X. Bemerkung zu zwei Aufsätzen von Hertz und Aulinger über einen Gegenstand der Electrodynamik[1]; von H. Lorberg in Strassburg.

§ 1. In einem vor einiger Zeit veröffentlichten Aufsatze hat Hertz[2]) den Nachweis zu liefern versucht, dass die bekannten in einem Magnetfelde wirksamen ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte durch eine unendliche Reihe neuer Kräfte zu ergänzen seien. Die Betrachtung, von welcher er dabei ausgeht, ist im wesentlichen folgende.

Es seien u, v, w die Componenten im Magnetfelde vorhandener geschlossener electrischer Ströme;

$$(1)\qquad U_1 = \int \frac{u'}{r}\, d\tau', \qquad V_1 = \int \frac{v'}{r}\, d\tau', \qquad W_1 = \int \frac{w'}{r}\, d\tau'$$

die Componenten ihres Vectorpotentials. In jedem Punkt des Magnetfeldes wirkt dann eine Kraft auf einen Magnetpol 1 („Magnetkraft") mit den Componenten:

$$(2)\qquad X_1 = A\left(\frac{d V_1}{d z} - \frac{d W_1}{d y}\right) \text{ etc.,}$$

und aus der Form dieser Componenten folgt, dass dieselben die Differentialquotienten eines Potentials sind, nämlich des Potentials einer durch den Strom begrenzten magnetischen Doppelschicht; aus der Identität der Resultirenden der ponderomotorischen Kräfte auf einen unendlich kleinen electrischen Strom mit der Resultirenden der Kräfte auf ein magnetisches Molecül nach dem Ampère'schen Princip folgt dann weiter, dass auch die Componenten und Drehungsmomente der gesammten ponderomotorischen Kraft auf einen electrischen Strom ein Potential besitzen. Aus der Existenz eines solchen Potentials folgt aber nach dem Princip der Energie, dass eine Aenderung des Vectorpotentials in jedem Punkte des Magnetfeldes eine electromotorische Kraft mit den Componenten:

$$(3)\qquad E_x = -A^2 \frac{d U_1}{d t} \text{ etc.}$$

1) Hertz, Wied. Ann. **23.** p. 84. 1884 u. Aulinger, **27.** p. 119. 1886.

2) Hertz, Wied. Ann. **23.** p. 84. 1884.

hervorruft. Dieselbe electromotorische Kraft kann aber auch durch die Veränderung magnetischer Momente λ, μ, ν hervorgebracht werden, z. B. durch geschlossene lineare Magnetringe, in denen die Aenderungen $d\lambda/dt$, $d\mu/dt$, $d\nu/dt$ stattfinden, und welche Hertz „magnetische Ströme" nennt. Andererseits aber sind die Componenten der electromotorischen Kraft solcher Magnetströme, wenn wir:

$$(4) \qquad U_2 = -\int \frac{d\lambda'}{dt}\frac{d\tau'}{r} \text{ etc.}$$

setzen, bekanntlich gegeben durch:

$$(5) \qquad E_x = A\left(\frac{dV_2}{dz} - \frac{dW_2}{dy}\right) \text{ etc.,}$$

und da sie hiernach die Form (2) von Magnetkräften haben, so lassen sie sich analog als die Differentialquotienten des Potentials von durch die Magnetringe begrenzten electrischen Doppelschichten darstellen. Dasselbe muss also auch für die electromotorischen Kräfte (3) gelten, welche von veränderlichen electrischen Strömen herrühren. So weit enthält die Erörterung nur bekannte Sätze; wie man sieht, spielen in dieser Schlussweise die von Hertz eingeführten „Magnetströme" keine weitere Rolle, als dass sie auf den Gedanken führen, dass die electromotorischen Kräfte (3) sich in jedem Falle in die Form (5) müssen bringen lassen; das liegt aber ohne weiteres auf der Hand, da aus der Voraussetzung, dass nur geschlossene Ströme vorkommen, die Gleichung:

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = 0$$

folgt, und da drei ganz beliebige dieser Gleichung genügende Functionen U_1, V_1, W_1 sich in der Form (5) darstellen lassen. Wir können daher in den weiteren Schlüssen, wie es auch Hertz thut, diese „Magnetströme" und die Frage, ob sie wie electrische Ströme auch ponderomotorische Kräfte auf einander ausüben, ganz bei Seite lassen. Die weitere Schlussweise von Hertz ist nun kurz folgende:

„Die Magnetkräfte (2) auf einen electrischen Strom besitzen ein Potential; eine Aenderung dieses Potentials gibt nach dem Princip der Energie electrische Kräfte von der Form (3) oder (5). Diese electrischen Kräfte (5) besitzen aber wieder ein Potential; eine Aenderung dieses Potentials muss also nach demselben Princip, nach welchem sich aus den Magnetkräften (2) die electrischen Kräfte (3) ergeben, eine Magnetkraft mit den Componenten:

$$X_2 = -A^2 \frac{dU_2}{dt} \text{ etc.} \tag{6}$$

hervorrufen, sodass also die ganze Magnetkraft in einem veränderlichen Magnetfelde $X = X_1 + X_2$ ist." Dieser Schluss nun scheint mir durchaus unzulässig. Nämlich daraus, dass die Resultirende der Kräfte auf eine magnetische Doppelschicht, also auch die Resultirende der ponderomotorischen Kräfte auf einen electrischen Strom ein Potential besitzt, folgt allerdings, dass auch die — im rein mathematischen Sinne genommene — Resultirende der Kräfte veränderlicher Ströme auf eine electrische Doppelschicht ein Potential besitzt; aber dieses Potential hat durchaus keine analoge Bedeutung, wie das magnetische Potential, es scheint mir im Gegentheil gar keine physikalische Bedeutung zu besitzen. weil jene electrischen Kräfte electromotorische, nicht ponderomotorische sind, also auch nicht wie an einem starren System wirkende Kräfte zu einer Resultirenden, d. h. einer ponderomotorischen Kraft, zusammengesetzt werden können. Die an einem linearen Stromkreise wirkenden electromotorischen Kräfte lassen sich allerdings, ungeachtet ihrer verschiedenen Richtung, zu einer Summe vereinigen; diese Summe hat aber nicht die Bedeutung einer ponderomotorischen, sondern wieder die einer electromotorischen Kraft, nämlich des Mittelwerthes, von welchem die inducirte Stromstärke abhängt. Aber was für einen physikalischen Sinn soll man mit dem Ausdruck „Resultirende der an einer electrischen Doppelfläche im Innern eines Leiters wirkenden Kräfte" verbinden? Schon die zwei Kräfte an einem electrischen Molecül (das Wort im rein mathematischen Sinne, analog einem magnetischen Molecül, genommen), lassen sich nicht zu einer Summe vereinigen, falls es sich nicht um ein Diëlectrium handelt. Dass ein electrischer Strom oder ein Magnet ponderomotorisch wirkt, lässt sich nicht aus blossen auf Magnetpole wirkenden Kräften erklären, sondern nur durch Zuhülfenahme der weiteren Hypothese, dass je zwei entgegengesetzte Pole fest miteinander verbunden sind, und dass deshalb die zwei magnetomotorischen Kräfte sich zu einer Resultirenden, einer ponderomotorischen Kraft zusammensetzen, mit einem Wort, dass ein Magnet wirklich aus magnetischen Polpaaren oder Molecülen besteht, und dass ein von einem electrischen Strom durchflossener Leiter als von ähnlicher Beschaffenheit angenommen werden kann; eine electrische Doppelschicht dagegen im Sinne von Hertz ist eine blosse mathematische Fiction, der nach unseren bisherigen Erfahrungen, welche uns im Innern eines Leiters nur electromotorische, keine ponderomotorischen Kräfte, nur unbeschränkt bewegliche electrische Pole, aber keine electrischen Molecüle kennen lehrt, nichts Reales entspricht. Dieser fundamentale Unterschied — nicht zwischen den electrischen und magnetischen Kräften an und für sich, sondern zwischen ihrer Beziehung zu dem ponderabeln Medium — lässt sich durch kein Princip der Identität electrischer und magnetischer Kräfte beseitigen; wenigstens würde man mit einer derartigen Hypothese den Boden der bisherigen Anschauungen und Erfahrungen, auf welchem Hertz sich zu bewegen behauptet, völlig verlassen. Damit fällt dann die ganze Analogie zwischen einer electrischen und einer magnetischen Doppelschicht, so weit sie hier in Betracht kommt; eine Bewegung einer solchen electrischen Doppelschicht absorbirt, da an ihr keine ponderomotorischen Kräfte wirken, keine mechanische Arbeit, es kann also daraus auch nicht nach dem Princip der Energie auf eine compensirende Arbeit neuer Kräfte geschlossen werden.

