

SULLA INTEGRABILITÀ DELLE CONDIZIONI DI ROTOLAMENTO DI UN CORPO SOLIDO SOPRA UN ALTRO, E SU QUALCHE QUESTIONE GEOMETRICA CHE VI È CONNESSA.

Memoria di **M. Gebbia**, in Palermo.

Adunanza del 9 aprile 1905.

INTRODUZIONE.

Pare che il sig. C. NEUMANN sia stato il primo a rilevare che le equazioni differenziali esprimenti la condizione di rotolamento di un corpo solido sopra un altro costituiscono un sistema generalmente non integrabile *). Questa scoperta venne a turbare alquanto l'ordine delle idee della meccanica classica, la quale ritenne sempre un legame qualunque, che ostacoli il libero movimento relativo dei corpi, potersi esprimere per una o più equazioni in termini finiti. Oggidì quest'ordine può dirsi ristabilito con l'importante distinzione dei sistemi materiali in *olonomi* e *non olonomi* concepita da HERTZ, e quello costituito da due corpi solidi rotolanti l'uno sull'altro costituisce il più semplice ed intuitivo esempio di sistemi non olonomi.

Richiamata l'attenzione degli studiosi su questa materia, essa è stata oggetto di altri varii lavori, fra i quali primeggia per la completezza della trattazione la memoria del VIERKANDT, *Ueber gleitende und rollende Bewegung* **). Degna di particolar menzione è la memoria del sig. HADAMARD, *Sur les mouvements de roulement* ***) intesa a studiare a

*) C. NEUMANN, *Grundzüge der analytischen Mechanik* [Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, XL (1888), pp. 22-88.

**) Monatshefte für Mathematik und Physik, III. Jahrg. (1892), pp. 31-54, 97-116.

***) Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, IV^e série, t. V (1895), pp. 397-417.

fondo il fatto, che ai sistemi non olonomi non si applicano senza modificazione le equazioni dinamiche della seconda forma di LAGRANGE. Questa memoria è riportata nella recente monografia del sig. APPELL, *Les mouvements de roulement en Dynamique* *), che racchiude in breve e magistrale esposizione quanto fino al 1899 si era fatto su questo argomento, il quale non è a mia conoscenza che sia stato ulteriormente illustrato da posteriori pubblicazioni.

Leggendo tutti gl'indicati scritti, ho provato l'impressione che il modo, come vi si trova affermato il fatto che le equazioni differenziali esprimenti la condizione di rotolamento non sono integrabili, non sia mai chiaro nè esauriente. Il VIERKANDT dice che esse sono « *come si vede*, equazioni differenziali, che non possono riguardarsi come ottenute per derivazione da equazioni finite ». Questa evidenza non vi è. Il sig. APPELL osserva che il primo membro ($= 0$) di ciascuna di queste equazioni « non è in generale un differenziale esatto e non ammette fattore integrante » ma non dà sviluppo alla restrizione racchiusa nell'espressione *in generale*. Il sig. HADAMARD afferma poi senz'altro che queste equazioni a differenziali totali sono « non integrabili ». Ciò che di oscuro ed incompleto si nota in queste espressioni lascia trasparire nei loro autori la convinzione, che il difetto d'integrabilità, di cui si tratta, non sussista in modo assoluto.

Ed infatti non mancano le condizioni o i casi d'integrabilità. Già il sig. HADAMARD nello stesso citato lavoro ne rileva uno, cioè quello in cui, essendo impedita la componente normale della rotazione istantanea, le due superficie abbiano la medesima curvatura costante **). Un altro caso d'integrabilità più generale del precedente, e che non credo sia stato avvertito, ma che scorga con facilità dalle conoscenze attuali, è quello in cui, con qualche restrizione, le anzidette superficie a curvatura costante siano sostituite da due superficie generalmente applicabili. Fu scoperto da RIBAUCCOUR che, quando in un moto a due parametri i due assi di possibili rotazioni semplici, la cui esistenza costituisce il teorema di SCHÖNEMANN e MANNHEIM, sono reali e concorrenti, i luoghi del punto di concorso o centro istantaneo nel corpo e nello spazio costituiscono due superficie applicabili, ed il movimento finito procede in modo, che l'asse istantaneo sta sempre nel piano tangente comune a queste due superficie,

*) Nella collezione *Scientia*, 1899.

**) Op. cit., n° 14.

le quali rotolano l'una sull'altra in guisa, che i punti del loro successivo contatto si corrispondono nell'applicabilità *). Or non è difficile prevedere che le equazioni in termini finiti, che stabiliscono la corrispondenza d'applicabilità, sono allora integrali delle equazioni differenziali del rotolamento.

Questo intanto mi par certo, che uno studio sistematico ed esauriente della eventuale integrabilità delle equazioni del rotolamento, fatto alla scorta della teoria dei sistemi d'equazioni a differenziali totali, non sia stato finora intrapreso; ed in questa certezza mi conferma il convincimento, che un autore della competenza ed erudizione del sig. APPELL non avrebbe mancato di farne menzione; ond'è che, tentando io nel presente lavoro uno studio siffatto, credo, salvo illusione, di far cosa utile ed opportuna.

Dimostrerò in primo luogo facilmente che, prese le equazioni differenziali isolatamente, cioè senz'altre restrizioni, la loro integrabilità non si avvera mai. Affermato questo punto, mi avvalgo del noto concetto, che le soluzioni possibili dei sistemi d'equazioni a differenziali totali non soddisfacenti le condizioni d'integrabilità debbono cercarsi completando il sistema con altre equazioni, sia parimenti differenziali sia in termini finiti, il che nel problema meccanico equivale all'aggiunzione di altri legami a quello consistente nel rotolamento **). Con l'aggiunzione di un solo legame (intendo di una sola equazione di condizione) tanto questo che i coefficienti delle equazioni del rotolamento, cioè la natura geometrica delle due superficie, debbono possedere requisiti derivanti dalle condizioni d'integrabilità dell'intero sistema. Pervengo alla conclusione che il legame aggiunto deve consistere nell'essere impedito il *giramento* (*pivotement* dei francesi); ma in quanto alla natura delle superficie interviene una importante distinzione. Se vogliamo che si avveri la integrabilità illimitata (*complète* dei francesi, *unbeschränkte* dei tedeschi), occorre che le due superficie abbiano la medesima curvatura costante, ed è que-

*) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Parte I, Capitolo VII; Parte IV, Capitolo VI.

**) Di questo concetto trovasi una lucida esposizione nel *Treatise on Differential Equations* del FORSYTH pel caso di una sola equazione a differenziali totali con tre o più variabili (§ 154 della cit. op.). Il sig. FROBENIUS nella sua memoria « *Ueber das PLAFFsche Problem* » lo applica allo studio delle soluzioni, che può ammettere un sistema *non completo* d'equazioni lineari a differenziali totali [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXII (1877), pp. 230-315 (p. 287)].

sto il caso considerato dal sig. HADAMARD. Però si può richiedere che le condizioni d'integrabilità siano soddisfatte, non identicamente, ma come conseguenza del sistema integrale, che si presuma esistere, e, sviluppando le condizioni necessarie e sufficienti perchè ciò avvenga, concludo che bisogna e basta che le due superficie siano generalmente applicabili, cioè che si tratti del movimento studiato dal RIBAUCOUR. Pare che questo caso sia sfuggito al sig. HADAMARD. È curioso il fatto, che la condizione meno restrittiva per la natura delle due superficie, cioè quella dell'applicabilità generale, si associ ad un modo quasi eccezionale di sussistenza delle condizioni d'integrabilità.

Dall'analisi, che svolgerò in questa trattazione sarò condotto a considerare un modo particolare di riferire le due superficie applicabili a rispettive coordinate curvilinee, col quale le equazioni integrali, a cui conduce il metodo da me adottato, assumono una forma più semplice. Sebbene questo caso abbia nella presente quistione un'importanza secondaria, pure l'esame di esso mi conduce indirettamente ad un teorema sulla teoria generale delle superficie, che credo nuovo, e che mi sembra poter esser fecondo di conseguenze importanti per la geometria differenziale.

Con l'aggiunzione di due legami il sistema di equazioni a differenziali totali diventa a derivate ordinarie, onde l'integrabilità è sempre illimitata, sicchè null'altro parrebbe doversi aggiungere. Non pertanto ho voluto fare uno studio del caso, che i due legami aggiunti consistano in un riferimento punto a punto delle due superficie rotolanti, per rammentarvi qualche considerazione, che mi sembra notevole. Mi spiego che questo problema, al quale conduce il presente ordine d'idee, non trovisi, ch'io mi sappia, studiato, col fatto che nessun fenomeno fisico e nessun congegno cinematico si conosce, che suggerisca una siffatta maniera di legami, ond'esso non costituisce per sè stesso che un esercizio di meccanica analitica. La circostanza essenziale si è che allora il rotolamento non può avvenire, se non per curve, delle quali sulle due superficie si svolga la stessa lunghezza d'arco. Queste curve sono ben note in cartografia col nome di *curve isoperimetriche*, per cui nella mia considerazione non vi sarebbe, se mai, altro di nuovo, che l'applicazione ch'esse ricevono ad una quistione cinematica. Però, consultando anche magistrali trattati di cartografia *), non ho trovato studiati i luoghi singolari asso-

*) TISSOT, *Mémoire sur la représentation des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, 1881; FIORINI, *Le proiezioni delle carte geografiche*, Bologna, Zanichelli, 1881.

ciati alle equazioni differenziali di queste curve, la conoscenza dei quali è indispensabile per intuire l'andamento di esse e per conseguenza del moto di rotolamento che vi si riferisce. È perciò che ho voluto dedicare a questo studio l'ultimo paragrafo del presente scritto.

§ 1.

Formazione delle equazioni differenziali del rotolamento.

Esse da sole non sono integrabili.

1. Siano stabilite sulle superficie dei due corpi rotolanti l'uno sull'altro due sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, che siano u, v per una di esse ed u', v' per l'altra, sicchè le espressioni dei rispettivi archi elementari siano

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + G dv^2, \\ ds'^2 &= E' du'^2 + G' dv'^2. \end{aligned}$$

Immaginiamo che il contatto attuale delle due superficie avvenga pei rispettivi punti (u, v) , (u', v') , ed in questa posizione sia θ l'angolo, che la tangente positiva alla curva u' ($= \text{cost.}$) forma con la tangente positiva alla curva u . Volendo stabilire le condizioni affinchè il moto infinitesimo relativo sia un rotolamento senza strisciamento, basta pensare che gli archi elementari delle due superficie compresi fra gli anzi-detti punti del contatto attuale e quelli $(u + du, v + dv)$, $(u' + du', v' + dv')$ del contatto infinitamente prossimo debbono avere la stessa lunghezza. Le proiezioni di questi archi sul piano tangente comune potranno pure riguardarsi come uguali fra loro ed agli archi stessi, trascurando infinitesimi del 3° ordine. Portiamo dunque queste proiezioni in coincidenza mediante una rotazione intorno alla normale attuale comune, che, se il moto, come supponiamo, è continuo, sarà infinitesima, e che denotiamo con ε , non importando qui conoscerne l'espressione. La seconda estremità del segmento, che risulta da questa sovrapposizione, avrà per coordinate rispetto alle tangenti positive alle curve u, v , scelti come un primo sistema di assi ortogonali di riferimento, gli archi elementari ds_u, ds_v di queste due curve e rispetto alle tangenti positive alle curve u', v' scelti come un secondo sistema, i rispettivi archi elementari ds'_u, ds'_v . Questi due sistemi di assi, entrambi giacenti sul piano tangente comune e con l'origine comune, formano l'angolo $\theta + \varepsilon$, e si ha quindi (supponendoli anche congruenti):

$$\begin{aligned} ds'_u &= ds_u \cos(\theta + \varepsilon) + ds_v \sin(\theta + \varepsilon) \\ ds'_v &= -ds_u \sin(\theta + \varepsilon) + ds_v \cos(\theta + \varepsilon). \end{aligned}$$

