 y}{r^4} + \frac{\partial f_1}{\partial y} (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) +$$

$$+ f_1(x, y) [4r^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)] \frac{y}{r} + \mu'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{r^2} + \frac{2x^2 y}{r^4} + \frac{\partial f_2}{\partial x} (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) +$$

$$+ f_2(x, y) [4r^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)] \frac{x}{r} + \lambda'(r) \frac{x}{r} .$$

Posso soddisfare in modo semplice a tale condizione, ponendo

$$f_1(x, y) = x^2 \alpha(r) \quad \frac{1}{r} \mu'(r) = \alpha(r)(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) - \frac{1}{r^2}$$

$$f_2(x, y) = xy \alpha(r) \quad \lambda(r) = 0$$

osservo ora che $\alpha(r)$ deve essere tale che $\beta'(r)$ non contenga più il termine $-\frac{1}{r}$ altrimenti $\beta(r)$ conterrebbe il termine $-\log r$ e ρ l'altro $-x \log r$ e risalendo a $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ si perderebbe il termine polidromo che voglio compaia. Di più debbo tener conto che ρ deve essere biarmonica.

Prendendo

$$\alpha(r) = -\frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^k}$$

ho

$$\beta'(r) = -\frac{1}{r_1^2 + r_2^2} r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^3}$$

quindi

$$\beta(r) = -\frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{r^2}{2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{2r^3} + C_1.$$

Sostituendo ad $\alpha(r)$ il valore $-\frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^k}$ nelle espressioni di $\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y}$ con una integrazione ho

$$\rho = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{x}{2r^2} - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{xy^2}{2} - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{x^3}{2} + c_1 x$$

ed è verificata la condizione $\Delta^2 \Delta^2 \rho = 0$. Trovato ρ ho per Φ l'espressione

$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{2} \log r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{x}{4r^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{xy^2}{4} - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \frac{x^3}{4} + cx \right\}$$

e poichè

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \Delta^2 \rho = -\frac{2}{r_1^2 + r_2^2} x$$

ho

$$\psi = -\frac{x^3}{3(r_1^2 + r_2^2)} + \theta(y)x + \zeta(y)$$

dove $\theta(y)$ e $\zeta(y)$ sono due funzioni qualsiasi di y . Ma ψ deve essere armonica, prendo quindi

$$\theta(y) = \frac{y^3}{r_1^2 + r_2^2} \quad \zeta(y) = 0$$

allora

$$\psi = -\frac{x^3}{3(r_1^2 + r_2^2)} + \frac{xy^3}{r_1^2 + r_2^2}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \varphi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ x \log r - y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{xy^3}{r_1^2 + r_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{x^3}{3(r_1^2 + r_2^2)} + c \right\}. \end{aligned}$$

Determinate Φ e φ dalle formole dell'Almansi ho:

$$\begin{aligned} u = \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(L+2K)(r_1^2 + r_2^2)} \left[(3L+5K)y^2 + (L-K)x^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \frac{m}{2\pi} \left\{ \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(r_1^2 + r_2^2)} xy \right\} \end{aligned}$$

$$w = 0.$$

III Problema.

Mi propongo ora lo studio della deformazione del cilindro elastico in questione, nell'ipotesi che, eseguito il taglio nel modo solito, si sia fatto subire all'una faccia di esso, una rotazione infinitesima r , intorno all'asse delle z .

Cercherò di determinare due funzioni Φ e φ soddisfacenti alle condizioni stabilite dal prof. Almansi e di più tali che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \text{funzione monodroma}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} x \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \text{funzione monodroma}.$$

Questo si verifica se per esempio

$$(1) \quad \varphi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ xy \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y^2 - x^2}{4} \log(x^2 + y^2) + \psi \right\}$$

dove ψ è una funzione armonica con derivate rispetto ad x ed y regolari. Dalla (1) ho

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = \Delta^2 \Phi.$$

Ora osservo che se fosse

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{8} \left\{ (x^2 + y^2) [c_1 + (1 - b_2) \log I] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] [b_1 + b_2 \log I] \right\} \end{aligned} \right.$$

Φ soddisfarebbe alla condizione di essere biarmonica ed il suo Δ^2 conterrebbe il termine

$$-\frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$$

ma in Φ comparirebbe anche il termine

$$\frac{2b_2}{a} x \log (x^2 + y^2)$$

il cui Δ^2 è

$$\frac{4b_2}{a} \frac{\partial \log (x^2 + y^2)}{\partial x}$$

e quindi poichè

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$$

ψ conterrebbe, moltiplicato per una costante, il termine

$$x \log (x^2 + y^2) - 2x - 2y \operatorname{artg} \frac{y}{x}$$

la cui derivata rispetto ad y non è regolare.

Posso eliminare tale inconveniente aggiungendo a Φ la funzione biarmonica (vedi problema precedente).