Selbstverständlich sollte durch die vorstehende Erörterung nur das Unzulängliche der Hertz'schen Schlussweise, nicht etwa die Unrichtigkeit der von ihm abgeleiteten Resultate nachgewiesen, oder das Fruchtbringende des von ihm eingeschlagenen Weges, aus der blossen formalen Uebereinstimmung physikalischer Gesetze Vermuthungsschlüsse über analoge Folgerungen zu ziehen, bestritten werden; indessen, so interessant auch das von ihm gefundene Resultat, dass aus seinen Zusatzkräften sich eine Fortpflanzung des Vectorpotentials und seiner Aenderungen mit der Lichtgeschwindigkeit ergeben würde, unstreitig ist, so scheint mir doch aus den vorstehenden Erörterungen hervorzugehen, dass dieses Resultat vorläufig nur die Bedeutung einer rein mathematischen Speculation beanspruchen kann, ähnlich wie die zu dem gleichen Resultat führenden Versuche von Riemann, C. Neumann u. a.

§ 2. Obwohl, wie sich aus dem Vorstehenden ergibt, die Hertz'sche Schlussweise von der Frage nach der Existenz einer ponderomotorischen Kraft zwischen zwei veränderlichen Magnetströmen („verschwindenden Magnetringen") unabhängig ist, so würde doch umgekehrt aus der Richtigkeit dieser Schlussweise sich die Existenz einer solchen Kraft ergeben. Aulinger [1]) hat nun den Nachweis einer solchen Kraft auf folgendes Princip gründen zu können geglaubt:

„Ist in jedem Punkt eines Raumes die electrostatische und die magnetische Kraft bestimmt, oder (indem man die Magnetpole durch electrische Ströme ersetzt) die Kraft auf ruhende und auf mit constanter Geschwindigkeit bewegte Electricität, so sind in diesem Raum alle electrischen und magnetischen Kräfte bestimmt." Die electromotorischen Kräfte eines verschwindenden Magnetringes r sind nach § 1 die Differentialquotienten des Potentials einer durch den Ring begrenzten electrischen Doppelschicht d (bestehend aus zwei entgegengesetzt electrischen Flächen d_1, d_2). Ist nun in dem Raum noch eine zweite electrische Doppelschicht δ vorhanden, so ersetzt Aulinger die auf die einzelnen electrischen Pole von δ_1 und δ_2 wirkenden electrostatischen Kräfte durch ihre Resultirende, welcher er eine reale Existenz zuschreibt und „die von r auf δ ausgeübte Kraft" nennt. Ebenso gross ist die Resultirende der von δ auf d_1 und d_2 ausgeübten Kräfte; schreibt man dieser consequenter Weise ebenfalls eine reale Existenz zu und betrachtet sie als eine auf r ausgeübte Kraft, so folgt natürlich, dass auch ein an Stelle von δ gesetzter verschwindender Magnetring ϱ dieselbe (pondero-

1) Aulinger, Wied. Ann. 27. p. 119. 1886.

motorische) Kraft auf r ausübt. Wie man sieht, ist für diesen Schluss das oben erwähnte, von Aulinger aufgestellte Princip gar nicht nöthig; der Rest des Aulinger'schen Schlusses: „die von δ und ϱ in jedem Punkt ausgeübte electrostatische Kraft ist dieselbe, die Magnetkraft beidemal gleich Null, also ist auch die gesammte Kraft auf r in beiden Fällen dieselbe", ist vollkommen überflüssig. Der Angelpunkt des Schlusses liegt vielmehr in der von ihm, ebenso wie von Hertz, stillschweigend hinzugefügten Hypothese einer nicht blos mathematischen, sondern physikalischen Bedeutung jener Resultirenden; dass aber diese Hypothese in unseren gegenwärtigen Anschauungen und Erfahrungen keine ausreichende Begründung findet, habe ich in § 1 zu zeigen gesucht.

Beiläufig will ich noch bemerken, dass das Drehungsmoment, welches nach dem Weber'schen Grundgesetz eine gleichförmig electrostatisch geladene Kugel auf einen in ihrem Innern befindlichen, von einem veränderlichen Strom durchflossenen Leiter ausübt, und welches Aulinger nur unter der Voraussetzung berechnet, dass der Leiter ein Kreis ist, und dass sein Radius und seine Mittelpunktscoordinaten gegen den Kugelradius klein sind, sich mit Leichtigkeit allgemein und streng ableiten lässt. Es sei $d\sigma'$ das Flächenelement der Kugel, e' ihre constante Flächendichtigkeit, $e\,ds$ die positive Electricitätsmenge des Leiters auf dem Flächenelement ds, r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'). Dann ist die x-Componente der von e' auf e ausgeübten Kraft nach dem Weber'schen Grundgesetz:

$$X = e e' ds\, d\sigma' \frac{dr}{dx}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{16}\left(\frac{2}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right].$$