Poichè altronde

$$\begin{aligned} ds_u &= \sqrt{G} dv, & ds_v &= \sqrt{E} du, \\ ds'_u &= \sqrt{G'} dv', & ds'_v &= \sqrt{E'} du', \end{aligned}$$

trascurando nelle precedenti equazioni gl'infinitesimi del 2° ordine, se ne ottengono le chieste condizioni di rotolamento, cioè

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{E'} du' = \sqrt{E} \cos \theta du - \sqrt{G} \sin \theta dv, \\ \sqrt{G'} dv' = \sqrt{E} \sin \theta du + \sqrt{G} \cos \theta dv. \end{cases}$$

Elevando a quadrato e sommando queste equazioni, risulta, com'è naturale, la condizione presunta

$$ds^2 = ds'^2 *).$$

2. Le (1) costituiscono un sistema di due equazioni a differenziali totali fra le cinque variabili u, v, u', v', θ , di cui vogliamo studiare le condizioni d'integrabilità. A tal uopo è comodo cangiare la notazione in una di quelle, che comunemente si adottano nella teoria di siffatti sistemi, cioè porre

$$u = x_1, \quad v = x_2, \quad \theta = x_3, \quad u' = x_4, \quad v' = x_5,$$

onde scriviamo le (1) così:

$$(1)^* \quad \begin{cases} dx_4 = a'_1 dx_1 + a'_2 dx_2 + a'_3 dx_3, \\ dx_5 = a_2 dx_1 + a_2^2 dx_2 + a_2^3 dx_3, \end{cases}$$

dove

$$(2) \quad \begin{cases} a'_1 = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta, & a'_2 = -\sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta, \\ a_1 = \sqrt{\frac{E}{G}} \sin \theta, & a_2 = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta, \end{cases}$$

*) Con lo stesso metodo si possono dedurre le condizioni di rotolamento in coordinate curvilinee qualunque, che non mi è occorso d'incontrare, e che, con le solite notazioni, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{\sqrt{G'}} du' &= \frac{H \cos \theta - F \sin \theta}{\sqrt{G}} du - \sqrt{G} \cos \theta dv, \\ H' dv' &= \frac{(FH' - HF') \cos \theta + (FF' + HH') \sin \theta}{\sqrt{G} G'} du + \frac{H' \cos \theta + F' \sin \theta}{\sqrt{G'}} \sqrt{G} dv, \end{aligned}$$

ove θ denota ancora l'angolo della tangente positiva alla u' con la tangente positiva alla u , ed

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \quad H' = \sqrt{E'G' - F'^2}.$$

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^3 = 0, \\ a_2^3 = 0. \end{cases}$$

Le condizioni d'integrabilità di questo sistema sono, com'è noto,

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial x_1} + a_1^1 \frac{\partial a_1^2}{\partial x_4} + a_2^1 \frac{\partial a_1^2}{\partial x_5} = \frac{\partial a_1^1}{\partial x_2} + a_1^2 \frac{\partial a_1^1}{\partial x_4} + a_2^2 \frac{\partial a_1^1}{\partial x_5},$$

$$\frac{\partial a_1^3}{\partial x_1} + a_1^1 \frac{\partial a_1^3}{\partial x_4} + a_2^1 \frac{\partial a_1^3}{\partial x_5} = \frac{\partial a_1^1}{\partial x_3} + a_1^3 \frac{\partial a_1^1}{\partial x_4} + a_2^3 \frac{\partial a_1^1}{\partial x_5},$$

$$\frac{\partial a_1^3}{\partial x_1} + a_1^2 \frac{\partial a_1^3}{\partial x_4} + a_2^2 \frac{\partial a_1^3}{\partial x_5} = \frac{\partial a_1^2}{\partial x_3} + a_1^3 \frac{\partial a_1^2}{\partial x_4} + a_2^3 \frac{\partial a_1^2}{\partial x_5},$$

$$\frac{\partial a_2^2}{\partial x_2} + a_1^1 \frac{\partial a_2^2}{\partial x_4} + a_2^1 \frac{\partial a_2^2}{\partial x_5} = \frac{\partial a_2^1}{\partial x_2} + a_1^2 \frac{\partial a_2^1}{\partial x_4} + a_2^2 \frac{\partial a_2^1}{\partial x_5},$$

$$\frac{\partial a_2^3}{\partial x_1} + a_1^1 \frac{\partial a_2^3}{\partial x_4} + a_2^1 \frac{\partial a_2^3}{\partial x_5} = \frac{\partial a_2^1}{\partial x_3} + a_1^3 \frac{\partial a_2^1}{\partial x_4} + a_2^3 \frac{\partial a_2^1}{\partial x_5},$$

$$\frac{\partial a_2^3}{\partial x_2} + a_1^2 \frac{\partial a_2^3}{\partial x_4} + a_2^2 \frac{\partial a_2^3}{\partial x_5} = \frac{\partial a_2^2}{\partial x_3} + a_1^3 \frac{\partial a_2^2}{\partial x_4} + a_2^3 \frac{\partial a_2^2}{\partial x_5}.$$

A cagione delle (3), la 2^a, 3^a, 5^a e 6^a di queste condizioni diventano

$$\frac{\partial a_1^1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_1^2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_2^1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_2^2}{\partial x_3} = 0,$$

le quali non sono soddisfatte. Dunque: *le condizioni di rotolamento non costituiscono mai da sè sole un sistema integrabile.*

3. Risolta questa prima quistione, si presenta l'altra di vedere se, e come, il sistema (1) ammetta altre maniere di soluzioni, e ciò può avvenire, come ho di sopra accennato, per l'aggiunzione di altre equazioni alle (1), cioè di altri legami al sistema. In generale, se ad un sistema di m equazioni lineari a differenziali totali fra n variabili ($n > m$) non soddisfacente le condizioni d'integrabilità si aggiungono $n - m - 1$ equazioni lineari qualunque fra gli stessi differenziali, si ottiene un sistema integrabile sempre, perchè equivalente ad $n - 1$ equazioni differenziali ordinarie. Però anche aggiungendo un numero $r < n - m - 1$ di equazioni siffatte si può rendere il sistema integrabile, sottoponendo sì le equazioni date che le aggiunte alle condizioni di integrabilità. Le equazioni aggiunte possono essere anche in termini finiti, ma per la formazione delle condizioni d'integrabilità converrà sempre differenziarle; in tal caso le equazioni aggiunte sono pure integrali dell'intero sistema.

Nel nostro caso, aggiungendo due legami, si ottiene l'integrabilità completa ed incondizionata, mentre l'aggiunzione di un solo legame, tanto questo però che le (1) stesse condizionate, può condurre a casi d'integrabilità. Studieremo nel seguente paragrafo il secondo caso, ed in un prossimo il primo.

§ 2.

Integrazione delle equazioni differenziali del rotolamento per l'aggiunzione di un solo legame.

4. Sebbene l'equazione aggiunta possa essere in termini finiti, pure conviene anche allora, come fu detto, tradurla in equazione differenziale per potere stabilire le condizioni d'integrabilità.

Se l'equazione aggiunta non contiene θ , cioè l'equazione differenziale aggiunta non contiene $d\theta$, il sistema non può essere integrabile.

Infatti, il sistema è allora costituito da tre equazioni con cinque variabili, ma quattro differenziali soltanto. Risolvendolo pei tre differenziali dv , du' , dv' , aggiungiamo nei secondi membri il differenziale che manca con coefficienti nulli, e quindi, adottando come al n° 2 la notazione consueta, ma ponendo invece

$$\begin{array}{cccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \\ \theta, & u, & v, & u', & v', \end{array}$$

scriveremo il sistema così:

$$(4) \quad \begin{cases} dx_3 = b_1^1 dx_1 + b_1^2 dx_2, \\ dx_4 = b_2^1 dx_1 + b_2^2 dx_2, \\ dx_5 = b_3^1 dx_1 + b_3^2 dx_2, \end{cases}$$

ove le b^1 sono nulli e le b^2 dipendono da θ . Or le condizioni d'integrabilità di questo sistema sono le tre seguenti:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial b_1^1}{\partial x_2} + b_1^2 \frac{\partial b_1^1}{\partial x_3} + b_2^2 \frac{\partial b_1^1}{\partial x_4} + b_3^2 \frac{\partial b_1^1}{\partial x_5} = \frac{\partial b_1^2}{\partial x_1} + b_1^1 \frac{\partial b_1^2}{\partial x_3} + b_2^1 \frac{\partial b_1^2}{\partial x_4} + b_3^1 \frac{\partial b_1^2}{\partial x_5}, \\ \frac{\partial b_2^1}{\partial x_2} + b_1^2 \frac{\partial b_2^1}{\partial x_3} + b_2^2 \frac{\partial b_2^1}{\partial x_4} + b_3^2 \frac{\partial b_2^1}{\partial x_5} = \frac{\partial b_2^2}{\partial x_1} + b_1^1 \frac{\partial b_2^2}{\partial x_3} + b_2^1 \frac{\partial b_2^2}{\partial x_4} + b_3^1 \frac{\partial b_2^2}{\partial x_5}, \\ \frac{\partial b_3^1}{\partial x_2} + b_1^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_3} + b_2^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_4} + b_3^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_5} = \frac{\partial b_3^2}{\partial x_1} + b_1^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_3} + b_2^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_4} + b_3^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_5}, \end{cases}$$

e queste si riducono semplicemente a

$$\frac{\partial b_1^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial b_2^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial b_3^2}{\partial x_1} = 0,$$

le quali non sono soddisfatte. Del resto può prevedersi senza calcolo che, contenendo il sistema la variabile θ senza contenerne il differenziale, esso non può essere integrabile.

5. Resta dunque da considerare il caso che l'equazione differenziale aggiunta contenga $d\theta$. Allora il sistema d'equazioni differenziali può mettersi nella forma (4), ove però sarà più comodo supporre che

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

rappresentino rispettivamente

$$u, v, u', v', \theta.$$

Con ciò le due prime equazioni (4) saranno quelle del rotolamento, epperò

$$(6) \quad \begin{cases} b_1^1 = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta, & b_1^2 = -\sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta, \\ b_2^1 = \sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta, & b_2^2 = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta; \end{cases}$$

la terza sarà l'equazione aggiunta risolta per $d\theta$, ed in cui du', dv' si suppongano espresse per du, dv mediante le due prime equazioni. I coefficienti b_3^1, b_3^2 della terza equazione sono due funzioni da determinarsi con le condizioni d'integrabilità (5).