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{8} \left\{ \frac{2b_2}{a} x \log I - \frac{2b_2}{a(R_1^2 + R_2^2)} x \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2b_2 a^2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2}{I^2} \right\}. \end{aligned}$$

Allora si ha infine

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{8} \left\{ (x^2 + y^2) [c + (1 - b_2) \log I] + \right. \\ & + \frac{2b_2 x}{a} \log I + \\ & + \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \left[b_1 + b_2 \log I - \frac{2b_2 a^2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{I^2} \right] - \\ & \left. - \frac{2b_2 x}{a(R_1^2 + R_2^2)} \left[I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Ora debbo determinare b_1, b_2, c in modo che $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ siano costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$. Ora la somma dei termini in parentesi, si compone di due parti. L'una

$$\frac{2b_2 x}{a} \log I - \frac{2b_2 x}{a(R_1^2 + R_2^2)} \left(I - \frac{R_1^2 R_2^2}{I} \right) ,$$

ha già derivate rispetto ad x e ad y costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$, l'altra è della forma

$$(x^2 + y^2) \varphi(I) + \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \psi(I) .$$

Ho dato nel problema precedente la condizione perchè una tale funzione abbia derivate rispetto ad x ed y costanti per $I = R_1^2$ $I = R_2^2$; occorre che per questi valori di I sia

$$\dot{\varphi}(I) + \psi(I) + \varphi'(I)(a^2 - I) + \psi'(I) \left(I - \frac{I^2}{a^2} \right) = 0 .$$

Tale condizione, applicata alla speciale funzione in questione, dà le due equazioni

$$2b_2 + b_1 + c - 1 + \log R_1^2 - \frac{b_2}{a^2} R_1^2 - \frac{4b_2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_1^2} +$$

$$+ \frac{a^2(1 - b_2)}{R_1^2} + \frac{2b_2 a^2 R_1 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_1^4} = 0$$

$$2b_2 + b_1 + c - 1 + \log R_2^2 - \frac{b_2}{a^2} R_2^2 - \frac{4b_2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_2^2} +$$

$$+ \frac{a^2(1 - b_2)}{R_2^2} + \frac{2b_2 a R_1 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_2^4} = 0$$

soddisfatte da

$$b_1 = b_2 \frac{(R_1^2 + R_2^2) [R_1^2 + R_2^2 - 2a^2] + 2a^4}{a^2(R_1^2 + R_2^2)} + 1$$

$$b_2 = \frac{a^2(R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{R_1^2(R_2^2 \log R_1^2 - a^2) - R_2^2(R_1^2 \log R_2^2 - a^2)}{a^2[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2] + R_1^2 R_2^2 (R_1^2 + R_2^2 - 2a^2)}$$

$$c = \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Dalla (4) ho:

$$\begin{aligned} \Delta^3 \Phi = & \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{2} \left\{ c + b_1 + \log a^2 - \frac{2b_2 R_1^2 R_2^2}{a^2(R_1^2 + R_2^2)} + \right. \\ & + \log \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] - \log(x^2 + y^2) + \\ & + \frac{2}{a} \frac{x - \frac{1}{a}}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2} + \frac{b_2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log(x^2 + y^2)}{\partial x^2} - \\ & \left. - \frac{b_2 R_1^2 R_2^2}{a^2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{\partial^2 \log \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right]}{\partial x^2} \right\} \end{aligned}$$

e quindi poichè

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^3 \Phi$$

tenuto conto che φ deve essere armonica ho

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \varphi = & \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ xy \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \right. \\ & - \left(x - \frac{1}{a} \right) y \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} - y \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} + \\ & + \left[\frac{b_2}{2(R_1^2 + R_2^2)} + \frac{y^2 - x^2}{4} \right] \log(x^2 + y^2) + \\ & + \left[b_1 + c + \log a^2 - \frac{2b_2 R_1^2 R_2^2}{a^2(R_1^2 + R_2^2)} \right] \frac{x^2 - y^2}{4} + \\ & + \left[\frac{x - \frac{1}{a}}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2}{4} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{b_2 R_1^2 R_2^2}{2a^2(R_1^2 + R_2^2)} \right] \log \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Le formole dell'Almansi mi danno applicate alle funzioni (4) e (5) gli spostamenti cercati.

Nel caso particolare in cui i due cilindri circolari siano concentrici per risolvere il problema, secondo il metodo già seguito, e che le formole dell'Almansi suggeriscono, cercherò di determinare una funzione Φ soddisfacente alle varie condizioni necessarie e della forma

$$\Phi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} (x^2 + y^2) \left(b - \frac{1}{8} \log(x^2 + y^2) + \right. \\ \left. + c \frac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right).$$

Tale funzione si ottiene facendo, nella funzione analoga del problema ora risolto, $I = \frac{1}{x^2 + y^2}$, eguaglianza che si verifica appunto quando i due cilindri sono coassiali, b e c sono costanti che determinerò in modo che $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ siano costanti per $\sqrt{x^2 + y^2} = r_1$, $\sqrt{x^2 + y^2} = r_2$ (r_1 ed r_2 rappresentano, secondo le solite notazioni, i raggi dei due cilindri circolari).

Ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} 2x \left[b + \frac{c}{r^2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log(x^2 + y^2) \right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} 2y \left[b + \frac{c}{r^2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log(x^2 + y^2) \right]$$

bisogna quindi che b e c siano tali che

$$a - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log r_1^2 + \frac{c}{r_1^2} = 0$$

$$a - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log r_2^2 + \frac{c}{r_2^2} = 0.$$

Tali equazioni sono soddisfatte per

$$b = \frac{1}{8} \left\{ 1 + \frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\}$$

$$c = -\frac{r_1^2 r_2^2 \log r_1^2 - \log r_2^2}{8 \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2}}$$

quindi

$$\Phi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{8} \left\{ -r^2 \log r^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1 \right) r^2 - r_1^2 r_2^2 \frac{\log r_1^2 - \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \log r^2 \right\}$$

e

$$\Delta^2 \Phi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \frac{1}{2} \left\{ \frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - 1 - \log r^2 \right\}.$$

Poichè la funzione armonica φ , è tale che $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$ ho

$$\varphi = \frac{r}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ xy \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y^2 - x^2}{4} \log(x^2 + y^2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{2(r_2^2 - r_1^2)} \right) \frac{x^2 - y^2}{2} \right\}.$$

Applicando le formole dell'Almansi, ho quindi

$$u = \frac{r}{2\pi} \left\{ y \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{K}{2(L+2K)} x \log(x^2 + y^2) + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} r_1^2 r_2^2 \frac{\log r_1^2 - \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{x}{r^2} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{K}{L+2K} \frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{x}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
v = \frac{r}{2\pi} \Big\{ & -x \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{K}{2(L+2K)} y \log(x^2 + y^2) + \\
& + \frac{L+K}{2(L+2K)} r_1^2 r_2^2 \frac{\log r_1^2 - \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{y}{r^2} + \\
& + \left(1 + \frac{K}{L+2K} \frac{r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{y}{2} \Big\}
\end{aligned}$$

$$w = 0.$$

Tali formole trovansi già a pag. 417 della memoria « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes » del prof. Volterra.

*
* *

Mi propongo ora lo studio della deformazione di un cilindro elastico isotropo, due volte connesso, soggetto a sole azioni sulle basi, quando ad una faccia di un taglio (che lo renda semplicemente connesso) si faccia subire una rotazione intorno all'asse delle x o delle y . Mi servirò in questa ricerca, di alcuni risultati dati dal prof. Almansi nella sua nota « Sulle deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici » — *Rendiconti Istituto Lombardo* T. XL serie seconda.

In questa nota, il prof. Almansi dimostra che « se ci si propone di determinare lo stato più generale di deformazione di un cilindro nell'ipotesi che non agisca nessuna forza nè sugli elementi della massa, nè sugli elementi della superficie che limita lateralmente il corpo, si trova che le sei tensioni interne $\tau_{11}, \tau_{22}, \dots$ possono essere rappresentate da funzioni lineari rispetto alla variabile z . Da questa loro proprietà, si deduce che le sei tensioni interne risultano espresse dalle formole.

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} \tau_{11} = z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \tau_{31} = -\frac{L}{2(L+K)} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \tau_{22} = z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \tau_{32} = -\frac{L}{2(L+K)} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ \tau_{12} = -z \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \tau_{33} = -\frac{L}{2(L+K)} (z \Delta^2 U + \Delta^2 V) \end{array} \right.$$

dove U, V, W sono funzioni regolari biarmoniche, delle sole variabili x ed y . La U e la W sono legate dalle relazioni

$$\frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} = \frac{L+2K}{2(L+K)} \frac{\partial \Delta^2 U}{\partial y} \quad \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial y} = -\frac{L+2K}{2(L+K)} \frac{\partial \Delta^2 U}{\partial x}.$$

Sul contorno di una sezione σ e precisamente sulla linea s_i ($i = 1, 2, \dots, n$), deve essere

$$(II) \left\{ \begin{array}{ll} U = a_i x + b_i y + c_i & V = g_i x + h_i y + l_i \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial(a_i x + b_i y + c_i)}{\partial \nu} & \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial(g_i x + h_i y + l_i)}{\partial \nu} \\ & W = \frac{L}{2(L+K)} (a_i y - b_i x + K_i) \end{array} \right.$$

ove le a_i, b_i ecc. sono per la linea s_i delle costanti; ν denota la normale interna rispetto a σ .

Considero in un cilindro più volte connesso, riferito ad una terna di assi, di cui l'asse z parallelo alle generatrici gli spostamenti

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = z \left(-\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{L+2K}{4K(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ v = z \left(-\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{L+2K}{4K(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ w = w(x, y) \end{array} \right.$$

dove $\Phi(x, y)$ è una funzione biarmonica con derivate rispetto ad x ed y regolari nel solido e costanti sulle linee s_i , φ una funzione armonica tale che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi ,$$

$w(x, y)$ una funzione biarmonica, tale che

$$\Delta^2 w(x, y) = -\frac{1}{2K} \Delta^2 \Phi .$$

Tali spostamenti soddisfano alle equazioni dell'equilibrio per forze di massa nulle, ossia:

$$K \Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$K \Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

$$K \Delta^2 w + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 .$$

Se voglio poi che u, v, w corrispondano nel cilindro a tensioni superficiali nulle, sulle superficie cilindriche laterali,

occorre che le tensioni interne $\tau_{11}, \tau_{12}, \dots$ che sono funzioni lineari di z , soddisfino ad alcune condizioni date dal prof. Almansi; occorre che τ_{11}, \dots possano mettersi sotto la forma (I). Ora le tensioni corrispondenti agli spostamenti (III) sono

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \tau_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ & & & + \frac{L+2K}{4(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{22} &= z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \tau_{23} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \\ & & & - \frac{L+2K}{4(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K \frac{\partial w}{\partial y} \\ \tau_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \tau_{33} &= \frac{L}{2(L+K)} z \Delta^2 \Phi.\end{aligned}$$

