

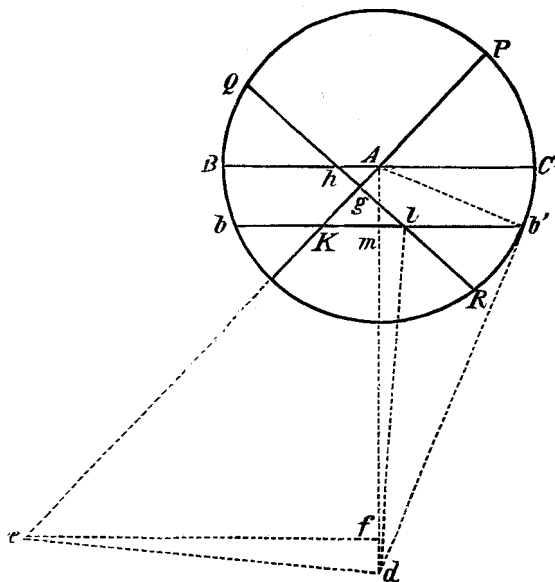
ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2575.

Einige Bemerkungen zu dem Problem der kürzesten Dämmerung und zu zwei Aufsätzen
von d'Arrest in A. N. Nr. 967 und 1085.

In den A. N. Bd. 46 Nr. 1085 hat Prof. H. d'Arrest ein ziemlich vollständiges Résumé über die auf das Problem der kürzesten Dämmerung Bezug habenden Arbeiten gegeben. Uebergangen ist darin nur die Abhandlung über diesen Gegenstand, welche Prof. Fuss im Astronomischen Jahrbuch 1787 veröffentlicht hat, und die descriptive Lösung für das Datum der kürzesten Dämmerung von Monge in der »Correspondance sur l'école impériale polytechnique par Hachette Nr. V 1806«. Beide Quellen sind in R. Wolf's Handbuch Bd. 2 pag. 178 angeführt.

Vielleicht wird es manchem Leser angenehm sein, die letztere Construction kennen zu lernen, da sie in der That eine der elegantesten Anwendungen der descriptiven Geometrie auf astronomische Probleme ist, weshalb ich sie mit den a. a. O. gebrauchten Bezeichnungen hier reproducire.



Es sei BQP der Meridian, BC der Horizont, bb' der Parallel, welcher um $c = 18^\circ$ vom Horizonte absteht; AP sei die Weltaxe, also Winkel $PAC = \varphi$ die Polhöhe. Man ziehe Ab' und errichte im Punkte b' an den Meridian die Tangente $b'd$, welche die Verticale in d trifft; es werde ferner $Af = b'd$ gemacht und ef senkrecht auf AD errichtet; ef schneide die verlängerte Weltaxe im Punkte e ; verbindet man e mit d , errichtet im Punkte d dl' senkrecht

Bd. 108.

auf de , bis zum Durchschnitte der Geraden dI mit bb' im Punkte I und fällt von I die senkrechte QIR auf die Weltaxe, so repräsentirt die Gerade QR den Declinationskreis der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung unter der Polhöhe φ .

Beweis. Setzt man den Radius $Ab' = 1$, so ist:

$$Af = b'd = \operatorname{ctg} c \quad Ad = \operatorname{cosec} c$$

und daher:

$$fd = (1 - \cos c) \operatorname{cosec} c.$$

Ferner ist:

$$ef = \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} \varphi$$

$$dm = \cos^2 c \operatorname{cosec} c$$

$$Km = \sin c \operatorname{ctg} \varphi$$

$$AK = \frac{\sin c}{\sin \varphi}$$

Aus $\bigwedge efd \simeq \bigwedge lmd$ folgt:

$$ef : fd \equiv dm : lm,$$

woraus :

$$lm = \frac{\cos c (1 - \cos c)}{\sin c} \operatorname{tg} \varphi$$

Es ist weiterhin:

$$Kl = Km + lm = \frac{\sin c \cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\cos c (1 - \cos c) \sin \varphi}{\sin c \cos \varphi}$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi \sin c} \left[\sin^2 c - \sin^2 \varphi (1 - \cos c) \right].$$