Ora uno sguardo alle equazioni (5) fa rilevare subito, che le prime due contengono b_3^1, b_3^2 linearmente, ma non contengono le loro derivate, ond'è che da esse possono ricavarsi le espressioni di queste due b in funzione delle altre, che dipendono dalla natura geometrica delle due superficie. A tal uopo introduciamo, per la brevità delle formole, le curvature geodetiche $R_u, R_v; R'_u, R'_v$ delle curve coordinate sulle due superficie mediante le apposizioni

$$R_u = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad R_v = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

$$R'_u = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u'}, \quad R'_v = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v'},$$

e deduciamo dalle (6) con facili calcoli:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial b_1^1}{\partial x_2} - \frac{\partial b_1^2}{\partial x_1} &= \frac{1}{\sqrt{E'}} \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos \theta + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \sin \theta \right) = -\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{E'}} (R_u \sin \theta + R_v \cos \theta), \\ b_1^2 \frac{\partial b_1^1}{\partial x_3} - b_1^1 \frac{\partial b_1^2}{\partial x_3} &= 0 \\ b_2^2 \frac{\partial b_1^1}{\partial x_4} - b_2^1 \frac{\partial b_1^2}{\partial x_4} &= -\frac{\sqrt{EG}}{E' \sqrt{G'}} \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v'} = -\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{E'}} R'_v, \\ \frac{\partial b_2^1}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2^2}{\partial x_1} &= \frac{1}{\sqrt{G'}} \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \sin \theta - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cos \theta \right) = \frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{G'}} (R_u \cos \theta - R_v \sin \theta), \\ b_1^2 \frac{\partial b_2^1}{\partial x_3} - b_1^1 \frac{\partial b_2^2}{\partial x_3} &= \frac{\sqrt{EG}}{G' \sqrt{E'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u'} = -\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{G'}} R'_u, \\ b_2^2 \frac{\partial b_2^1}{\partial x_4} - b_2^1 \frac{\partial b_2^2}{\partial x_4} &= 0, \end{aligned} \right.$$

per cui le due prime (5) divengono

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \sqrt{G} \cos \theta b_3^1 - \sqrt{E} \sin \theta b_3^2 &= \sqrt{EG} (R_u \sin \theta + R_v \cos \theta - R'_v), \\ \sqrt{G} \sin \theta b_3^1 + \sqrt{E} \cos \theta b_3^2 &= \sqrt{EG} (-R_u \cos \theta + R_v \sin \theta + R'_u). \end{aligned} \right.$$

Il determinante \sqrt{EG} è diverso da zero. Escludiamo per ora il caso che i secondi membri siano nulli, su di che ritorneremo in seguito, e ne deduciamo

$$(9) \left\{ \begin{aligned} b_3^1 &= \sqrt{E} (R_v - R'_v \cos \theta + R'_u \sin \theta) \\ b_3^2 &= \sqrt{G} (-R_u + R'_v \sin \theta + R'_u \cos \theta). \end{aligned} \right.$$

L'equazione da aggiungersi a quelle di rotolamento (1), cioè la terza delle (4), è dunque la seguente:

$$(10) \quad d\theta = (R_v - R'_v \cos \theta + R'_u \sin \theta) \sqrt{E} du + (-R_u + R'_v \sin \theta + R'_u \cos \theta) \sqrt{G} dv$$

ossia, in virtù delle (1),

$$(10)^* \quad d\theta = \sqrt{E} R_v du - \sqrt{G} R_u dv - \sqrt{E'} R'_v du' + \sqrt{G'} R'_u dv'.$$

Questa equazione esprime che la componente della rotazione istantanea secondo la normale comune alle due superficie è nulla, ossia che vi è assenza di giramento *).

) Si deduce facilmente dalle formole (1), § 3 della citata memoria del VIERKANDT, adoperando note formole della teoria delle coordinate curvilinee, che il polinomio, che si ottiene portando al primo membro tutti i termini della (10) è l'espressione della rotazione infinitesima di giramento. Del resto piaciemi darne qui la seguente dimostra-

Occorre ancora che i valori (9) di b_3^1 , b_3^2 soddisfino la terza delle equazioni (5), e ciò appresterà una condizione, alla quale dovranno sottostare le due superficie, affinchè si verifichi la richiesta integrabilità. A tal uopo si dedurrà con facili calcoli

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b_3^1}{\partial x_2} - \frac{\partial b_3^2}{\partial x_1} + b_3^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_5} - b_3^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_5} \\ &= -\sqrt{EG} \left[(R_u^2 + R_v^2) - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_u}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_v}{\partial v} - (R_u'^2 + R_v'^2) \right], \\ & b_1^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_3} - b_1^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_3} = -\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{E'}} \frac{\partial R_u'}{\partial u'}, \\ & b_2^2 \frac{\partial b_3^1}{\partial x_4} - b_2^1 \frac{\partial b_3^2}{\partial x_4} = -\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{G'}} \frac{\partial R_v'}{\partial v'}, \end{aligned}$$

espressioni, nelle quali è notevole la scomparsa della variabile θ . Sostituendo nella terza (5) ed omettendo il fattore $-\sqrt{EG}$, che non può essere nullo, otteniamo

$$\begin{aligned} R_u^2 + R_v^2 - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_u}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_v}{\partial v} \\ - R_u'^2 - R_v'^2 + \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial R_u'}{\partial u'} + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial R_v'}{\partial v'} = 0. \end{aligned}$$

Rammentando l'espressione di LIOUVILLE della curvatura gaussiana, che per coordinate ortogonali è

$$(11) \quad K = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_v}{\partial v} - R_u^2 - R_v^2,$$

si riconosce che l'equazione precedente esprime l'eguaglianza :

zione brevissima. La rotazione di giramento può dedursi dal moto infinitesimo del sistema piano costituito, sul piano tangente comune attuale, dalle proiezioni delle curve coordinate delle due superficie. Questo moto dipende dai cinque parametri θ, u, v, u', v' . Detto M il punto di contatto attuale; C_u, C_v, C_u', C_v' i centri di curvatura geodetica delle curve $u = \text{cost.}$, etc., i moti, che si ottengono facendo variare un solo di questi parametri per volta, sono rotazioni intorno ai centri

$$M, \quad C_u, \quad C_v, \quad C_u', \quad C_v'$$

di amplitudini rispettive

$$d\theta, \quad R_u ds_u, \quad -R_v ds_v, \quad -R_u' ds_u', \quad R_v' ds_v',$$

ove $ds_u = \sqrt{G} dv$, etc. Sostituendo e sommando, si ottiene per la rotazione di giramento l'espressione, che si vuol dimostrare.

$$(12) \quad K - K' = 0$$

di queste curvature nei punti delle due superficie, che possono venire in contatto.

6. Se all'equazione aggiunta si dà la forma (10)*, la (12) è dunque una condizione necessaria per l'integrabilità. Occorre ora studiare la sufficienza di questa condizione. Questo esame ci conduce ad una distinzione fondamentale, cioè che l'equazione (12) sia soddisfatta identicamente, o no.

Il primo caso, poichè K è funzione delle sole u, v , e K' delle sole u', v' , non può verificarsi, se non quando K e K' sono eguali ad una stessa costante, cioè quando le due superficie hanno la medesima curvatura costante. È questo il caso considerato dal sig. HADAMARD. Allora il sistema d'equazioni a differenziali totali (4), cioè il sistema delle (1), (10)*, è *completamente* integrabile secondo il concetto di CLEBSCH.

L'effettiva integrazione si riduce a quella del sistema equivalente d'equazioni a derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial u'} + \sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial v'} \\ + \sqrt{E} (R_v - R'_v \cos \theta + R'_u \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial v} - \sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial u'} + \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial v'} \\ + \sqrt{G} (-R_u + R'_v \sin \theta + R'_u \cos \theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Questo sistema, in virtù dell'identità (12) è jacobiano, e come tale ammette tre integrali distinti con tre costanti arbitrarie, e che determinano u', v', θ in funzione di u, v e delle costanti. Queste ultime possono determinarsi in modo, che per valori arbitrariamente assegnati u_0, v_0 di u, v , le variabili u', v', θ' prendano valori u'_0, v'_0, θ_0 anch'essi arbitrariamente assegnati. Così il contatto iniziale può avvenire per due punti qualunque delle due superficie, e l'orientamento iniziale di queste può essere qualunque.

7. Il secondo caso, il quale concede una maggiore generalità alle superficie rotolanti, è quello che l'equazione (12) non sia verificata identicamente, ma in virtù del sistema integrale, o, in altri termini, che questa equazione sia una di quelle, che costituiscono tale sistema.

Presumiamo dunque che il sistema integrale esista e che l'equazione

$$(12) \quad K(u, v) = K'(u', v'),$$

senza esser verificata identicamente, ne sia una conseguenza. Differenziandola, si ha

$$(13) \quad \frac{\partial K}{\partial u} du + \frac{\partial K}{\partial v} dv = \frac{\partial K'}{\partial u'} du' + \frac{\partial K'}{\partial v'} dv',$$

equazione, che dev'essere una conseguenza delle (1), sicchè eliminando du' , dv' , la risultante

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K}{\partial u} du + \frac{\partial K}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial K'}{\partial u'} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta du - \sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta dv \right) \\ &+ \frac{\partial K'}{\partial v'} \left(\sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta du + \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta dv \right) \end{aligned}$$

dev'essere soddisfatta qualunque siano i valori di du , dv ; ciò conduce alle due equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial u} &= \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta \frac{\partial K'}{\partial u'} + \sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta \frac{\partial K'}{\partial v'}, \\ \frac{\partial K}{\partial v} &= -\sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta \frac{\partial K'}{\partial u'} + \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta \frac{\partial K'}{\partial v'}, \end{aligned}$$

che scriveremo così

$$(14) \quad \begin{cases} K_u = K'_u \cos \theta + K'_v \sin \theta, \\ K_v = -K'_u \sin \theta + K'_v \cos \theta, \end{cases}$$

ponendo per brevità

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K}{\partial u} = K_u, & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K}{\partial v} = K_v, \\ \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial K'}{\partial u'} = K'_u, & \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial K'}{\partial v'} = K'_v. \end{cases}$$

Anche le (14) dovrebbero esser soddisfatte in virtù del sistema integrale, e siccome nelle (12), (14) si hanno già tre equazioni, bisogna che queste appunto costituiscano tale sistema. Indaghiamo le condizioni affinchè la cosa stia così.

Eliminando θ fra le (14), si ottiene

$$K_u^2 + K_v^2 = K'^2_u + K'^2_v;$$

ora uno sguardo alle (15) fa scorgere che i due membri di questa equazione sono i parametri differenziali del 1° ordine di BELTRAMI delle due funzioni K, K' , ond'essa può scriversi con la solita notazione così:

$$(16) \quad \Delta K = \Delta' K'.$$

È questa una nuova condizione, che riguarda le due superficie. Anch'essa, come conseguenza del sistema integrale, può esser trattata come la (12), e quindi conduce alle condizioni

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta_u = \Delta'_u \cos \theta + \Delta'_v \sin \theta, \\ \Delta_v = -\Delta'_u \sin \theta + \Delta'_v \cos \theta, \end{cases}$$

ove per brevità si è posto

$$(18) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Delta K}{\partial u} = \Delta_u, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Delta K}{\partial v} = \Delta_v, \text{ etc.}$$

Eliminando θ fra le (17), si perviene ad una nuova condizione riguardante le superficie, che con la stessa notazione può scriversi

$$(19) \quad \Delta \Delta K = \Delta' \Delta' K'.$$

Finalmente, sommando le (12), (16), si ha un'equazione, che dev'essere pure una conseguenza del sistema integrale, e quindi, trattata come le precedenti, conduce all'altra

$$\Delta(K + \Delta K) = \Delta'(K' + \Delta' K'),$$

ossia, sviluppando,

$$\Delta K + \Delta \Delta K + 2 \nabla(K, \Delta K) = \Delta' K' + \Delta' \Delta' K' + 2 \nabla'(K', \Delta' K'),$$

ove ∇ è il parametro differenziale misto di BELTRAMI; in virtù delle (16), (19), resta

$$(20) \quad \nabla(K, \Delta K) = \nabla'(K', \Delta' K').$$

Anche alle (19), (20) dovrebbe applicarsi il procedimento precedente, per esprimere che esse sono conseguenza delle equazioni integrali; però le condizioni, alle quali si perverrebbe, non sarebbero più distinte dalle precedenti.

