

9. Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Waagen; von Theodor Middell.

(Auszug aus einer Greifswalder Inaugural-Dissertation.)

I. Einleitung.

Bei ihrer auf der Spandauer Citadelle ausgeführten Bestimmung der Gravitationsconstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde¹⁾ beobachteten Richarz und Krigar-Menzel starke Schwankungen der Empfindlichkeit ihrer Waage.

Für drei längere Perioden, während deren an den Schrauben zur Regulirung der Empfindlichkeit und auch sonst an der Waage nichts geändert wurde, haben die Verfasser die Temperaturen und den Tageswert ω eines Scalenteiles in Milligrammen, also das Reciproke der Empfindlichkeit, in einer Tabelle zusammengestellt.²⁾ Dabei sind die einzelnen Tageswerte von ω gruppenweise zu Mitteln zusammengefasst und die Gruppen in erster Linie nach den Temperaturen, bei gleichmässig sich verändernden Temperaturen für möglichst gleiche Anzahl von Einzeltagen abgeteilt.

I. Periode.

Zeit	Zahl der Tage	Temperatur	Mittelwert von ω in 10^{-5} mg
11.—13. X. 1892	3	11,7°	3483
24. I. bis 18. II. 1893	7	5,0—6,3	3278
21. II. bis 14. III. 1893	6	6,5—6,7	3325

II. Periode.

18.—25. V. 1893	4	7,4—7,8°	3229
26.—31. V. 1893	3	7,9	3245
6.—23. VII. 1893	4	8,0—8,5	3318
28. IX. bis 5. X. 1893	4	10,9—11	3618
7. u. 9. X. 1893	2	11,1	3650

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Anh. zu den Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1898.

2) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, l. c. p. 38—40; ferner Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 54—55. 1899.

Zeit	Zahl der Tage	Temperatur	Mittelwert von ω in 10^{-5} mg
10.—19. X. 1893	5	11,2°	3714
24. u. 29. XI. 1893	2	9,8—9,7	3622
21.—28. II. 1894	4	7,3—7,2	3320
2. III. bis 11. IV. 1894	11	7,3—7,5	3389
21. VI. bis 23. VII. 1894	4	8,7—9,8	3503
4.—25. VIII. 1894	6	10,3—10,8	3582
4.—19. IX. 1894	7	11,0	3665
5.—22. XI. 1894	4	10,4—10,2	3707
3.—15. XII. 1894	3	9,8—9,2	3682
15.—26. I. 1895	6	8,1	3567
29. I. bis 9. II. 1895	5	7,6—6,6	3505
20. II. bis 7. III. 1895	7	6,1—6,3	3431

III. Periode.

21. u. 22. VI. 1895	2	8,5—8,6°	3597
2. u. 4. VII. 1895	2	9,1	3630
6. u. 10. VII. 1895	2	9,2	3645
15. u. 16. VII. 1895	2	9,4	3615
20. u. 22. VII. 1895	2	9,5—9,6	3682
25. u. 27. VII. 1895	2	9,7—9,8	3700
30. VII. u. 1. VIII. 1895	2	10,0	3740
14.—28. X. 1895	5	11,1—10,0	3775
29. X. bis 7. XII. 1895	5	9,9—9,1	3599
12. XII. 1895 bis 24. I. 1896	4	9,0—7,4	3534
28. I. bis 10. II. 1896	5	7,3—7,1	3508

Die Tabelle zeigt deutlich eine Zunahme von ω , also eine Abnahme der Empfindlichkeit $1/\omega$ mit steigender Temperatur. Sie beträgt für das Temperaturintervall von 5—12° etwa $1/10$ vom Ganzen.

Die Verfasser suchen die Erklärung dieses Verhaltens in der Annahme, dass die Oberseite des Waagebalkens einen grösseren thermischen Ausdehnungskoeffizienten habe als die Unterseite und stützen diese Annahme durch folgende Ueberschlagsrechnung.

Die Entfernung zwischen Spiegel und Scala betrug rund 5 m, der Ausschlag für 1 mg etwa 30 mm, die halbe Balkenlänge 117 mm, die Gesamtmasse von Balken, Gehängen und Gewichten rund 4000 g; daraus folgt der Abstand des Schwerpunktes unter der Mittelschneide zu etwa 0,01 mm.

Eine Balkenhälfte bilde ein Dreieck von der vertical stehenden Basis d , der oberen Seite l_1 und der unteren l_2 . Dann beträgt die Senkung s der Spitze unter dem Mittelpunkt der Basis

$$s = \frac{1}{2d}(l_1^2 - l_2^2),$$

und es wird, mit Rücksicht darauf, dass l_1 und l_2 nahe gleich l sind, die Aenderung von s auf eine Temperaturerhöhung Δt gefunden:

$$\Delta s = \frac{l^2}{d}(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \Delta t,$$

wenn α_1 und α_2 die beiderseitigen Temperaturcoefficienten sind. Nun müsste für $\Delta t = 7^\circ$ nach den obigen Beobachtungen

$$\Delta s = \frac{0,001}{10} = 0,0001 \text{ cm}$$

betragen. In die Formel ist einzusetzen $l = 11,7$ und d gleich etwa 4 cm. Hieraus würde folgen $\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \cdot 10^{-7}$.