Perchè quindi le tensioni, abbiano la forma (I), occorre e basta di determinare una funzione W biarmonica, tale che

$$(IV) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} &= K \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{K}{2(L+K)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{L+2K}{4(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial W}{\partial x} &= K \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{K}{2(L+K)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{L+2K}{4(L+K)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

se si tiene conto che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta^2 \Phi, \text{ che } \Delta^2 w = -\frac{1}{2K} \Delta^2 \Phi$$

si ha che è verificata la condizione

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$$

per l'integrabilità delle (IV) e le altre

$$\frac{\partial \Delta^2 W}{\partial x} = \frac{L + 2K}{2(L + K)} \frac{\partial \Delta^2 \Phi}{\partial y} \quad - \frac{\partial \Delta^2 W}{\partial y} = \frac{L + 2K}{2(L + K)} \frac{\partial \Delta^2 \Phi}{\partial x} .$$

La funzione $w(x, y)$ (componente verticale dello spostamento) oltre a soddisfare alla condizione $\Delta^2 w(x, y) = -\frac{1}{2K} \Delta^2 \Phi$ deve far sì che la funzione W determinata dalle (IV) abbia sulle linee s_i (contorno delle sezioni normali) la forma

$$W = \frac{L}{2(L + K)} (a_i y - b_i x + K_i) .$$

Applicherò quanto ho ora esposto, alla risoluzione del seguente problema: in un solido elastico, limitato fra due cilindri circolari aventi lo stesso asse, si eseguisce un taglio che lo renda semplicemente connesso, col piano xz , e si fa subire all'una faccia di esso una rotazione p intorno all'asse delle x , mi propongo la ricerca degli spostamenti (a meno di spostamenti regolari, dovuti ad azioni sulle basi del cilindro). Avrò risolto tale problema, se mi riuscirà di determinare le funzioni Φ, φ e w in modo che gli spostamenti (III) divengano

u = funzione monodroma

$$v = \frac{p}{2\pi} z \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \text{funzione monodroma}$$

$$w = -\frac{p}{2\pi} y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \text{funzione monodroma} .$$

Osservo che le funzioni [vedi Problema I°]

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{p}{2\pi} \frac{4K(L + K)}{L + 2K} \left\{ \frac{x}{2} \log r + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{x}{4r^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \frac{x r^2}{4} + \frac{L + 3K}{4(L + K)} x \right\} \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{p}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ x \log r - y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y^2 x}{R_1^2 + R_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{x^3}{3(R_1^2 + R_2^2)} \right\}$$

soddisfano a tutte le condizioni necessarie, e poichè

$$\Delta^2 w = -\frac{1}{2K} \Delta^2 \Phi = -\frac{p}{2\pi} \frac{2(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{R_1^2 + R_2^2} \right\} \\ w = -\frac{p}{2\pi} \left\{ y \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{K}{L+2K} x \log r - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{L+K}{L+2K} \frac{x r^2}{R_1^2 + R_2^2} + w_1 \right\}$$

con w_1 funzione armonica di x ed y .

Determinate Φ e φ , ho per le (IV).

$$-\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{p}{2\pi} \left\{ -K \frac{\partial w_1}{\partial y} - K \frac{xy}{r^2} + \frac{K^2}{L+2K} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{xy}{r^4} - \right. \\ \left. - K \frac{xy}{R_1^2 + R_2^2} \right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{p}{2\pi} \left\{ -K \frac{\partial w_1}{\partial x} + K \frac{y^2}{r^2} - \frac{K^2}{2(L+2K)} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{K^2}{L+2K} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{x^2}{r^4} + \frac{K}{2} \frac{3y^2 + x^2}{R_1^2 + R_2^2} + cK + K \log r + K \right\}$$

da cui

$$W = \frac{p}{2\pi} \left\{ Ky \log r + \frac{K^2}{2(L+2K)} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{y}{r^2} + \frac{K}{2} \frac{y r^2}{R_1^2 + R_2^2} - \right. \\ \left. - K \left[\frac{(L+3K)}{2(L+K)(L+2K)} \frac{K}{L+2K} - 1 \right] y + K\phi \right\}$$

dove ψ è una funzione armonica { certo determinabile poichè w_1 è armonica } tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

a me interessa di determinare ψ , in modo che sia per $r = R_1$, $r = R_2$

$$\Phi = a_i x + b_i y + c_i$$

$$W = \frac{L}{2(L+K)} (a_i y - b_i x + K_i)$$

ora Φ è della forma $\Phi = x \lambda(r)$ quindi $b_i = 0$ perciò ψ dovrà essere armonica e della forma $y \mu(r)$. Cerco di soddisfare a tale condizione ponendo $\psi = c_2 \frac{y}{r^2} + c_1 y$ e determinando opportunamente c_1 e c_2 . Essendo b_i nullo, resta solo da verificare la condizione che per $r = R_1$, $r = R_2$ siano eguali, a meno del fattore $\frac{L}{2(L+K)}$, i coefficienti di x ed y rispettivamente in Φ e W . Tale condizione porta a due equazioni in c_1 e c_2