Infatti esse esprimerebbero sempre eguaglianze di parametri differenziali relativi alle due superficie. Ora le (12), (16) stabiliscono una corrispondenza fra i punti di queste, e le (19), (20), che debbono esserne conseguenze, assicurano, com'è noto, la trasformabilità delle due forme differenziali ds^2, ds'^2 l'una nell'altra, o, in altri termini, esprimono che le due superficie sono applicabili e la corrispondenza d'applicabilità è

stabilita dalle (12), (16). Le ulteriori condizioni sopra cennate sono dunque conseguenze delle precedenti *).

8. Finora abbiamo trovato condizioni necessarie affinché le equazioni

$$(12) \quad K = K',$$

$$(14) \quad \begin{cases} K_u = K'_u \cos \theta + K'_v \sin \theta, \\ K_v = -K'_u \sin \theta + K'_v \cos \theta, \end{cases}$$

costituiscono il sistema integrale, e queste condizioni sono: 1° le (16), (19), (20) riguardanti le due superficie; 2° le (17), le quali, oltre ad avere per conseguenza la (19), danno pure un'altra equazione, che determina θ , cioè

$$(21) \quad \tan \theta = \frac{\Delta_u \Delta'_v - \Delta_v \Delta'_u}{\Delta_u \Delta'_u + \Delta_v \Delta'_v}.$$

Ora ci rimane il compito di dimostrare che queste condizioni sono anche sufficienti. Anzitutto sarà facile dedurre che la (21) è una conseguenza delle altre condizioni e delle equazioni (14), ed a tal uopo basterà dimostrare che il valore (21) di $\tan \theta$ è uguale a quello fornito dalle (14), cioè

$$\tan \theta = \frac{K_u K'_v - K_v K'_u}{K_u K'_u + K_v K'_v}.$$

Eguagliando questi due valori si ha difatti

$$(K_u K'_v - K_v K'_u)(\Delta_u \Delta'_u + \Delta_v \Delta'_v) = (K_u K'_u + K_v K'_v)(\Delta_u \Delta'_v - \Delta_v \Delta'_u),$$

la quale si può scrivere

$$(K_v \Delta_u - K_u \Delta_v)(K'_u \Delta'_u + K'_v \Delta'_v) = (K_u \Delta_u + K_v \Delta_v)(K'_v \Delta'_u - K'_u \Delta'_v);$$

or si ha

$$K_u \Delta_u + K_v \Delta_v = \nabla(K, \Delta K),$$

$$K_v \Delta_u - K_u \Delta_v = \frac{1}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial(K, \Delta K)}{\partial(u, v)} = \sqrt{\Delta K \cdot \Delta \Delta K - \nabla^2(K, \Delta K)},$$

onde l'eguaglianza precedente è verificata in virtù delle (16), (19), (20).

Resta dunque a dimostrarsi che queste ultime tre condizioni sono sufficienti. Or essendo già dimostrato che, se le (14) sono soddisfatte, la (12) verifica le equazioni differenziali, basterà inoltre dimostrare che le (14) stesse le verificano in virtù delle anzidette equazioni supposte

* V. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Pisa 1894, n° 94; DARBOUX, op. cit., n° 677, 686, 687.

sussistenti. Dobbiamo dunque differenziare le (14), e nelle equazioni così ottenute sostituire du' , dv' , $d\theta$ con le loro espressioni per du , dv fornite dalle equazioni differenziali date; allora i coefficienti di questi due differenziali dovranno esser nulli per effetto delle presunte eguaglianze. Fatto il calcolo, nel quale si osserveranno pure le (14) stesse, si otterranno per questi coefficienti le espressioni che seguono, di cui le due prime provengono dalla prima equazione e le due ultime dalla seconda:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{E} a_{11} &\equiv \left(\frac{\partial K'_u}{\partial u'} \cos \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial u'} \sin \theta \right) \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta \\
 &\quad + \left(\frac{\partial K'_u}{\partial v'} \cos \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial v'} \sin \theta \right) \sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta \\
 &\quad - \frac{\partial K_u}{\partial u} + K_v (R_v - R'_v \cos \theta + R'_u \sin \theta) \sqrt{E}, \\
 \sqrt{G} a_{12} &\equiv - \left(\frac{\partial K'_u}{\partial u'} \cos \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial u'} \sin \theta \right) \sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta \\
 &\quad + \left(\frac{\partial K'_u}{\partial v'} \cos \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial v'} \sin \theta \right) \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta \\
 &\quad - \frac{\partial K_u}{\partial v} + K_v (-R_u + R'_v \sin \theta + R'_u \cos \theta) \sqrt{G}, \\
 \sqrt{E} a_{21} &\equiv \left(-\frac{\partial K'_u}{\partial u'} \sin \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial u'} \cos \theta \right) \sqrt{\frac{E}{E'}} \cos \theta \\
 &\quad + \left(-\frac{\partial K'_u}{\partial v'} \sin \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial v'} \cos \theta \right) \sqrt{\frac{E}{G'}} \sin \theta \\
 &\quad - \frac{\partial K_v}{\partial u} - K_u (R_v - R'_v \cos \theta + R'_u \sin \theta) \sqrt{E}, \\
 \sqrt{G} a_{22} &\equiv - \left(-\frac{\partial K'_u}{\partial u'} \sin \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial u'} \cos \theta \right) \sqrt{\frac{G}{E'}} \sin \theta \\
 &\quad + \left(-\frac{\partial K'_u}{\partial v'} \sin \theta + \frac{\partial K'_v}{\partial v'} \cos \theta \right) \sqrt{\frac{G}{G'}} \cos \theta \\
 &\quad - \frac{\partial K_v}{\partial v} - K_u (-R_u + R'_v \sin \theta + R'_u \cos \theta) \sqrt{G}.
 \end{aligned}$$

Da queste deduciamo, osservando ancora le (14),

$$\begin{aligned}
 a_{12} - a_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial K'_v}{\partial u'} + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial K'_u}{\partial v'} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K_u}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K_v}{\partial u} \\
 &\quad - K_v R_u + K_u R_v + K'_v R'_u - K'_u R'_v;
 \end{aligned}$$

or questa espressione è identicamente nulla; infatti si ha

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K_v}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}G} \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} + K_v R_u, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K_u}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}G} \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} + K_u R_v,$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K_v}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K_u}{\partial v} + K_v R_u - K_u R_v \equiv 0;$$

abbiamo dunque

$$(22) \quad a_{12} - a_{21} \equiv 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial K'_u}{\partial u'} + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial K'_v}{\partial v'} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K_u}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K_v}{\partial v} \\ &\quad + K_v R_v + K_u R_u - K'_v R'_v - K'_u R'_u; \end{aligned}$$

ora, denotando con Δ_2 il parametro differenziale del 2° ordine di BELTRAMI, si ha

$$\begin{aligned} \Delta_2 K &= \frac{1}{\sqrt{E}G} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial K}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial K}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}G} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G} K_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E} K_v) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}G} \left[\sqrt{G} \frac{\partial K_u}{\partial u} + \sqrt{E} \frac{\partial K_v}{\partial v} - K_u \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - K_v \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right], \end{aligned}$$

ossia, richiamando le espressioni di R_u, R_v ,

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial K_u}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial K_v}{\partial v} - K_u R_v - K_v R_u = \Delta_2(K);$$

si ha quindi

$$a_{11} + a_{22} = \Delta'_2(K') - \Delta_2(K),$$

e poichè il secondo membro è nullo in virtù delle ipotesi (n° 7),

$$(23) \quad a_{11} + a_{22} = 0.$$

Infine, per le relazioni

$$\begin{aligned} K_u \frac{\partial K_u}{\partial u} + K_v \frac{\partial K_v}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (K_u^2 + K_v^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta K}{\partial u}, \\ K_u \frac{\partial K_u}{\partial v} + K_v \frac{\partial K_v}{\partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (K_u^2 + K_v^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta K}{\partial v}, \end{aligned}$$

applicando le (14) stesse, e richiamando le apposizioni (18), si deduce

$$\begin{aligned} 2(a_{11} K_u + a_{21} K_v) &= \Delta'_u \cos \theta + \Delta'_v \sin \theta - \Delta_u, \\ 2(a_{12} K_u + a_{22} K_v) &= -\Delta'_u \sin \theta + \Delta'_v \cos \theta - \Delta_v, \end{aligned}$$

dove i secondi membri sono nulli giusta le (17), che abbiamo dimostrato esser conseguenza delle (14), (19), sicchè abbiamo

$$(24) \quad \begin{cases} a_{11}K_u + a_{21}K_v = 0, \\ a_{12}K_u + a_{22}K_v = 0. \end{cases}$$

Dalle (22), (23) si ottiene

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = -a_{11},$$

per cui le (24) divengono

$$\begin{aligned} K_u a_{11} + K_v a_{12} &= 0, \\ -K_v a_{11} + K_u a_{12} &= 0; \end{aligned}$$

adunque, eccettuato il caso che sia $K_u^2 + K_v^2 = \Delta K = 0$, si ha

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0,$$

e quindi

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

Così è dimostrato l'assunto. Nell'ipotesi eccettuata si ha $K_u = K_v = 0$, cioè $\frac{\partial K}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial v} = 0$, $K = \text{cost.}$; si è quindi nel caso delle superficie a curvature costanti, ch'è stato trattato separatamente.

9. I risultati del presente paragrafo si riassumono nella seguente proposizione:

Affinchè le equazioni del rotolamento siano integrabili con l'aggiunzione di una sola equazione di legame, è necessario e sufficiente: 1° che il legame aggiunto consista nell'essere impedito il giramento; 2° che le due superficie siano applicabili. Eccettuato il caso che le due superficie abbiano la medesima curvatura costante, nel quale i punti di contatto possono essere qualunque, essi sono quelli, che si corrispondono nell'applicabilità.

§ 3.

Studio di un caso particolare notevole.

10. Abbiamo differito di riguardare il caso particolare che i secondi membri delle (8) siano nulli. Allora il sistema integrale, a cui conduce il metodo adottato, può assumere una forma più semplice in quanto che, invece di contenere le derivate delle curvature geodetiche, contiene, come vedremo, semplicemente queste curvature.

Se le equazioni

$$(25) \quad \begin{cases} R_u \sin \theta + R_v \cos \theta - R'_v = 0, \\ -R_u \cos \theta + R_v \sin \theta + R'_u = 0 \end{cases}$$

si suppongono costantemente soddisfatte, la risoluzione delle (8) dà $b'_3=0$, $b''_3=0$, cioè

$$(25)^* \quad \begin{cases} R_u = R'_u \cos \theta + R'_v \sin \theta, \\ R_v = -R'_u \sin \theta + R'_v \cos \theta, \end{cases}$$

le quali non sono altro che le (25) stesse risolte per R_u , R_v . Una terza forma di queste equazioni si ottiene eliminando θ , cioè

$$(25)^{**} \quad \begin{cases} R_u^2 + R_v^2 = R'^2_u + R'^2_v, \\ \operatorname{tang} \theta = \frac{R_u R'_v - R_v R'_u}{R_u R'_u + R_v R'_v}. \end{cases}$$

La terza delle equazioni differenziali (4) esprime la mancanza di giramento è allora

$$d\theta = 0;$$

il sistema delle tre equazioni differenziali ha dunque come uno degli integrali

$$(26) \quad \theta = \text{cost.}$$

11. A questi risultati possiamo anche pervenire direttamente domandoci s'egli è possibile integrare il sistema delle equazioni differenziali (1) del rotolamento nell'ipotesi di θ costante. Allora il numero delle variabili è ridotto a quattro e, con le notazioni adottate al n° 5, le condizioni d'integrabilità sono le due seguenti

$$\begin{aligned} \frac{\partial b'_1}{\partial x_2} + b'_1 \frac{\partial b'_1}{\partial x_3} + b'^2_2 \frac{\partial b'_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial b'_1}{\partial x_1} + b'_1 \frac{\partial b'_1}{\partial x_3} + b'_2 \frac{\partial b'_1}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial b'_2}{\partial x_2} + b'_1 \frac{\partial b'_2}{\partial x_3} + b'^2_2 \frac{\partial b'_2}{\partial x_4} &= \frac{\partial b'_2}{\partial x_1} + b'_1 \frac{\partial b'_2}{\partial x_3} + b'_2 \frac{\partial b'_2}{\partial x_4}; \end{aligned}$$

ora uno sguardo agli sviluppi (7) ci fa subito accorgere che queste equazioni sono appunto le (25).

