

SUI SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI DI WEINGARTEN;

Nota di **Luigi Bianchi**, in Pisa.

 Adunanza dell'11 febbrajo 1894.

Nelle mie memorie sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie colla medesima curvatura costante [sistemi di Weingarten (*)] ho studiato specialmente il caso in cui la curvatura è negativa e, per questo caso, giovandomi delle note trasformazioni delle superficie pseudosferiche, ho dato il modo di dedurre da un sistema noto di Weingarten infiniti nuovi sistemi di questa specie. Ma la esistenza, in generale, di questi sistemi restava soltanto basata sopra considerazioni infinitesimali d'indole piuttosto indicativa che dimostrativa. Essendomi ora nuovamente occupato, per la redazione del mio libro (**), di questo problema, mi è riuscito di dimostrare rigorosamente il teorema d'esistenza tanto nel caso della curvatura negativa come in quello della curvatura positiva, riportandolo al teorema fondamentale di Cauchy relativo alla esistenza degli integrali di un'equazione a derivate parziali.

In questa Nota darò rapidamente la dimostrazione accennata, considerando appunto il caso, che restava quasi escluso dalle mie antiche ricerche, della curvatura positiva. Da ultimo farò conoscere due singolari teoremi relativi ai sistemi di Weingarten pseudosferici.

 (*) Veggasi specialmente la memoria nel t. XIII degli *Annali di matematica*.

 (**) *Lezioni di Geometria differenziale*. Pisa, 1894.

I.

Supponiamo che sia (u, v, w) un sistema triplo ortogonale di Weingarten, nel quale le superficie $w = \text{cost.}$ siano a curvatura costante *positiva* K e facciamo per semplicità

$$K = +1.$$

L'elemento lineare ds dello spazio assumerà la forma caratteristica

$$(1) \quad ds^2 = \cosh^2 \theta du^2 + \sinh^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2,$$

essendo θ una funzione di u, v, w che soddisfa alla equazione a derivate parziali del 2° ordine

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \sinh \theta \cosh \theta = 0$$

e alle tre del 3° ordine

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u^2 \partial w} = \operatorname{tgh} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} - \operatorname{coth} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} - \cosh^2 \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v \partial w} = \operatorname{tgh} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \operatorname{coth} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^3 \theta}{\partial v^2 \partial w} = \operatorname{coth} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} - \operatorname{tgh} \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} - \sinh^2 \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w}, \end{array} \right.$$

delle quali l'ultima viene conservata solo per ragione di simmetria, risultando già dalla prima delle (3) e dalla (2), derivata rapporto a w . A queste equazioni (3) potremmo bensì sostituire l'unica di 2° ordine

$$\left(\frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 = F(w),$$

indicando con $F(w)$ una funzione della sola w , che cangiando il parametro w possiamo anzi fare semplicemente $= 1$, cioè :

$$(3^*) \quad \left(\frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 = 1.$$

Ma pel nostro scopo è più utile operare colle (3), a causa della loro forma lineare nelle derivate. Viceversa, se $\theta(u, v, w)$ soddisfa le (2), (3) [ovvero le (2), (3*)], l'elemento lineare (1) appartiene ad un sistema triplo ortogonale di Weingarten.

Il sistema di equazioni simultanee (2), (3) gode della proprietà, fondamentale per le considerazioni seguenti, di essere un *sistema completo* nel senso che le equazioni, che se ne traggono per derivazione, non introducono alcuna nuova relazione fra le derivate che figurano nelle (2), (3).

Il metodo che passo ad esporre è fondato sulla ricerca delle proprietà di una individuata superficie del sistema u o v . Fissata una tale superficie S_0 , per es. la $v = 0$, il sistema di Weingarten, ove esista, è individuato poichè ogni superficie $w = \text{cost.}$, a curvatura costante $K = +1$, deve tagliare la S_0 ortogonalmente lungo una linea di curvatura $w = \text{cost.}$

Ora, pel teorema fondamentale di Cauchy, una superficie a curvatura $K = +1$ è determinata quando ne sia data *una striscia*, cioè una curva per la quale debba passare e lungo di essa i piani tangenti (*).

II.

Indicando con S_0 la superficie $v = 0$ e ponendo

$$\theta(u, 0, w) = \theta_0,$$

(*) Vedi Goursat, *Équations aux dérivées partielles*, pag. 22.