$$2K \log R_1^2 + 2(L+K) \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} + 2(L+2K) \left(c_1 + \frac{c_2}{R_1^2} \right) + \\ + L + K + (K-L) \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} = 0$$

$$2K \log R_2^2 + 2(L+K) \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} + 2(L+2K) \left(c_1 + \frac{c_2}{R_2^2} \right) + \\ + L + K + (K-L) \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} = 0$$

soddisfatte da

$$c_1 = - \frac{K}{L+2K} \left\{ \frac{3L+K}{2} \frac{1}{K} + \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$c_2 = \frac{K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \left\{ \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right\}$$

$$\text{ora se} \quad \psi = c_1 y + c_2 \frac{y}{r^2} \quad w_1 = -c_1 x + c_2 \frac{x}{r^2}$$

gli spostamenti (III) divengono

$$u = \frac{pz}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} \left[(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2 \right] \right\}$$

$$v = \frac{pz}{2\pi} \left\{ \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}$$

$$w = -\frac{p}{2\pi} \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{p}{2\pi} x \frac{K}{L+2K} \left[\frac{3L+K}{2} \frac{1}{K} + \right. \\ \left. + \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \log r + \right. \\ \left. + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{L+K}{K} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} \right]$$

Tali formole furono trovate, con metodo diretto, dal professor Volterra e date a pag. 486 dalla sua memoria « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes ».

*
* *

Metterò in luce un'altra interpretazione, che si può dare alle formole risolutive dei problemi propostomi, relativamente al cilindro elastico due volte connesso, limitato fra due cilindri circolari non aventi lo stesso asse.

Considero un mezzo elastico isotropo, limitato tra due piani paralleli indefiniti ed avente in sè due cavità cilindriche circolari, con assi normali ai piani limitanti. Ho già detto come sia possibile, mediante una inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad un cerchio, mutare in una corona circolare il piano indefinito esterno a due circonferenze esterne l'una all'altra. Basta prendere come centro del cerchio di inversione, uno dei punti P e Q che dividono armonicamente le due coppie di punti in cui i due cerchi segano la congiungente i loro centri; i due punti P e Q risultano interni ciascuno ad una delle due circonferenze. Suppongo che le equazioni dei due cerchi inversi dei dati, rispetto al centro di inversione Q siano,

$$(x - a)^2 + y^2 = R_1^2 \qquad (x - a)^2 + y^2 = R_2^2 .$$

Sia ora il mezzo isotropo indefinito sopra detto, riferito ad una terna di cui l'asse z sia luogo dei punti Q delle sezioni normali, l'asse delle x sulla congiungente i centri di una sezione normale, l'asse luogo dei punti P è allora $x = \frac{1}{a}$ $y = 0$.

Nel mezzo indefinito in questione, considero gli spostamenti che risolvono il primo dei problemi propostomi.

Essi sono della forma:

$$u = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} + \text{funzione monodroma} \right\}$$

$$v = \text{funzione monodroma}$$

$$w = 0 .$$

u è quindi polidromo, con assi di diramazione

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{a} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

u aumenta di l dopo un giro in senso positivo intorno all'asse delle z , aumenta di l dopo un giro in senso negativo intorno all'asse

$$x = \frac{1}{a} \qquad y = 0$$

riprende lo stesso valore, dopo un giro intorno ad entrambi gli assi. Gli spostamenti u, v, w corrispondono a forze di massa nulle e tensioni superficiali, nulle sulle superficie cilindriche, aventi invece certe componenti T_x, T_y, T_z sui due piani indefiniti.

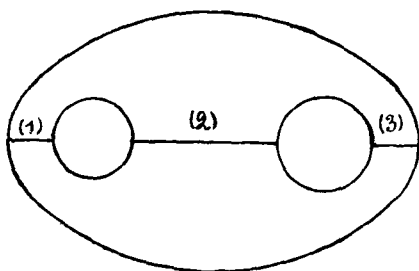
Un simile stato di deformazione si può, nel mezzo in questione, realizzare così: rendo il solido elastico semplicemente connesso mediante un taglio operato col piano dei due assi di diramazione, spostato poi l'una faccia del taglio, parallelamente all'asse x , di l . Nell'ipotesi che le basi piane siano sollecitate da forze T_x, T_y, T_z , i punti del solido subiscono spostamenti u, v, w secondo gli assi.

Una analoga interpretazione si può, per le stesse ragioni dare alle formole risolutive del secondo problema.

Sulle distorsioni nei corpi elastici cilindrici più di due volte connessi.

Considero un corpo elastico isotropo che occupi uno spazio cilindrico tre volte connesso. In esso posso eseguire, mediante piani paralleli alle generatrici del cilindro tagli di tre specie, rispettivamente trasformabili, con deformazione continua, o nel

taglio (1) o in quello (2) o in quello (3) rappresentati nella sezione riprodotta in figura



Riferisco tale spazio ad una terna di assi ortogonali di cui l'asse z sia parallelo alle generatrici del cilindro. Siano

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_1 \\ y = b_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a_2 \\ y = b_2 \end{array} \right.$$

due assi interni ciascuno ad una delle cavità cilindriche interne del solido. Considero in questo gli spostamenti

$$u = \frac{1}{2\pi} \left[(l - qz + ry) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(-m + ra_1 - pz - \frac{rK(x - a_1)}{L + 2K} \right) \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] \right]$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \left[(m - rx + pz) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(l + rb_1 - qz - \frac{rK(y - b_1)}{L + 2K} \right) \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] \right]$$

$$w = \frac{1}{2\pi} \left[(n - py + qx) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(p(x - a_1) + q(y - b_1) \right) \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] \right].$$