12. Avuto l'integrale (26), invece di dedurre gli altri due dal sistema generale costituito dalle (12), (14), conviene ripigliare la trattazione *ex novo*.

Anzitutto le (25) possono esser soddisfatte identicamente: a ciò si richiede che R_u , R_v da una parte ed R'_u , R'_v dall'altra siano costanti

assolute, e la prima (25)** confrontata con la (11) ci rivela che le due superficie debbono avere la medesima curvatura costante negativa *). Il sistema delle equazioni differenziali è allora illimitatamente integrabile, ed il contatto iniziale può avvenire per due punti qualunque delle due superficie.

13. Eccettuato questo caso, resta l'ipotesi che le (25) siano conseguenza del sistema integrale; e poichè restano a trovarsi due soli integrali, è necessario che questi siano appunto le (25). Cerchiamo le condizioni perchè ciò avvenga, e per questo esame scegliamo la forma (25)** , che, ponendo per brevità

$$R_u^2 + R_v^2 = H,$$

scriveremo così:

$$(25)^{**} \quad \left\{ \begin{array}{l} H = H', \\ \text{tang } \theta = \frac{R_u R'_v - R_v R'_u}{R_u R'_u + R_v R'_v}. \end{array} \right.$$

Le condizioni perchè la prima di queste sodisfi le equazioni (1) si ottengono con lo stesso procedimento seguito nel § precedente per l'equazione $K = K'$: esse sono

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_u = H'_u \cos \theta + H'_v \sin \theta \\ H_v = -H'_u \sin \theta + H'_v \cos \theta \end{array} \right.$$

con le apposizioni

$$\begin{aligned} H_u &= \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(R_u \frac{\partial R_u}{\partial u} + R_v \frac{\partial R_v}{\partial u} \right), \\ H_v &= \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(R_u \frac{\partial R_u}{\partial v} + R_v \frac{\partial R_v}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Le (27) possono anche mettersi nella forma

$$(27)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta H = \Delta' H', \\ \text{tang } \theta = \frac{H_u H'_v - H_v H'_u}{H_u H'_u + H_v H'_v}. \end{array} \right.$$

Per essere la prima di queste conseguenza del sistema integrale, debbono sussistere le

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_u = \Delta'_u \cos \theta + \Delta'_v \sin \theta, \\ \Delta_v = -\Delta'_u \sin \theta + \Delta'_v \cos \theta, \end{array} \right.$$

*) Cfr. BIANCHI, op. cit., n° 91.

ove

$$\Delta_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Delta H}{\partial u}, \quad \Delta_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Delta H}{\partial v},$$

e queste possono anche assumere la forma

$$(28)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Delta H = \Delta' \Delta' H', \\ \text{tang } \theta = \frac{\Delta_u \Delta'_v - \Delta_v \Delta'_u}{\Delta_u \Delta'_u + \Delta_v \Delta'_v}. \end{array} \right.$$

Infine dalle precedenti, con procedimento analogo a quello seguito al n° 7, si deduce l'altra condizione

$$(29) \quad \nabla(H, \Delta H) = \nabla'(H', \Delta' H').$$

Da questa e dalle condizioni $H = H'$, $\Delta H = \Delta' H'$, $\Delta \Delta H = \Delta' \Delta' H'$ si argomenta che le due superficie debbono essere applicabili *). Noi chiameremo queste quattro le *condizioni d'applicabilità*, sebbene esse siano sufficienti, ma non in generale necessarie perchè l'applicabilità sussista.

Abbiamo poi ottenuto due nuove espressioni di $\text{tang } \theta$, e dobbiamo domandarci se la loro eguaglianza con quella fornita da (25)** sia conseguenza delle condizioni d'applicabilità o introduca nuove condizioni relative alle due superficie. In quanto all'eguaglianza fra loro dei due valori (27)*, (28)*, essa può mettersi nella forma

$$(H_u \Delta_v - H_v \Delta_u)(H_u \Delta_u + H_v \Delta_v) = (H'_u \Delta'_v - H'_v \Delta'_u)(H'_u \Delta'_u + H'_v \Delta'_v),$$

ch'è una conseguenza delle condizioni d'applicabilità in virtù delle relazioni

$$H_u \Delta_v - H_v \Delta_u = \sqrt{\Delta H \cdot \Delta \Delta H - \nabla^2(H, \Delta H)},$$

$$H_u \Delta_u + H_v \Delta_v = \nabla(H, \Delta H).$$

L'eguaglianza, poi, fra i valori (25)**, (27)* di $\text{tang } \theta$ può mettersi analogamente nella forma

$$(R_u H_v - R_v H_u)(R_u H_u + R_v H_v) = (R'_u H'_v - R'_v H'_u)(R'_u H'_u + R'_v H'_v).$$

Or dalle (25)*, (27) si deducono le relazioni sostituibili alle (27) stesse :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_u H_v - R_v H_u = R'_u H'_v - R'_v H'_u, \\ R_u H_u + R_v H_v = R'_u H'_u + R'_v H'_v, \end{array} \right.$$

di cui la precedente è una conseguenza. Ma queste due ultime quadrate e sommate danno

$$H \Delta H = H' \Delta' H',$$

*) DARBOUX, op. cit., n° 686, 687.

che dipende dalle condizioni d'applicabilità: resta dunque una sola condizione nuova o, come diremo, *supplementare*, e come tale può scegliersi una qualunque delle (30) *).

Era da aspettarsi la comparsa di nuove condizioni relative alle due superficie oltre quelle di applicabilità, perchè, oltre a volere che le condizioni di rotolamento siano integrabili, noi richiediamo che gl'integrali abbiano una forma particolare.

14. Dobbiamo ancora esprimere che la seconda (25)** sodisfa le equazioni differenziali o, in altri termini, che il relativo valore di $\tan \theta$ è costante, avuto riguardo alle (1). L'espressione di questo valore può scriversi

$$\tau = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'},$$

ove

$$\tau = \tan \theta, \quad \alpha = \frac{R_u}{R_v}, \quad \alpha' = \frac{R'_u}{R'_v},$$

e la costanza di $\tan \theta$ risulta espressa dalle due equazioni

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \tau}{\partial u'} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \tau}{\partial v'} \sin \theta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \tau}{\partial u'} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \tau}{\partial v'} \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Aggiungiamo le apposizioni

$$S_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(R_v \frac{\partial R_u}{\partial u} - R_u \frac{\partial R_v}{\partial u} \right), \quad S_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(R_v \frac{\partial R_u}{\partial v} - R_u \frac{\partial R_v}{\partial v} \right).$$

*) Assunta come *supplementare* una delle (30), per esempio la seconda, sotto il riguardo algebrico non ne consegue necessariamente la prima, ma può conseguirne, invece di questa, l'altra

$$R_u H_v - R_v H_u = - (R'_u H'_v - R'_v H'_u),$$

poichè da quest'ultima e dalla seconda (30) risulta medesimamente la $H \Delta H = H' \Delta H'$. Però quest'altra dev'essere esclusa, perchè non compatibile con le (25)*, (27). Essa sarebbe valida se, stabilendo le equazioni (1), si scegliessero i sensi positivi delle curve u, v, u', v' tali, che le rispettive tangenti costituissero due sistemi di assi cartesiani *non congruenti* (cfr. il n° 1). Se invece si assume la prima delle (30), alla seconda non deve mai sostituirsi l'altra

$$R_u H_u + R_v H_v = - (R'_u H'_u + R'_v H'_v).$$

Lascio alla cura del lettore di verificare queste asserzioni.

Si ha :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \text{etc.} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \frac{1 + \alpha'^2}{(1 + \alpha \alpha')^2}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \alpha'} = - \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha \alpha')^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{S_u}{R_v^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{S_v}{R_v^2}, \quad \text{etc.}, \end{array} \right.$$

con la sostituzione dei quali valori, ed avuto riguardo che la $H = H'$, può scriversi

$$\frac{1 + \alpha'^2}{R_v^2} = \frac{1 + \alpha^2}{R_v'^2};$$

le (31) divengono

$$(31)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} S_u = S'_u \cos \theta + S'_v \sin \theta, \\ S_v = - S'_u \sin \theta + S'_v \cos \theta, \end{array} \right.$$

e possono anche scriversi

$$(31)^{**} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_u^2 + S_v^2 = S_u'^2 + S_v'^2, \\ \tan \theta = \frac{S_u S'_v - S_v S'_u}{S_u S'_u + S_v S'_v}. \end{array} \right.$$

A prima vista può credersi che la prima di queste, e l'equazione che si ottiene eguagliando quest'ultimo valore di $\tan \theta$ al valore (25)***, cioè l'equazione

$$(R_u S_v - R_v S_u)(R_u S_u + R_v S_v) = (R'_u S'_v - R'_v S'_u)(R'_u S'_u + R'_v S'_v),$$

siano ulteriori condizioni supplementari; ma non è così, e la nuova condizione supplementare è una soltanto. Per riconoscerlo è più semplice operare sulle (31)*: combinandole con le (25)*, se ne deducono le due altre ad esse sostituibili

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_u S_v - R_v S_u = R'_u S'_v - R'_v S'_u, \\ R_u S_u + R_v S_v = R'_u S'_u + R'_v S'_v. \end{array} \right.$$

L'ultima eguaglianza è una conseguenza immediata di queste, e ne consegue pure, quadrando e sommando, la prima delle (31)***. Ma da esse, in virtù delle precedenti, si deduce una relazione dipendente dall'applicabilità; infatti, sottraendo dalla seconda (30) la prima (32), si ottiene

$$R_u (H_u - S_v) + R_v (H_v + S_u) = R'_u (H'_u - S'_v) + R'_v (H'_v + S'_u),$$

la quale, osservando i valori di $H_u, \dots S_v$, etc., e la $H = H'$, si riduce a

$$(33) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_v}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial R'_u}{\partial u'} + \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial R'_v}{\partial v'}.$$

Ora in questa, tenute presenti la (11), e la $H = H'$ stessa, si riconosce l'eguaglianza delle curvatures gaussiane: essa è dunque conseguenza dell'applicabilità. Dunque la costanza di θ introduce soltanto una seconda condizione supplementare.

Da questo risultato e dai precedenti si conclude che abbiamo in tutto due condizioni supplementari. Come tali possono scegliersi una delle (30) ed una delle (32), evitando però di accoppiare le due, che hanno dato per combinazione l'eguaglianza delle curvatures.

Di queste quattro equazioni può farsi un'altra notevole combinazione, aggiungendo alla prima (30) la seconda (32): così si ottiene

$R_u(H_v + S_v) - R_v(H_u - S_v) = R'_u(H'_v + S'_v) - R'_v(H'_u - S'_v)$,
che si riduce a

$$(34) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_u}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial R'_v}{\partial u'} - \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial R'_u}{\partial v'},$$

e questa può assumersi come una delle supplementari.