Cfr. anche Bäcklund, *Om ytor med konstant negativ krökning* (Lunds Univ. Arsskrift, t. XIX, 1883).

per l'elemento lineare di S_0 , riferito alle linee di curvatura u, w , avremo

$$(4) \quad ds_0^2 = \cosh^2 \theta_0 du^2 + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 dw^2.$$

Se poniamo poi

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)_{v=0} = \psi(u, w),$$

le due prime (3), facendovi $v=0$, danno fra θ_0 e ψ le relazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial u^2 \partial w} = \operatorname{tgh} \theta_0 \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial u \partial w} - \coth \theta_0 \cdot \psi \frac{\partial \psi}{\partial w} - \cosh^2 \theta_0 \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial w} = \operatorname{tgh} \theta_0 \cdot \psi \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial u \partial w} + \coth \theta_0 \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{cases}$$

e ad una di queste potrebbe anche sostituirsi l'altra

$$(5^*) \quad \left(\frac{1}{\cosh \theta_0} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial u \partial w} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sinh \theta_0} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 = 1.$$

Viceversa, se le funzioni

$$\theta_0(u, w), \quad \psi(u, w)$$

soddisfano le (5), esisterà una corrispondente superficie S_0 , che riferita alle linee di curvatura u, w ha l'elemento lineare (4) e i cui raggi principali di curvatura sono dati dalle formole

$$r_2 = \frac{\cosh \theta_0}{\psi}, \quad r_1 = \frac{\sinh \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial w}}{\frac{\partial \psi}{\partial w}}.$$

E infatti, soddisfatte le (5), risultano verificate le equazioni fondamentali di Gauss e di Codazzi.

La ricerca delle superficie S_0 dipende, in generale, da un'equazione alle derivate parziali *quarte*, che si formerebbe facilmente eliminando ψ dalle (5), (5*).

Queste superficie S_0 godono della singolare proprietà geometrica seguente, che il lettore potrà facilmente verificare. Tiriamo le tangenti alle linee di curvatura $u = \text{cost.}$ e sopra ciascuna di esse stacciamo, a partire dal punto di contatto nell'uno o nell'altro verso, un segmento $= 1$. Il luogo degli estremi è una nuova superficie S'_0 , sulla quale due linee qualunque $w = \text{cost.}$ staccano su tutte le linee $u = \text{cost.}$ archi eguali.

È interessante osservare che un piano od una sfera si può in infiniti modi considerare come una superficie S_0 , che cioè esistono infiniti sistemi ortogonali di linee sul piano e sulla sfera, dotati della proprietà descritta.

Se si fa infatti $\psi = 0$, la S_0 risulta un piano e per determinare θ_0 abbiamo l'equazione a derivate parziali *del 2° ordine*

$$(6) \quad \left(\frac{1}{\cosh \theta_0} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial u \partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 = 1.$$

Se vogliamo che la S_0 sia una sfera di raggio a , facciamo

$$\psi = -\frac{1}{a} \cosh \theta_0$$

ed avremo nuovamente, per determinare θ_0 , l'equazione a derivate parziali del 2° ordine

$$\left(\frac{1}{\cosh \theta_0} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial u \partial w} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 = 1.$$

III.

Supponiamo di conoscere una superficie S_0 del n° precedente. Dico allora che: *Se per ogni linea di curvatura $w = \text{cost.}$ della S_0 si fa passare una superficie Σ a curvatura $K = +1$, che tagli ortogonalmente la S_0 , le Σ apparterranno ad un sistema di Weingarten.*

Basterà per ciò provare che esiste una funzione $\theta(u, v, w)$, che soddisfa alle equazioni (2) e (3) ed insieme alle condizioni iniziali

$$(A) \quad \theta = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \psi, \quad \text{per } v = 0.$$

Ora, il teorema generale di Cauchy (*) ci assicura che *esiste un integrale θ della (2), che soddisfa alle condizioni iniziali (A)*. Resta da dimostrare che questa funzione θ soddisfa altresì le (3).

Intanto le (3) risulteranno certamente soddisfatte dalla nostra funzione θ per $v = 0$, poichè, a causa delle condizioni iniziali (A), esse si riducono precisamente per tale sostituzione alle (5), che supponiamo soddisfatte.