Ist nun v die Strömungsgeschwindigkeit der positiven Electricität, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = v\frac{dr}{ds}, \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds},$$

also die Summe der auf die positive und negative Electricität von ds ausgeübten Kräfte:

$$K_x = \frac{a^2}{4} e' d\sigma' e\, ds \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx},$$

oder da $2ev = i$ ist:

$$(1)\quad K_x = \frac{a^2}{8}\frac{di}{dt}e'd\sigma'ds\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx} = \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}d\sigma'ds\left[\frac{1}{r}\frac{dx}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{dx}\right)\right].$$

Die Summe der von der ganzen Kugel auf den ganzen geschlossenen Leiter ausgeübten Kraftcomponenten ist also:

$$(2)\qquad X = \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}\int\frac{dx}{ds}ds\int\frac{d\sigma'}{r} = 0,$$

da im Innern der Kugel:

$$\int\frac{d\sigma'}{r} = \text{Const.}$$

ist. Das Drehungsmoment der Kräfte K um die x-Axe ist:

$$D_x = yK_z - zK_y = \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}d\sigma'ds\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\left(y\frac{dr}{dz} - z\frac{dr}{dy}\right)$$
$$= \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}d\sigma'ds\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\left(y'\frac{dr}{dz} - z'\frac{dr}{dy}\right),$$

oder mittelst derselben Umformung, wie in (1):

$$D_x = \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}d\sigma'ds\left[\frac{y'}{r}\frac{dz}{ds} - \frac{z'}{r}\frac{dy}{ds} - y'\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{dz}\right) + z'\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{dy}\right)\right].$$

Hiernach ist das Drehungsmoment der ganzen Kugel auf den ganzen Leiter:

$$\Delta_x = \frac{a^2}{8}e'\frac{di}{dt}\left[\int\frac{dz}{ds}ds\int\frac{y'}{r}d\sigma' - \int\frac{dy}{ds}ds\int\frac{z'}{r}d\sigma'\right].$$

Um die Integration über die Kugelfläche auszuführen, führen wir Kugelcoordinaten (R, ϑ, ψ) und (R', ϑ', ψ') mit dem Kugelmittelpunkt als Anfangspunkt ein; nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Kugelfunctionen ist dann:

$$\frac{1}{r} = {}^n\sum\frac{R^n}{R'^{n+1}}P^n(\cos\gamma),$$

und wenn $R'h'$ irgend eine der Coordinaten (x', y', z'), Rh die entsprechende der Coordinaten (x, y, z) bezeichnet, nach der Fundamentaleigenschaft der Kugelfunctionen:

$$R'\int\frac{h'}{r}d\sigma' = R'\,{}^n\sum\frac{R^n}{R'^{n-1}}\int_0^{2\pi}d\psi'\int_0^{\pi}h'P^n(\cos\gamma)\sin\vartheta'd\vartheta' = \frac{4\pi}{3}R'Rh.$$

Dadurch wird:

$$(3)\quad \Delta_x = \frac{\pi a^2}{6} e' \frac{di}{dt} R' \int \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) ds, \quad \text{analog } \Delta_y \text{ und } \Delta_z.$$

Nehmen wir mit Aulinger den Leiter als einen Kreis vom Radius ϱ an, legen die y-Axe senkrecht auf die Kreisebene, die xy-Ebene durch den Mittelpunkt des Kreises und setzen:

$$x = x_0 + \varrho \cos \varphi, \qquad y = y_0, \qquad z = \varrho \sin \varphi,$$

so wird:

$$\int \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) ds = \int \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) ds = 0,$$

$$\int \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) ds = -2\pi \varrho^2,$$

also, wenn wir die ganze Ladung der Kugel mit E bezeichnen:

$$\Delta_x = \Delta_z = 0, \qquad \Delta_y = -\frac{\pi}{12} a^2 E \frac{di}{dt} \frac{\varrho^2}{R'},$$

was mit der Formel von Aulinger übereinstimmt.

Strassburg, 6. März 1886.

XI. *Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln;* *von G. Kirchhoff.*

(Aus den Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vom 12. Nov. 1886, mitgetheilt vom Hrn. Verfasser).

Die Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln ist ein Problem, dessen Lösung von Poisson[1]) gegeben und später von anderen auf verschiedenen Wegen abgeleitet ist. Von hervorragendem Interesse bei demselben ist die Ermittelung der Electricitätsmengen, welche die Kugeln enthalten, und der Kraft, mit der sie anziehend oder abstossend aufeinander wirken, wenn die Potentialwerthe in ihnen gegeben sind.

Es seien a und b die Radien der beiden Kugeln, c der Abstand ihrer Mittelpunkte, g, h die Potentialwerthe in ihnen,

1) Poisson, Mém. de l'Institut de France, **12.** (1) p. 1; (2) p. 163. 1811.