Tali spostamenti sono polidromi con asse di diramazione

$$x = a_1 \qquad y = b_1$$

ad essi corrisponde nel corpo una deformazione regolare (i sei coefficienti della deformazione sono infatti, poichè l'asse di singolarità $x = a_1$, $y = b_1$ è esterno al corpo, regolari) di più tali spostamenti (ottenuti da quelli dati a pag. 428 della sua memoria « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes » dal prof. Volterra, col cambiamento di x ed y in $x - a_1$, $y - b_1$) soddisfano alle equazioni della elasticità in assenza di forze di massa e corrispondono a tensioni superficiali T facilmente calcolabili. Ripetendo considerazioni fatte dal prof. Volterra, si vede che se u' , v' , w' sono le componenti degli spostamenti regolari che produrrebbe nel solido allo stato naturale l'applicazione delle tensioni superficiali T , gli spostamenti

$$u'' = u - u' \qquad v'' = v - v' \qquad w'' = w - w'$$

corrispondono a forze di massa e tensioni superficiali nulle e presentano la stessa polidromia di u, v, w . Ossia, partendo da un punto, e facendoli variare con continuità lungo un cammino chiuso tutto interno al solido, che torni al punto di partenza, circondando l'asse

$$x = a_1 \qquad y = b_1$$

u'', v'', w'' aumentano rispettivamente di

$$(II) \quad l - qz + ry, \quad m - rx + pz, \quad n - py + qx.$$

Lo stato di deformazione Γ'' corrispondente ad $u'' v'' w''$ può prodursi nel solido operando un taglio di specie (1) con piano passante per $x = a_1$, $y = b_1$ e spostando una faccia di esso (quella alla quale pervengo dopo un giro in senso positivo intorno all'asse) di uno spostamento rigido, di componenti (II).

Considero, nello stesso corpo, gli spostamenti seguenti:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2\pi} \left\{ (l - qz + ry) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(-m + ra_1 - pz - \frac{rK}{L + 2K} (x - a_1) \right) \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] + \\
 & + (l' - q'z + r'y) \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(-m' + r'a_2 - p'z - \frac{r'K}{L + 2K} (x - a_2) \right) \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] \right\} \\
 \\
 v = & \frac{1}{2\pi} \left\{ (m - rx + pz) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(l + rb_1 - qz - \frac{rK}{L + 2K} (y - b_1) \right) \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] + \\
 & + (m' - r'x + p'z) \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(l' + r'b_2 - q'z - \frac{r'K}{L + 2K} (y - b_2) \right) \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] \right\} \\
 \\
 w = & \frac{1}{2\pi} \left\{ (n - py + qx) \operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} [(x - a_1)p + (y - b_1)q] \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] + \\
 & + (n' - p'y + q'x) \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} [(x - a_2)p' + (y - b_2)q'] \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] \right\} .
 \end{aligned}
 \right\} \quad \text{(III)}
 \end{aligned}$$

Tali valori di u, v, w sono polidromi e precisamente aumentano di

$$l - qz + ry, \quad m - rx + pz, \quad n - py + qx$$

quando compio un giro (in senso positivo) intorno ad

$$x = a_1, \quad y = b_1$$

aumentano di

$$l' - q'z + r'y, \quad m' - r'x + p'z, \quad n' - p'y + q'x$$

quando compio un giro intorno ad

$$x = a_2, \quad y = b_2$$

aumentano di

$$l + l' - (q + q')z + (r + r')y, \quad m + m' - (r + r')x + (p + p')z,$$

$$n + n' - (p + p')y + (q + q')x$$

quando giro in senso positivo intorno ad entrambi gli assi di singolarità. Indico con u'', v'', w'' al solito, gli spostamenti che presentano la stessa polidroma di u, v, w e corrispondono a forze di massa e tensioni superficiali nulle. Io posso produrre tale stato di deformazione Γ'' così: nel solido allo stato naturale, eseguisco un taglio di specie (1) con piano passante per

$$x = a_1, \quad y = b_1$$

e fo subire all'una faccia (quella a cui arrivo dopo un giro in senso positivo intorno ad $x = a_1, y = b_1$) lo spostamento rigido di componenti

$$l - qz + ry, \quad m - rx + pz, \quad n - py + qx$$

e risaldo, faccio poi un taglio di specie (3) con piano passante per

$$x = a_2, \quad y = b_2$$

e fo subire ad una faccia di esso (quella che incontro dopo un giro in senso positivo intorno ad $x = a_2$ $y = b_2$) lo spostamento rigido di componenti

$$l' = q'z + r'y, \quad m' = r'x + p'z, \quad n' = p'y + q'x$$

e risaldo.