15. Le condizioni d'applicabilità, prese insieme alle due supplementari, oltre ad essere necessarie, sono anche sufficienti perchè esista un sistema integrale della forma (25) con θ costante. Infatti esse esprimono che questo sistema soddisfa le equazioni differenziali, e d'altra parte esse sono tutte quelle, a cui conduce il criterio di *necessità*. Per dimostrare quest'ultimo punto si osservi che tutte le anzidette equazioni sono della forma $\varphi(u, v) = \varphi'(u', v')$, e quindi le ulteriori condizioni, a cui condurrebbe il prosieguo del metodo, consistendo sempre in eguaglianze fra parametri differenziali delle funzioni φ, φ' , sono conseguenze dell'applicabilità *).

Osserviamo ancora che l'intervento delle due condizioni supplementari, oltre quelle d'applicabilità, non menoma la generalità delle due superficie rotolanti, purchè applicabili, ma semplicemente, scelto comunque sopra una di esse un sistema di linee coordinate ortogonali, il complesso delle anzidette condizioni vale a determinare sull'altra il rispettivo sistema siffatto compatibile con la costanza dell'angolo θ .

16. Le due equazioni supplementari possono mettersi in un'altra forma che, sebbene non sia la più semplice, è la più elegante, in quanto

*) DARBOUX, op. cit., n° 677.

contiene soli parametri differenziali. Sviluppando la $\Delta H = \Delta' H'$ con l'aiuto delle formole

$$\Delta(\varphi + \psi) = \Delta\varphi + \Delta\psi + 2\nabla(\varphi, \psi),$$

$$\Delta(\varphi^2) = 4\varphi^2\Delta\varphi, \quad \nabla(\varphi^2, \psi^2) = 4\varphi\psi\nabla(\varphi, \psi),$$

essa può scriversi:

$R_u^2\Delta R_u + R_v^2\Delta R_v + 2R_uR_v\nabla(R_u, R_v) = R_u'^2\Delta R_u' + R_v'^2\Delta R_v' + 2R_u'R_v'\nabla(R_u', R_v')$,
e la prima (31)**, ove si sostituiscano le espressioni di S_u , S_v , può scriversi:

$R_u^2\Delta R_u + R_v^2\Delta R_v - 2R_uR_v\nabla(R_u, R_v) = R_u'^2\Delta' R_u' + R_v'^2\Delta' R_v' - 2R_u'R_v'\nabla'(R_u', R_v')$,
dalla quale, sommando ed avendo riguardo alla $H = H'$, si ottiene
(35) $\Delta R_u + \Delta R_v = \Delta' R_u' + \Delta' R_v'$.

Poi, quadrando e sommando le (33), (34), si ha

$$\Delta R_u + \Delta R_v + \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial(R_u, R_v)}{\partial(u, v)} = \Delta' R_u' + \Delta' R_v' + \frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial(R_u', R_v')}{\partial(u', v')},$$

nella quale i terzi termini sono gl'invarianti Θ introdotti dal BELTRAMI e legati alle Δ , ∇ dalla relazione

$$\Theta^2(\varphi, \psi) + \nabla^2(\varphi, \psi) = \Delta\varphi\Delta\psi^*);$$

osservando la (35), se ne deduce

$$(36) \quad \Theta(R_u, R_v) = \Theta'(R_u', R_v').$$

Le (35), (36) sono le due forme delle equazioni supplementari, a cui accennavamo.

È pur notevole un'altra eguaglianza fra parametri differenziali, non però distinta dalle relazioni precedenti, che si ottiene quadrando e sommando le equazioni (31) risolte nei primi termini e facendovi le sostituzioni (a): essa è

$$(37) \quad \Delta \left(\text{arc tang } \frac{R_u}{R_v} \right) = \Delta' \left(\text{arc tang } \frac{R_u'}{R_v'} \right).$$

§ 4.

Deduzione dal caso particolare precedente di una proprietà generale delle superficie.

17. Risulta dalla trattazione del § precedente che due superficie applicabili possono riferirsi a due sistemi rispettivi di linee ortogonali, in

*) BELTRAMI, *Ricerche d'analisi applicata alla geometria*, § XIV; DARBOUX, op. cit., n° 673.

guisa che, per ogni coppia di punti corrispondenti e per un valor costante dell'angolo θ , siano sempre

$$(25) \quad \begin{cases} R'_v = R_v \cos \theta + R_u \sin \theta, \\ R'_u = -R_v \sin \theta + R_u \cos \theta. \end{cases}$$

Noi possiamo evidentemente riferire questa proprietà, invece che a due superficie applicabili, ad una stessa superficie, ed allora le curve u' sono le traiettorie oblique o isogonali delle curve u sotto l'angolo θ , e le v' sotto l'angolo $\theta + \frac{\pi}{2}$. Diremo che in tal caso i due sistemi di curve ortogonali u, v ed u', v' sono isogonali.

In un piano tangente qualunque all'unica superficie le tangenti alle curve u, v e le tangenti alle curve u', v' , che passano pel punto di contatto, possono considerarsi come due coppie di assi cartesiani ortogonali di comune origine, e le formole di trasformazione delle relative coordinate sono

$$(38) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases}$$

D'altra parte, facendo nelle (25)

$$\begin{aligned} R_v &= -U, & R_u &= -V, \\ R'_v &= -U', & R'_u &= -V', \end{aligned}$$

possiamo scriverle

$$(39) \quad \begin{cases} U' = U \cos \theta + V \sin \theta, \\ V' = -U \sin \theta + V \cos \theta. \end{cases}$$

Se riguardiamo U, V ed U', V' come coordinate pluckeriane di retta relative ai due cennati sistemi di assi, il confronto di queste equazioni con le (38) fa riconoscere che esse non son altro che le formole di trasformazione di queste coordinate nel piano tangente. Dunque la retta, che rispetto al primo sistema di assi ha le coordinate U, V , coincide con quella, che rispetto al secondo ha le coordinate U', V' legate alle prime dalle equazioni (39).

I segmenti, che questa retta stacca dai primi assi sono i raggi di curvatura geodetica ρ_v, ρ_u delle curve v, u , ed i segmenti che stacca dagli altri due assi sono i raggi omonimi ρ'_v, ρ'_u delle curve v', u' . Le estremità di questi segmenti non son altro che i centri di curvatura geodetica delle quattro rispettive curve; questi centri giacciono dunque sulla indicata retta, e quindi: se sopra una superficie si tracciano due sistemi isogonali di curve ortogonali, le quattro curve che passano per uno stesso punto vi hanno i centri di curvatura geodetica sopra una retta.

Segue da ciò che, tenendo fisse le curve u , v e facendo variare θ , il centro di curvatura geodetica della u' , per ogni punto della superficie (come pure quello della v'), si muove sulla congiungente i centri omonimi delle due curve u , v passanti per lo stesso punto. Diciamo *isogonali* due sistemi di curve quando ogni curva di uno di essi è la traiettoria obliqua di tutte quelle dell'altro. Siamo dunque pervenuti al seguente teorema:

Se sopra una superficie si tracciano quanti si vogliano sistemi di curve due a due isogonali, le curve dei diversi sistemi, che passano per uno stesso punto, vi hanno i centri di curvatura geodetica in linea retta.

Il sistema delle rette luoghi di questi centri di curvatura geodetica pei diversi punti della superficie è determinato da un solo sistema fondamentale di curve (le u) e costituisce una congruenza.

Dal precedente teorema si deduce come corollario la seguente proprietà avvertita dal sig. P. MASSIMI *):

Se un sistema di curve è isogonale con un sistema di geodetiche, in ogni punto la curvatura geodetica di ciascuna di esse è uguale a quella della parallela (ortogonale alle geodetiche) moltiplicata pel seno dell'angolo, che la curva forma con la geodetica.

Con le formole (25) si dimostrano pure facilmente due teoremi reciproci dovuti al sig. BLUTEL **), e che possono enunciarsi così:

Se, sopra una superficie, due sistemi isogonali di curve sono tali, che le curve dei due sistemi, che passano per ogni punto vi hanno curvature geodetiche di rapporto costante, essi sono isogonali con un sistema di geodetiche, e reciprocamente.

È pur notevole il caso particolare del nostro teorema riferentesi al piano, nel qual caso le curvature geodetiche diventano curvature ordinarie di curve piane.

§ 5.

Integrazione delle equazioni differenziali del rotolamento per l'aggiunzione di due legami.

18. I due legami aggiunti apprestano due equazioni sia differenziali, sia in termini finiti; e poichè in questo secondo caso possiamo sostituire

*) Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. LII (1899), pp. 126-134.

**) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXVII (1899), pag. 72.

alle equazioni di legame date quelle che se ne deducono differenziandole, abbiamo in generale due equazioni differenziali da aggiungere alle due, che esprimono la condizione di rotolamento, ed in tutto quattro equazioni fra cinque differenziali, cioè un sistema di quattro equazioni simultanee a derivate ordinarie del 1° ordine fra altrettante funzioni incognite; il sistema è quindi integrabile. Se le equazioni aggiunte sono direttamente differenziali, l'integrazione introduce quattro costanti arbitrarie determinabili con l'assegnazione dei valori iniziali delle cinque variabili, cioè disponendo arbitrariamente dei punti iniziali di contatto e dell'orientazione relativa iniziale delle due superficie. Se le equazioni aggiunte sono in termini finiti, esse fanno parte del sistema integrale, e con ciò mancano due delle quattro costanti; ma, in compenso, si possono eliminare due variabili e determinare coi valori iniziali arbitrari delle tre altre le due costanti che rimangono, dopo di che le equazioni aggiunte faranno determinare i valori iniziali delle due variabili eliminate.

19. Merita una particolare attenzione il caso, in cui le equazioni aggiunte siano in termini finiti e non contengano θ . Esse allora possono mettersi nella forma

$$(40) \quad \begin{cases} u' = \varphi(u, v), \\ v' = \psi(u, v), \end{cases}$$

da cui, differenziando,

$$(41) \quad \begin{cases} du' = \varphi'_u du + \varphi'_v dv, \\ dv' = \psi'_u du + \psi'_v dv. \end{cases}$$

Associando queste ultime alle equazioni del rotolamento, si ha un sistema di quattro equazioni lineari omogenee fra i quattro differenziali du, dv, du', dv' , eliminando le quali, risulta un'equazione in termini finiti, che determina θ . Difatti le equazioni del rotolamento diventano, applicando le (41),

$$(42) \quad \begin{cases} (\sqrt{E'}\varphi'_u - \sqrt{E}\cos\theta)du + (\sqrt{E'}\varphi'_v + \sqrt{G}\sin\theta)dv = 0, \\ (\sqrt{G'}\psi'_u - \sqrt{E}\sin\theta)du + (\sqrt{G'}\psi'_v - \sqrt{G}\cos\theta)dv = 0, \end{cases}$$

da cui, eliminando du, dv e ponendo $\tan\theta = \tau$, si ottiene l'equazione di secondo grado in τ

$$A\tau^2 - 2B\tau + C = 0,$$

ove

$$A = (\sqrt{E'E'}\varphi'_v - \sqrt{G'G'}\psi'_u)^2 - [\sqrt{E'E'G'}(\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u) + \sqrt{EG}]^2,$$

$$B = (\sqrt{E'G'}\psi'_v + \sqrt{E'G}\varphi'_u)(\sqrt{E'E'}\varphi'_v - \sqrt{G'G'}\psi'_u),$$

$$C = (\sqrt{E'G'}\psi'_v + \sqrt{E'G}\varphi'_u)^2 - [\sqrt{E'E'G'}(\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u) + \sqrt{EG}]^2.$$

A ciascuna delle radici di questa equazione corrisponde una coppia di espressioni di $\sin \theta$, $\cos \theta$, che sostituite nelle (42) le rendono l'una conseguenza dell'altra. Se allora in una di esse esprimiamo E' , G' in funzione di u , v mediante le (40) otteniamo un'unica equazione differenziale fra u , v , du , dv , l'integrazione della quale introduce una costante arbitraria. Questa può determinarsi assegnando il valore di v , che corrisponde ad un dato valore di u , cioè fissando il punto iniziale di contatto sulla prima superficie, dopo di che le (40) fissano sulla seconda il corrispondente punto iniziale di contatto, mentre l'espressione di τ fa determinare il valore iniziale di θ .