Aus $\triangle Kgl$ folgt:

$$Kg = Kl \cos \varphi = \frac{1}{\sin \varphi \sin \epsilon} [\sin^2 \epsilon - \sin^2 \varphi (1 - \cos \epsilon)]$$

daher:

$$\sin \delta = \frac{Ag = AK - Kg}{\sin \varphi \sin c} \left[\sin^2 c - \sin^2 c + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos c \right]$$

$$\sin \delta = \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \frac{c}{2}}{2 \sin \varphi \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} = \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

Prof. d'Arrest hat in der oben citirten Abhandlung auch die Curve der kürzesten Dämmerung für verschiedene Polhöhen untersucht und einen gewissen Zusammenhang dieser Curve mit zwei grössten Kreisen und einer sphärischen Ellipse dargethan.

Die Relation zwischen Stundenwinkel und Declination in den unter $\pm \frac{c}{2}$ gegen Aequator geneigten und den Ost- und Westpunkt durchschneidenden Kreisen ist durch einfache geometrische Betrachtungen leicht zu ermitteln. Anders verhält es sich mit der Ellipse. D'Arrest sagt nämlich, dass deren »kleine Halbaxe« $\frac{\pi}{2} - c$ mit dem Aequator zusammenfällt und dies kann leicht zum Irrthum Anlass geben, da er über die Grösse der zweiten Halbaxe nichts angiebt. Da c in der ganzen Abhandlung als Depressionswinkel der Sonne zu Anfang oder am Ende der Dämmerung gilt, je nachdem dieselbe Morgens oder Abends stattfindet, so kann darunter (der gewöhnlichen Annahme zufolge) höchstens $c = 18^\circ$ verstanden werden, und in diesem Falle ist $\frac{\pi}{2} - c$ die grosse Halbaxe, während die kleine Halbaxe durch $\frac{c}{2}$ ausgedrückt erscheint.

Bezieht man nämlich die Gleichung der Ellipse auf ein System zweier, sich rechtwinklig durchschneidender Kreise und zieht von den Polen dieser grössten Kreise durch einen beliebigen Punkt der sphärischen Ellipse Bogen grösster Kreise, so werden diese grössten Kreise auf den Axen Bogenstücke abschneiden, die wir analog den ebenen rechtwinkligen Coordinaten mit ξ und η bezeichnen wollen. Auf dieses Coordinatensystem bezogen lautet die Gleichung der sphärischen Ellipse:

$$\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 \eta + \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 \xi = \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b \quad *)$$

worin a und b respective die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse vorstellen.

In nachstehender Figur sei OA der Aequator die eine Coordinatenaxe, OB der Meridian die andere; zieht man von den Polen des Aequators und Meridianes II und P die grössten Kreise IIX und PY durch den Punkt M der sphärischen Ellipse, so sind OX und OY die sphärischen Coordinaten, respective gleich ξ und η ; bezeichnet man mit t und δ Stundenwinkel und Declination des Punktes M , nennt man ferner:

$$BO = \frac{c}{2} \quad OA = \frac{\pi}{2} - c$$

so ergibt sich aus dem rechtwinklig sphärischen Dreiecke $IIYM$

$$\operatorname{ctg} \eta = \operatorname{ctg} \delta \cos t;$$

da ferner:

$$\xi = t$$

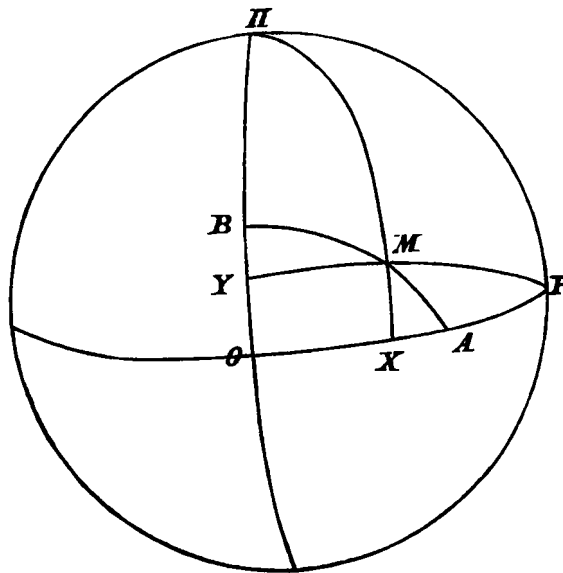
ist, so folgt durch Substitution in die obige Ellipsengleichung:

*) Gudermann, Grundriss der analytischen Sphärik. Köln 1830.

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\cos^2 t} \operatorname{ctg}^2 c + \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} \operatorname{tg}^2 t = \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ctg}^2 c$$

woraus sich nach einigen einfachen Reductionen ergibt:

$$\sin t = \frac{\cos c \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} - \operatorname{tg}^2 \delta}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$



In den A. N. Bd. 41 Nr. 967 untersucht d'Arrest die Linien gleicher Praecession in Rectascension. Er findet daselbst für die Linie, welche die Punkte kleinster Praecession in Rectascension verbindet, die Gleichung:

$$(1) \quad \sin \alpha = - \frac{\sin \delta \cos \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon (1 + \sin^2 \delta)}$$

worin α , δ und ε respective Rectascension und Declination des betreffenden Punktes, ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet. Soweit ich die Formeln verificirt habe, ist dieser Ausdruck richtig. Nun projecirt d'Arrest die Curve stereographisch auf den Aequator und findet als Gleichung der Projection:

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) + 2py = 0$$

»wo p den Abstand $P'E'$ beider Pole (von Aequator und Ekliptik) in dieser Projectionsart, d. h. $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$ bedeutet.« Aus diesen Worten ist ganz deutlich zu ersehen, dass d'Arrest in der That die sogenannte stereographische Aequatorprojection angewendet wissen wollte. D'Arrest findet als Gleichung der Projection in Polarcordinaten:

$$\sin v = \frac{r(1-r^2)}{2p}$$

und giebt auf Grund dieser Gleichung eine äusserst sinnreiche punktweise Construction der Curve.

Wendet man die zur Transformation dienenden Formeln, nämlich:

$$x = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{1 + \sin \delta} \quad y = -\frac{\sin \alpha \cos \delta}{1 + \sin \delta}$$

an, so wird man durch Substitution auf folgende Form geführt:

$$y \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{[1 - (x^2 + y^2)] (x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

Wien 1884 Januar.

die sich auf keine Weise mit der oben von d'Arrest gegebenen identificiren lässt. Dieselbe führt in Polarcordinaten auf die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon \sin v = \frac{(1 - r^2) r}{1 + r^4}$$

eine Curve, die allerdings mit der von d'Arrest gegebenen grosse Aehnlichkeit hat, wie man sich überzeugen kann, wenn man für successive Werthe von $r = 0.1, 0.2 \dots 0.9, 1.0$ die Winkel v rechnet, für die es mir aber bis jetzt nicht gelang, eine so elegante punktweise Construction zu finden, wie sie d'Arrest zu seiner Curvengleichung a. a. O. gegeben hat.

Karl Zelbr, Assistent der Sternwarte.

Ueber die Cassinische Trennungslinie des Saturnsringes.