Ora se costruiamo le tre equazioni che risultano derivando ciascuna delle (3) una volta rapporto a v e sostituendo alle derivate terze i valori (3) stessi, vediamo subito che esse sono nuovamente soddisfatte per $v = 0$. E infatti la prima di queste tre nuove equazioni risulta dalla 2^a delle (5) derivata rapporto ad u . La seconda si ottiene anche derivando la 3^a delle (3), che per $v = 0$ abbiamo vista soddisfatta, rapporto a u e la terza in fine non è che una combinazione delle precedenti. Così continuando, si vedrà facilmente che se formando le successive derivate delle (3) rapporto a v fino alle n^{me} esse sono tutte soddisfatte per $v = 0$ lo stesso accadrà per una derivazione successiva rapporto a v . Ne risulta che la θ soddisfa per $v = 0$ le (3) e tutte le equazioni che se ne deducono, derivando rapporto a v .

Dunque: *La soluzione θ della (2), individuata, secondo il teorema di Cauchy, dalle condizioni iniziali (A), soddisfa anche le (3), per tutti i valori di u, v, w e però definisce il sistema triplo ortogonale di Weingarten richiesto.*

IV.

Le considerazioni precedenti si applicano egualmente al caso dei sistemi di Weingarten *pseudosferici*. Qui l'elemento lineare dello

(*) Cfr. p. e. Goursat, l. c., pag. 23.

spazio prende la forma caratteristica

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2.$$

Se consideriamo una speciale superficie S_0 del sistema u , p. e. la $u=0$, ponendo

$$\theta(0, v, w) = \theta_0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)_{u=0} = \psi,$$

avremo, con notazioni analoghe a quelle del n° 2:

$$(7) \quad ds_0^2 = \sin^2 \theta_0 dv^2 + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 dw^2$$

$$(8) \quad r_1 = \frac{\cos \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial w}}{\frac{\partial \psi}{\partial w}}, \quad r_2 = \frac{\sin \theta_0}{\psi},$$

dove θ_0 e ψ soddisfano le equazioni simultanee

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial v^2 \partial w} = \cot \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial v \partial w} - \operatorname{tg} \theta_0 \cdot \psi \frac{\partial \psi}{\partial w} + \sin^2 \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} = \cot \theta_0 \cdot \psi \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial v \partial w} - \operatorname{tg} \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial w}, \end{cases}$$

ad una delle quali possiamo sostituire l'altra

$$(9^*) \quad \left(\frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial v \partial w} \right)^2 + \left(\frac{1}{\cos \theta_0} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial w} \right)^2 = \text{cost.}$$

Se vogliamo che la superficie S_0 sia una sfera di raggio $= 1$ (essendo $K = -1$ la curvatura delle superficie pseudosferiche) dovremo fare, per le (8), $\psi = \sin \theta_0$ ed avremo per determinare θ_0 l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial v \partial w} = C \sin \theta_0 \quad (C \text{ costante}).$$

Se C è zero, si può fare

$$\theta_0 = V + w,$$

essendo V funzione arbitraria di v , onde

$$ds_0^2 = dw^2 + \sin^2(V + w) dv^2,$$

che è la forma geodetica dell'elemento lineare sferico. Se C non è zero, si può fare senza alterare la generalità $C = 1$ e le linee sferiche $v = \text{cost.}$ sono allora le indicatrici sferiche delle tangenti per le assintotiche di un sistema di una superficie pseudosferica. Per ottenere dunque tutti i sistemi tripli ortogonali pseudosferici, a curvatura $K = -1$, nei quali fra le superficie ortogonali alle pseudosferiche figura una sfera di raggio $= 1$, abbiamo le due costruzioni seguenti.

1^a. Si consideri sulla sfera un sistema arbitrario di linee L geodeticamente parallele e per ciascuna linea L si conduca la superficie pseudosferica Σ di raggio 1 ortogonale alla sfera. Le superficie Σ così costruite appartengono ad un sistema di *Weingarten*.

2^a. Presa una superficie pseudosferica arbitraria S ($K = -1$), si costruiscano sulla sfera di raggio $= 1$ le linee L' indicatrici sferiche delle tangenti per le assintotiche di un sistema di S e se ne traccino le traiettorie ortogonali L . Ripetendo per le nuove linee L la costruzione precedente, si avrà ancora un sistema di *Weingarten*.

È da notarsi che colla prima costruzione si ottiene un sistema ciclico di *Ribaucour*, cioè le curve traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche sono circoli di raggio $= 1$. L'esistenza di questi sistemi speciali poteva anche dedursi da teoremi già noti.

Pisa, gennaio 1894.

LUIGI BIANCHI.