20. Siccome dalle equazioni (1) del rotolamento deriva $ds^2 = ds'^2$, la simultaneità di queste con le (40) rappresenta il problema seguente: stabilita una corrispondenza fra i punti di due superficie, trovare su di esse le curve costituite da punti corrispondenti, e tali che gli archi corrispondenti siano uguali. Questo problema è ben noto in cartografia, dove le curve anzidette chiamansi *isoperimetriche*, e si sa che per ogni punto di ciascuna delle due superficie ne passano in generale due, quando sono reali, come del resto risulta dall'analisi precedente.

Non insisterei dunque più oltre su questa quistione, se non fosse per approfondirne una parte, che mi sembra soglia essere dai cartografi trascurata, forse perchè di poco interesse pel problema cartografico, ma che intanto ne ha molto per quello cinematico, voglio dire lo studio dei luoghi singolari associati all'equazione differenziale delle curve isoperimetriche.

§ 6.

Sui luoghi singolari relativi al problema delle curve isoperimetriche.

21. Giova riassumere la quistione, che si presenta in cartografia, e che dà luogo come caso particolare alla considerazione delle curve isoperimetriche, allo scopo di proseguire con le considerazioni che vogliamo aggiungervi, tanto più perchè nei trattati sulla materia, intenti principalmente alle applicazioni, non se ne mette forse in sufficiente luce l'aspetto algebrico per noi a preferenza importante.

Convieni scegliere come coordinate sulle due superficie due sistemi

di curve corrispondenti e farle dipendere dai valori di una stessa coppia di variabili u, v . Con ciò le equazioni (40) del paragrafo precedente diventano identità, e le forme differenziali ds^2, ds'^2 prendono le espressioni

$$(43) \quad \begin{cases} ds^2 = \varphi = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ ds'^2 = \psi = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 \end{cases}$$

(ove φ, ψ sono nuove denotazioni da non confondersi con quelle del § precedente). La quistione che vogliamo riassumere è quella di studiare il modo come variano attorno ad ogni coppia di punti corrispondenti i rapporti fra gli archi infinitesimi corrispondenti.

Consideriamo l'equazione

$$(44) \quad \varphi + \lambda \psi = 0,$$

riguardandovi u, v come costanti e du, dv, λ come variabili. Divisa per dv^2 essa prende la forma

$$(44)^* \quad \Phi + \lambda \Psi = 0,$$

ove

$$\Phi = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G,$$

$$\Psi = E_1 \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F_1 \frac{du}{dv} + G_1,$$

e determina il valore della derivata $\frac{du}{dv}$, pel quale l'arco elementare della prima superficie subisce rispetto a quello corrispondente della seconda l'espansione $-\lambda$. Essendo quadratica, essa dà in generale due di siffatti archi per ogni valore di λ .

Per determinare i valori di $\frac{du}{dv}$, cui corrispondono i massimi ed i minimi valori di λ , basta eliminare λ fra la (44)* e l'equazione

$$\frac{d(\Phi + \lambda \Psi)}{d \frac{du}{dv}} = 0,$$

e ciò fornisce un'equazione, che può scriversi

$$(45) \quad (EF_1 - FE_1) du^2 + (EG_1 - GE_1) du dv + (FG_1 - GF_1) dv^2 = 0.$$

Il primo membro di questa è il covariante quadratico simultaneo delle due forme date, cioè, a meno di un fattor numerico, il loro determinante funzionale. È noto che, denotandolo con \mathfrak{z} , si ha identicamente

$$\mathfrak{z}^2 = -(D\psi^2 - 2D'\varphi\psi + D''\varphi^2),$$

ove

$$D = EG - F^2, \quad 2D' = EG_1 + GE_1 - 2FF_1, \quad D'' = E_1G_1 - F_1^2$$

sono gl'invarianti del sistema delle due forme date *). Ne segue che l'eliminazione di $\frac{du}{dv}$ fra le (44), (45), che darà i massimi ed i minimi di λ , può effettuarsi eliminando φ, ψ fra la (44) e l'equazione

$$D\psi^2 - 2D'\varphi\psi + D''\varphi^2 = 0,$$

cioè che i sudetti massimi o minimi sono le radici λ', λ'' dell'equazione

$$(46) \quad D + 2D'\lambda + D''\lambda^2 = 0.$$

Il primo membro di questa è il discriminante della (44) rispetto a du, dv , onde segue che pei valori λ', λ'' di λ , i due archi infinitesimi d'espansione $-\lambda$ hanno la stessa direzione su ciascuna delle due superficie, ed a ciò corrisponde il fatto algebrico, che per questi due valori $\varphi + \lambda\psi$ diventa un quadrato perfetto, o che possiamo porre

$$(47) \quad \begin{cases} \varphi + \lambda'\psi = \xi^2, \\ \varphi + \lambda''\psi = \eta^2, \end{cases}$$

dove ξ, η sono espressioni lineari in du, dv , cioè

$$(48) \quad \begin{cases} \xi = \sqrt{E + \lambda'E_1} du + \sqrt{G + \lambda'G_1} dv, \\ \eta = \sqrt{E + \lambda''E_1} du + \sqrt{G + \lambda''G_1} dv. \end{cases}$$

Intanto dalle (47) si ricava

$$(49) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{-\lambda'\xi^2 + \lambda''\eta^2}{\lambda' - \lambda''}, \\ \psi = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\lambda' - \lambda''}. \end{cases}$$

Denotando con π, ρ i divisori integranti delle espressioni (48) di ξ, η , possiamo definire due nuove variabili u_1, v_1 mediante le equazioni

$$\xi = \pi du_1, \quad \eta = \rho dv_1,$$

e quindi possiamo scrivere le (49) così:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{-\pi^2\lambda' du_1^2 + \rho^2\lambda'' dv_1^2}{\lambda' - \lambda''}, \\ \psi &= \frac{\pi^2 du_1^2 - \rho^2 dv_1^2}{\lambda' - \lambda''}; \end{aligned}$$

*) V. CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen*, § 57.

queste manifestano che, assumendo come nuove variabili le u_1, v_1 invece delle u, v , le due forme differenziali date si riducono simultaneamente a forma canonica, cioè

$$\begin{aligned}\varphi &= \mathbb{E} du_1^2 + \mathbb{G} dv_1^2, \\ \psi &= \mathbb{E}_1 du_1^2 + \mathbb{G}_1 dv_1^2,\end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= -\frac{\pi^2 \lambda'}{\lambda' - \lambda''}, & \mathbb{G} &= \frac{\rho^2 \lambda''}{\lambda' - \lambda''}, \\ \mathbb{E}_1 &= \frac{\pi^2}{\lambda' - \lambda''}, & \mathbb{G}_1 &= -\frac{\rho^2}{\lambda' - \lambda''}.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione precedente di \mathfrak{s}^2 i valori (49) di φ, ψ , ed osservando che λ', λ'' sono le radici della (46), si ottiene

$$\mathfrak{s}^2 = -D'' \xi^2 \eta^2, \quad \text{cioè} \quad \mathfrak{s} = \sqrt{-D''} \xi \eta;$$

dunque ξ, η sono, a meno di un coefficiente costante, i fattori lineari di \mathfrak{s} , e perciò $\xi = 0, \eta = 0$ danno i valori di $\frac{du}{dv}$, a cui corrispondono i massimi o minimi di λ : in altri termini le corrispondenti direzioni su entrambe le superficie sono le tangenti alle curve $u_1 = \text{cost.}, v_1 = \text{cost.}$ Queste poi costituiscono sull'una e sull'altra superficie un doppio sistema di linee corrispondenti ed ortogonali (teorema di TISSOT).

I ragionamenti precedenti presuppongono che le radici λ', λ'' siano dovunque, salvo che in punti isolati, reali e disuguali. Or esse sono effettivamente tali, eccettuato il caso che la rappresentazione delle due superficie l'una sull'altra sia conforme *). Ed infatti il discriminante della (46) può mettersi identicamente nella forma

$$\begin{aligned}D'^2 - DD'' &= \frac{1}{4} \left[(EG_1 - GE_1)^2 - \frac{2F}{E} (EF_1 - FE_1) \right]^2 \\ &+ \frac{EG - F^2}{E^2} (EF_1 - FE_1)^2,\end{aligned}$$

ond'è che, essendo $EG - F^2$ sempre positivo, questa espressione è sempre positiva, e non può annullarsi, se non quando si abbia

$$\frac{E}{E_1} = \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1}.$$

*) È evidente che, se la rappresentazione è conforme, non v'è rotolamento possibile, eccettuato il caso che il rapporto di similitudine degli archi infinitesimi sia l'unità; ma in questo caso le due superficie sono applicabili, e l'argomento ri viene a quello trattato nel § 2.

Se queste sono soddisfatte dovunque, la rappresentazione è conforme; diversamente esse determinano i punti speciali, per cui l'eguaglianza delle due radici si avvera.

22. Se nell'equazione (46), invece di riguardare come costanti le u, v , riguardiamo come tale λ , essa rappresenta per ciascuna superficie il luogo dei punti, pei quali le tangenti alle due curve di espansione — λ coincidono. Ma noi vogliamo prender di mira questo luogo da un altro aspetto.

È noto che, se $f(x, y, y') = 0$ (ove $y' = \frac{dy}{dx}$) è un'equazione differenziale del 1° ordine, e si elimina y' fra questa e la $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, si ottiene un'equazione, che generalmente appartiene al luogo dei punti di regresso delle curve rappresentate dall'integrale generale, ma in particolare può rappresentare l'involuppo di queste curve (l'integrale singolare) quando l'espressione di y da essa ricavata soddisfa l'equazione differenziale. Questo procedimento è appunto quello che è stato seguito nel n° precedente cercando i massimi ed i minimi di λ , per l'equazione (44)*, la quale, riguardandovi ora u, v come variabili e λ come costante, vogliamo trattare come equazione differenziale delle curve di espansione — λ . Ne segue che l'equazione

$$(46) \quad D + 2D'\lambda + D''\lambda^2 = 0$$

rappresenta precisamente il luogo dei punti di regresso ed in casi particolari l'involuppo delle curve anzidette.

È questo il luogo singolare, che pel caso delle curve isoperimetriche importa di considerare nel nostro problema cinematico.

Siccome la (46) può mettersi nella forma

$$D''(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'') = 0,$$

questa curva, su ciascuna delle due superficie, si spezza nelle due $\lambda' - \lambda = 0$, $\lambda'' - \lambda = 0$ (dove ora bisogna considerare λ', λ'' come funzioni di u, v), quando pure queste equazioni non subiscano ulteriori eventuali spezzamenti. Noi chiameremo *singolari* queste curve. Le loro equazioni possono esprimersi per mezzo dei coefficienti delle forme canoniche, perchè, tenendo presenti le espressioni di $\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{E}_1, \mathcal{G}_1$, e le considerazioni precedenti, si riconosce che esse equivalgono alle due

$$\mathcal{E} + \lambda \mathcal{E}_1 = 0, \quad \mathcal{G} + \lambda \mathcal{G}_1 = 0.$$

23. Limitiamoci ulteriormente alle curve isoperimetriche, le quali corrispondono al valore $\lambda = -1$. L'equazione differenziale di forma canonica di queste curve è

$$(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1) du^2 + (\mathcal{G} - \mathcal{G}_1) dv^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{-\frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}_1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_1}};$$

la curva non è dunque reale, se non quando e dove $\mathcal{E} - \mathcal{E}_1$, $\mathcal{G} - \mathcal{G}_1$ sono di segni contrari.