Considero ora il caso particolare che nelle (III) sia

$$l + l' = m + m' = n + n' = r + r' = p + p' = q + q' = 0.$$

Io posso, come precedentemente ho esposto, ottenere lo stato di deformazione I'' , facendo subire alle facce doi tagli (1) e (3), fatti con piani passanti per i due assi, che incontro rispettivamente dopo un giro, in senso positivo, intorno ad $x = a_1$ $y = b_1$ ed un giro in senso negativo intorno ad $x = a_2$ $y = b_2$ lo spostamento rigido di componenti

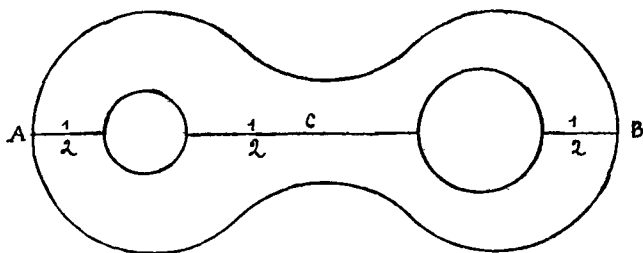
$$l = qz + ry, \quad m = rx + pz, \quad n = py + qx.$$

Per esempio se la figura rappresenta la sezione normale del solido, io posso realizzare lo stato di deformazione corrispondente ad u'' , v'' , w'' spostamento di

$$l = qz + ry, \quad m = rx + pz, \quad n = py + qx$$

parallelamente gli assi la faccia (2) del taglio B_1 e quella (2) del taglio A_2 .

Ma osservo che in questo caso particolare u'' , v'' , w'' sono polidromi quando giro intorno all'uno o all'altro degli assi di



singularità ma non quando giro intorno ad entrambi. Se considero un punto sulla faccia (2) del taglio c e torno al punto a contatto lungo il taglio con un giro intorno all'uno o all'altro dei due assi di singularità, u'' , v'' , w'' aumentano di

$$(II) \quad l - qz + ry, \quad m - rx + pz, \quad n - py + qx$$

quindi io posso raggiungere lo stato di deformazione corrispondente ad u'' , v'' , w'' eseguendo il taglio c col piano dei due assi e spostando la faccia (1) di uno spostamento rigido di componenti (II).

Tornando ora alle (III) io posso scriverle nella forma

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\pi} \left[(l - qz + ry) \left(\operatorname{artg} \frac{y - b_1}{x - a_1} - \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} \right) + \right. \\ & + (l + l' - (q + q')z + (r + r')y) \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(-m + ra_1 - pz - \frac{rK}{L + 2K} (x - a_1) \right) + \log [(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2] - \\ & - \frac{1}{2} \left(-m' + r'a_2 - p'z - r' \frac{K(x - a_2)}{L + 2K} \right) \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left(-m - m' + (r + r')a_2 - (p + p')z - \frac{(r + r')K(x - a_2)}{L + 2K} \right) \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] \end{aligned}$$

$$v = \dots\dots\dots$$

$$w = \dots\dots\dots$$

Da cui si vede che posso arrivare allo stato di deformazione corrispondente ad u'' , v'' , w'' oltre che nel modo già esposto anche così: eseguisco il taglio c ed in esso la distorsione di componenti l , m , n , p , q , r poi un taglio (B) con piano passante per $x = a_2$, $y = b_2$ ed in esso la distorsione di componenti; $l + l'$, $m + m'$, $n + n'$, $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$. Ovvero opero nel taglio c la distorsione

$$-l', -m', -n', -p', -q', -r'$$

ed in un taglio (A) (con piano passante per $x = a_i$, $y = b_i$) la distorsione $l + l'$, $m + m'$, $n + n'$, $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$.

Considero ora un cilindro $n + 1$ volte connesso, un cilindro cioè, che presenti n cavità cilindriche interne in ognuna delle quali considero un asse $x = a_i$, $y = b_i$. Considero in tale solido cilindrico gli spostamenti (soddisfacenti alle equazioni dell'equilibrio elastico e corrispondenti a deformazione regolare)

$$\begin{aligned}
 (LV) \quad \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left[(l_i - q_i z + r_i y) \operatorname{artg} \frac{y - b_i}{x - a_i} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left(-m_i + r_i a_i - p_i z - \frac{r_i K}{L + 2K} (x - a_i) \right) \log [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2] \Big] \\
 v &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left[(m_i - r_i x + p_i z) \operatorname{artg} \frac{y - b_i}{x - a_i} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left(l_i + r_i b_i - q_i z - \frac{r_i K}{L + 2K} (y - b_i) \right) \log [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2] \Big] \\
 w &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left[(n_i - p_i y + q_i x) \operatorname{artg} \frac{y - b_i}{x - a_i} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left(p_i (x - a_i) + q_i (y - b_i) \right) \log [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2] \Big]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

in questo caso u'' , v'' , w'' aumentano di

$$l_i - q_i z + r_i y, m_i - r_i x + p_i z, n_i - p_i y + q_i x$$

quando giro intorno ad $x = a_i$, $y = b_i$ con una linea chiusa che non circonda nessuno degli altri assi di diramazione, aumentano di

$$\sum_{i=1}^n (l_i - q_i z + r_i y), \quad \sum_{i=1}^n (m_i - r_i x + p_i z), \quad \sum_{i=1}^n (n_i - p_i y + q_i x)$$

quando giro intorno a tutti gli assi di singolarità.