In den letzt verfloffenen Monaten December und Januar habe ich jede günstige Gelegenheit zum Studium des Aussehens des Saturnsringes benutzt. Ich bediente mich dabei meines 6 zölligen Refractors von Reinfelder & Hertel mit meist 310facher, nur selten stärkerer Vergrösserung. Bei stiller Luft zeigte sich die Cassinische Trennung auf der entfernteren Ringseite bis zum Rande des Planeten resp. seines Schattens mit völliger Deutlichkeit. Dagegen konnte sie auf der diesseitigen Hälfte des Ringes vor dem Planeten niemals bestimmt gesehen werden, was besonders auffallend Dec. 23 sich darstellte und was ich bereits an einem anderen Orte hervorgehoben habe. Febr. 1 6^h M. Z. Köln zeigte die Luft vorübergehend einen Zustand seltener Ruhe und Klarheit. Die Cassinische Trennung war auf der entfernteren Ringhälfte völlig schwarz bis zur Kugel des Planeten und ebenso auf der vorderen. Hier hörte die Schwärze der Linie nahezu da auf, wo der Ring über die Kugel hinwegzieht, und das fehlende Stück war nur durch einen höchst matten Strich angedeutet. Diesen letzteren hatte ich früher wiederholt vermuthet, aber nie sicher gesehen. Am jetzigen Abende erschien dagegen der dreifache Ring auch

Köln 1884 Febr. 2.

da, wo er auf den Planeten projicirt ist, mit völliger Schärfe: es zeigte sich der grauweisse äussere Ring sowohl, als der innere Floring vor der Planetenscheibe scharf abgegrenzt. Die Cassinische Trennung erschien mit letzterem (dem sogenannten dunklen Ringe) verglichen, äusserst schwach und fein; erst wo sie vom Planeten frei kam, wurde sie plötzlich wieder schwarz und breit.

Die an sehr grossen Instrumenten erhaltenen Zeichnungen des Saturn von den Herren Bond, Warren de la Rue und Trouvelot zeigen die Cassinische Linie in unveränderter Schwärze auch da, wo der Ring sich auf den Saturn projicirt und dieses muss auch wirklich der Fall sein, weil der Ring an jener Stelle den Planeten beschattet. Um so eigenthümlicher erscheint es daher, dass in den Monaten December und Januar diese Schwärze nicht zu erkennen war, sondern die Linie nur grau erschien. Noch möchte ich bemerken, dass der Schatten des Saturn auf dem Ringe im December und der ersten Hälfte des Januar nicht schwarz, sondern nur sehr dunkelgrau war, erst Jan. 24 sah ich ihn völlig schwarz und seitdem blieb er so.

Dr. Hermann F. Klein.

Schreiben v. Hrn. Prof. J. G. Galle, Director der Sternwarte in Breslau, an den Herausgeber.

Im vorigen Jahre hat Herr Dr. Kremser (früher Assistent an der hiesigen Sternwarte, seit einem Jahre an dem meteorologischen Institut in Berlin) eine neue, die vorhandenen Beobachtungen zusammenfassende Bahnberechnung des zweiten Cometen von 1879, entdeckt von Swift, ausgeführt und in seiner Inaugural-Dissertation veröffentlicht, deren Resultat eine Erwähnung in den Astr. Nachr. verdienen dürfte, um etwaige Doppel-Rechnungen zu vermeiden. Unter den 7 bis dahin berechneten Elementen-Systemen für diesen Cometen ist das schon sehr genährte und den weitesten Bogen umfassende von Dr. Franz als Grundlage benutzt worden und wurden aus den vom 20. Juni bis zum 23. Aug. sich erstreckenden 86 Beobachtungen 6 Normalörter gebildet.

Von den 12 für die Elementen-Verbesserung sich ergebenden Gleichungen sind zunächst 5 zu einer nur vorläufigen Verbesserung benutzt, um die schliesslichen Aenderungen auf die möglichste Kleinheit zu bringen. Als Endresultat ergab sich folgende wahrscheinlichste Parabel:

Comet 1879 II.

$$\begin{aligned} T &= \text{April } 27.459718 \pm 0.001557 \text{ M. Z. Berlin} \\ \alpha &= 49^\circ 30' 2'' 8 \pm 57'' 88 \\ \delta &= 45 \ 45 \ 39.5 \pm 16.17 \\ i &= 107 \ 2 \ 3.4 \pm 2.61 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T \\ \alpha \\ \delta \\ i \end{aligned}} \right\} \text{M. Aequin. 1879.0}$$

$$\log q = 9.952573 \pm 0.0000835$$