L'equazione complessiva delle due curve singolari, che in coordinate corrispondenti generali è

$$D - 2D' + D'' = 0,$$

si spezza nelle due $\lambda' + 1 = 0$, $\lambda'' + 1 = 0$, alle quali, se le espressioni degli archi elementari son date direttamente in forma canonica, si sostituiscono le due

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 = 0, \quad \mathcal{G} - \mathcal{G}_1 = 0.$$

Pei punti della prima di queste due curve $\frac{du}{dv}$ diventa infinita, e quindi per essi le tangenti alle due curve isoperimetriche che vi passano coincidono fra loro e con la tangente alla curva $v = \text{cost}$. Del pari pei punti della seconda curva $\frac{du}{dv}$ si annulla, onde le tangenti alle curve isoperimetriche coincidono fra loro e con la tangente alla curva $u = \text{cost}$.

24. Per la seguente discussione poniamo per brevità

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 = e, \quad \mathcal{G} - \mathcal{G}_1 = g$$

e scriviamo l'equazione differenziale così

$$e du^2 + g dv^2 = 0.$$

1° *Caso generale*.—Se nè e nè g sono nulle dovunque, le due curve singolari, se reali, sono effettivamente distinte, e rappresentano in generale luoghi di punti di regresso delle curve isoperimetriche. Qual'è la condizione perchè una di esse, per esempio la $e = 0$, costituisca un inviluppo, nel qual caso sarà essa pure isoperimetrica? Bisogna che, eliminando du , dv fra l'equazione

$$\frac{\partial e}{\partial u} du + \frac{\partial e}{\partial v} dv = 0$$

e l'equazione differenziale data, si ottenga, in virtù della $e = 0$ stessa, un'identità *). L'eliminazione dà

$$e \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)^2 + g \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right)^2 = 0,$$

ossia, per la $e = 0$,

$$\frac{\partial e}{\partial u} = 0;$$

bisogna dunque che e sia funzione della sola v . Allora su ciascuna delle due superficie la curva singolare $e = 0$ è una curva v .

Le curve singolari dividono ciascuna delle due superficie in regioni corrispondenti, e queste saranno tali che, passando dall'una all'altra attraverso una di tali curve, una delle differenze e, g cambia segno; così in queste successive regioni il contatto di rotolamento (reale) è alternativamente possibile ed impossibile. Una regione, per cui questo contatto è possibile, è dunque limitata da due curve singolari. Se queste sono entrambe luoghi di punti di regresso, il contatto di rotolamento, cominciato per ciascuna superficie in un punto della regione, prosegue per la curva isoperimetrica fino a raggiungere una delle curve singolari, dove ritorna per il punto di regresso fino a raggiungere l'altra, e così di seguito. Se però una od entrambe le curve singolari sono inviluppi, e perciò isoperimetriche, arrivato il punto di contatto su una di tali curve, può proseguire lungo di essa sempre, oppure, dopo averne percorso un arco finito qualunque, ritornare sopra una delle isoperimetriche inviluppanti.

2° *Casi particolari.*—Se $e = 0$ dovunque, vi è una sola curva singolare, la $g = 0$ **). Allora l'equazione differenziale, ridotta a

$$g dv^2 = 0,$$

si spezza nelle due $g = 0, dv = 0$. Le due curve isoperimetriche passanti per un punto qualunque si riducono ad unica, e queste sono le $v = \text{cost}$. La curva $g = 0$ è pure isoperimetrica:

a) Può quest'ultima essere un inviluppo? L'equazione differenziale delle curve rispondenti all'integrale generale è semplicemente $dv = 0$, a cui associando l'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = 0,$$

*) V. FORSYTH, op. cit., § 30.

**) Non possono essere dovunque simultaneamente $e = 0, g = 0$, perchè allora le due radici λ', λ'' sarebbero dovunque uguali. Cfr. il n° 21.

si ottiene come condizione a ciò necessaria

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

cioè g funzione della sola v ; ma allora questa curva non è l'involuppo, sibbene una delle curve rappresentate dall'integrale generale.

Considerato a parte questo caso a), la curva $g=0$ non può propriamente riguardarsi come luogo di punti di regresso dal momento che punti siffatti non esistono: essa è semplicemente una curva isoperimetrica singolare in quanto è distinta da quelle date dall'integrale generale. Siccome $\frac{du}{dv}$ è sempre infinita, il rotolamento è reale per tutta una curva qualunque v , quand'anche si attraversi la curva singolare. Raggiunta questa, può bensì il contatto di rotolamento proseguire per essa, però con discontinuità dell'angolo θ . Nel caso a) il rotolamento reale avviene sempre per curve v .

b) Se, oltre ad essere dovunque $e = 0$, sia pure dovunque $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, cioè g funzione della sola u , la curva singolare ed isoperimetrica $g = 0$ è una curva u , e come tale è normale alle isoperimetriche v date dall'integrale generale. Il rotolamento procede come nel caso generale con la particolarità, che il salto, che subisce θ da un'isoperimetrica qualunque alla singolare, è di un angolo retto.

25. ESEMPIO.—1.° Come esempio del caso generale adduciamo il rotolamento di una sfera sopra un piano quando la corrispondenza sia quella, che effettua la rappresentazione prospettiva della sfera. Per semplicità scegliamo come centro della prospettiva il centro della sfera (proiezione centrografica dei cartografi). Sia a il raggio della sfera, per la quale adottiamo le solite coordinate polari u , colatitudine, e v , longitudine, onde si ha

$$ds^2 = a^2(du^2 + \sin^2 u dv^2).$$

Disponiamo il piano normalmente all'asse polare ad una distanza p dal centro della sfera, e scegliamo su di esso due assi ortogonali di coordinate X , Y , di cui l'asse delle X positive sia l'intersezione col mezzo piano meridiano della sfera di longitudine nulla, onde si ha

$$X = p \tan u \cos v, \quad Y = p \tan u \sin v,$$

e perciò

$$ds'^2 = p^2 \left(\frac{du^2}{\cos^4 u} + \tan^2 u dv^2 \right).$$

Le curve u, v sono dunque corrispondenti ed ortogonali su entrambe le superficie, e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= a^2, & \mathcal{E} &= a^2 \sin^2 u, \\ \mathcal{E}_1 &= \frac{p^2}{\cos^4 u}, & \mathcal{E}_1 &= p^2 \tan^2 u.\end{aligned}$$

L'equazione differenziale delle isoperimetriche è quindi

$$\frac{d u}{d v} = \sin u \cos u \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u - p^2}{p^2 - a^2 \cos^4 u}},$$

mentre le equazioni delle curve singolari sono

$$\begin{aligned}(50) \quad \mathcal{E} - \mathcal{E}_1 &= a^2 - \frac{p^2}{\cos^4 u} = 0, \\ \mathcal{E} - \mathcal{E}_1 &= \sin^2 u \left(a^2 - \frac{p^2}{\cos^2 u} \right) = 0,\end{aligned}$$

di cui la seconda si spezza nelle due

$$(51) \quad a^2 - \frac{p^2}{\cos^2 u} = 0,$$

$$(52) \quad \sin^2 u = 0.$$

La (52) rappresenta sulla sfera i due poli e sul piano la traccia dell'asse polare.

Se il piano non attraversa la sfera ($|p| > a$), i due luoghi (50), (51) sono immaginari, e tali sono pure le curve isoperimetriche, laonde in questo caso il rotolamento non è possibile.

Se il piano attraversa la sfera ($|p| < a$), la (51) rappresenta su questa il parallelo d'intersezione ed il simmetrico di esso rispetto all'equatore, e sul piano rappresenta il primo di questi due cerchi. La (50) rappresenta sulla sfera due altri paralleli simmetricamente disposti e giacenti sulle calotte staccate dai due primi paralleli, e sul piano rappresenta la circonferenza immagine comune delle due precedenti concentrica ed interna alla prima.

Il corso reale delle isoperimetriche della sfera si svolge, in ciascuno degli emisferi boreale ed australe, sulle due zone simmetriche rispetto all'equatore interposte fra i paralleli (50), (51) corrispondenti, e sul piano si svolge nella corona interposta fra le due circonferenze anzidette.

Essendo $\mathcal{E} - \mathcal{E}_1$ funzione della sola u , i paralleli (51) sulla sfera e la loro comune immagine sul piano sono involuppi, ed è per altro

evidente che sono isoperimetrici, mentre i paralleli (50) sono luoghi di punti di regresso delle isoperimetriche, dove per la sfera le tangenti cuspidali sono tangenti ai meridiani, e pel piano hanno la direzione del raggio.

Dopo ciò s'immaginano facilmente le forme delle curve isoperimetriche ed il modo come può avvenire il rotolamento.

26. 2° Un esempio molto generale del caso particolare 2° si ha quando \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 sono una stessa funzione della sola u . Allora gli archi elementari delle due superficie possono mettersi nelle forme

$$ds^2 = du'^2 + \mathcal{G} dv^2,$$

$$ds'^2 = du'^2 + \mathcal{G}_1 dv^2,$$

e quindi le due superficie sono riferite a due rispettivi e corrispondenti sistemi di geodetiche $v = \text{cost.}$ ed alle loro traiettorie ortogonali $u' = \text{cost.}$ pure corrispondenti e determinate dalle distanze geodetiche u' da due rispettive traiettorie ortogonali fisse. Le isoperimetriche date dall'integrale generale sono le geodetiche coordinate, e ne passa una per ogni punto; ma oltre a queste vi è la $\mathcal{G} - \mathcal{G}_1 = 0$.

27. 3° Se inoltre \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 sono funzioni della sola v , si ha un esempio del sotto-caso a), poichè $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$; allora la curva $g = 0$ è una delle geodetiche. In questo caso gli archi elementari possono ridursi alle forme

$$ds^2 = du'^2 + dv'^2, \quad ds'^2 = du'^2 + dv''^2,$$

onde le due superficie sono entrambe sviluppabili. Sui piani di sviluppo si corrispondono due serie di parallele equidistanti (le $v' = \text{cost.}$, $v'' = \text{cost.}$), e due serie di parallele ortogonali alle prime (le $u' = \text{cost.}$), le quali però non sono equidistanti; il riferimento imprime dunque a questi due piani un'espansione relativa nel senso in cui variano le u e costante per ciascuna retta u .

28. 4° Si ha un esempio del sotto-caso b) in due superficie di rotazione riferite in modo, che si corrispondano i meridiani di eguale longitudine ed i paralleli, le cui distanze misurate sui meridiani a partire da due paralleli fissi siano uguali. Gli archi elementari prendono le forme

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2, \quad ds'^2 = du^2 + r_1^2 dv^2,$$

dove r, r_1 , funzioni di u , sono i raggi dei paralleli, onde si ha dovunque $\mathbb{C} - \mathbb{C}_1 = 0$, $\mathbb{S} - \mathbb{S}_1$ funzione della sola u . Le curve isoperimetriche date dall'integrale generale sono i meridiani $v = \text{cost.}$, e ne passa una per ogni punto; ma oltre a queste sono pure isoperimetriche ed ortogonali alle prime le curve singolari rappresentate sulle due superficie dall'equazione $r - r_1 = 0$, cioè i paralleli di egual raggio.

Palermo, marzo 1905.

M. GEBBIA.