Un tale stato di deformazione posso ottenere facendo subire ad una faccia di ogni taglio s_i che congiunga l'asse

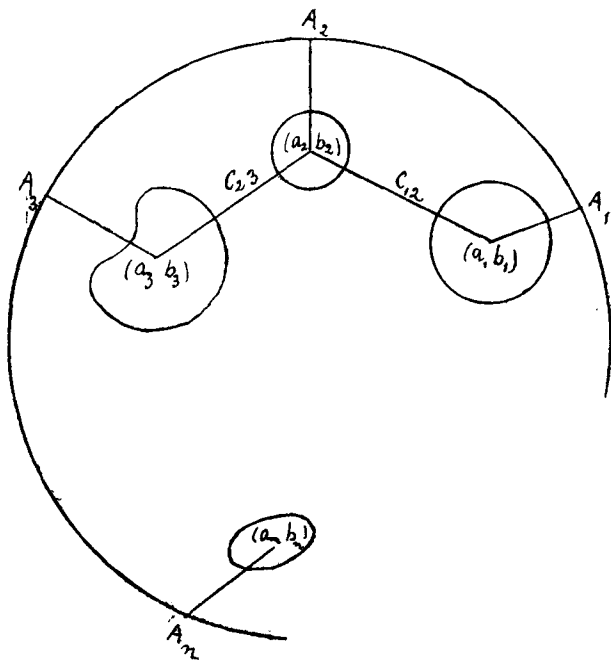
$$x = a_i \qquad y = b_i$$

col contorno esterno unó spostamento rigido di componenti

$$l_i - q_i z + r_i y, \quad m_i - r_i x + p_i z, \quad n_i - p_i y + q_i x$$

oppure eseguendo distorsioni convenienti nei tagli che congiungono le varie cavità interne fra loro come si vede applicando una o più volte le considerazioni di equivalenza delle distorsioni fatte in tagli diversi, esposte nel caso di un corpo cilindrico tre volte connesso.

In particolare se $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n n_i = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n r_i = 0$ io posso raggiungere lo stato di deformazione corrispondente ad u'', v'', w'' mediante distorsioni eseguite nei soli tagli che congiungono le varie cavità interne fra loro.



Infatti nelle sommatorie sopra scritte comincio dal considerare le somme dei primi due termini u_{12}, v_{12}, w_{12} . Io posso rag-

giungere lo stato di deformazione corrispondente ad $u''_{13}, v''_{13}, w''_{13}$ mediante la distorsione di componenti $l_1, m_1, n_1, p_1, q_1, r_1$ eseguita nel taglio c_{11} e la distorsione $l_1 + l_2, \dots, r_1 + r_2$ eseguita in A_1 .

Considero ora gli spostamenti

$$\begin{aligned}
 u_{13} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ [l_1 + l_2 - (q_1 + q_2)z + (r_1 + r_2)y] \operatorname{artg} \frac{y - b_2}{x - a_2} + \right. \\
 & (l_3 - q_3z + r_3y) \operatorname{artg} \frac{y - b_3}{x - a_3} + \\
 & -m_1 - m_2 + (r_1 + r_2)a_2 - (p_1 + p_2)z - \frac{(r_1 + r_2)K}{L + 2K} (x - a_2) \Big] \log [(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2] + \\
 & \left. -m_3 + r_3a_3 - p_3z - \frac{r_3K(x - a_3)}{L + 2K} \right] \log [(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2] \Big\} \\
 v_{13} = & \dots \dots \dots \\
 w_{13} = & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Io posso raggiungere lo stato di deformazione $u''_{13}, v''_{13}, w''_{13}$ eseguendo la distorsione $l_1 + l_2, m_1 + m_2, \dots, r_1 + r_2$ in c_{13} e quella $l_1 + l_2 + l_3, \dots, r_1 + r_2 + r_3$ in $A_3 \dots$

Considero infine i termini

$$\begin{aligned}
 u_{n-1,n} = & \frac{1}{2\pi} \left[\left(\sum_1^{n-1} l_i - \sum_1^{n-1} q_i z + \sum_1^{n-1} r_i y \right) \operatorname{artg} \frac{y - b_{n-1}}{x - a_{n-1}} + \right. \\
 & l_n - q_n z + r_n y) \operatorname{artg} \frac{y - b_n}{x - a_n} + \\
 & \sum_1^{n-1} \left(-m_i + a_{n-1} r_i - z p_i - \frac{K r_i}{L + 2K} (x - a_{n-1}) \right) \log [(x - a_{n-1})^2 + (y - b_{n-1})^2] + \\
 & \left. \left(-m_n + a_n r_n - z p_n - \frac{K r_n}{L + 2K} (x - a_n) \right) \log [(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2] \right]
 \end{aligned}$$

$$v_{n-1,n} = \dots$$

$$w_{n-1,n} = \dots'$$

io posso raggiungere lo stato di deformazione

$$u''_{n-1,n}, v''_{n-1,n}, w''_{n-1,n}$$

mediante la distorsione $\sum_1^{n-1} l_i, \sum_1^{n-1} m_i, \dots, \sum_1^{n-1} r_i$ eseguita in $c_{n-1,n}$ e l'altra $\sum_1^n l_i, \dots, \sum_1^n r_i$ eseguita in A_n , ma questa è nulla

Dunque l'insieme delle distorsioni in $c_{12}, c_{23}, \dots, c_{n-1,n}$ produce la deformazione corrispondente ad u'', v'', w'' .