Nach Lavoisier und Laplace¹⁾ beträgt $\alpha_1 - \alpha_2$ für gehämmertes gegen gegossenes Messing $2,3 \cdot 10^{-7}$, nach Smeaton²⁾ für gezogenes gegen gegossenes $5,8 \cdot 10^{-7}$, wo jedesmal der Guss sich schwächer ausdehnt. Der postulierte Wert $4 \cdot 10^{-7}$ liegt in der Mitte zwischen beiden.

Mit dieser Annäherung von $\alpha_1 - \alpha_2$ an andere Bestimmungen desselben Wertes wird die obige Erklärung der Abnahme der Empfindlichkeit in der That schon wahrscheinlich. Es kann zufällig die Oberseite des Waagebalkens stärker gehämmert worden sein als die Unterseite. Um aber ganz sicher zu sein, erübrigte es noch, den experimentellen Beweis für die thatsächlich stattfindende Senkung der Balkenenden bei Temperaturerhöhung zu liefern.

Diesen Beweis habe ich in vorliegender Arbeit zu bringen versucht.

II. Methode.

Die Senkung der Balkenenden, oder, was dasselbe ist, die Senkung der Verbindungslinie der Endschnitten unter die

1) A. L. Lavoisier u. P. S. Laplace, Marbach's physik. Lexikon 1. p. 99. 1835; Winkelmann's Handb. d. Phys. (II) 3. p. 47. 1896.

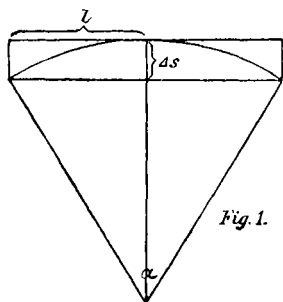
2) J. Smeaton, Marbach's physik. Lexikon 1. p. 99. 1835; Müller-Pouillet's Lehrb. d. Phys., alte Ausgabe 2. p. 447. 1853.

Mittelschneide durch lineare Messung bestimmen zu wollen, wäre bei ihrer verschwindenden Grösse von vornherein ausichtslos gewesen. Auf einem Umwege lässt sich diese Messung ausführen, wenn man die Formveränderung betrachtet, welche der Waagebalken unter dem Einflusse der Temperatur erleidet. Mit der Senkung der Balkenenden ist nämlich eine *Krümmung* des ganzen Balkens gegeben.

Man stelle sich eine Balkenhälfte als einen Rahmen von der Form eines Rechteckes vor. Diese Darstellungsweise entspricht weit eher der wirklichen Form des Waagebalkens als die unter I. zum Zwecke der Ueberschlagsrechnung gemachte Annahme. Es muss dann der Balken infolge der ungleichen Ausdehnung seiner oberen und unteren Seite im erwärmten Zustande eine von der Mitte nach den Enden zu continuirlich verlaufende Krümmung aufweisen.

Der Waagebalken bildet, wenn wir seine Höhe vernachlässigen, nach der thermischen Krümmung den Bogen eines Centriwinkels α , der sich bestimmt durch:

$$(1) \quad \alpha = \frac{2l}{r},$$



wo l die halbe Balkenlänge, r den Radius des Vollkreises, von dem $2l$ ein Teil ist, bezeichnet. Dieser Winkel α ist, sofern er sehr kleine Werte nicht überschreitet, und das findet im vorliegenden Falle statt, proportional der Senkung der Balkenenden, und zwar ist er dies durch Vermittlung von r .

Zur Bestimmung von r kann man aus Fig. 1 die Gleichung herleiten:

$$\Delta s (2r - \Delta s) = l^2$$

woraus folgt:

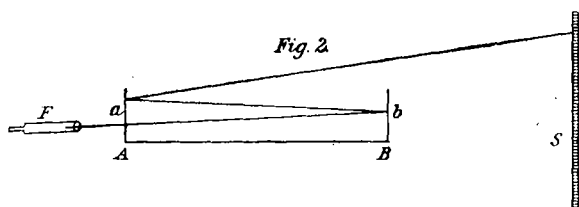
$$(2) \quad r = \frac{l^2}{2\Delta s}.$$

Setzt man diesen Wert für r in (1) ein, so folgt:

$$(3) \quad \alpha = \frac{4\Delta s}{l}.$$

Diesen Winkel α zu messen war denkbar nach einer von Helmholtz zum Zwecke der Bestimmung des Elasticitätsmoduls angegebenen, von A. König beschriebenen Methode.¹⁾

Auf den beiden Enden A und B des Balkens waren von Mechaniker Stückrath in Friedenau bei Berlin zwei kleine Spiegel a und b , mit den reflectirenden Flächen gegeneinander gekehrt, angebracht. Die von einer etwa 4,50 m entfernten beleuchteten Scala S entsandten Strahlen werden nach je einmaliger Reflexion an den beiden Spiegeln des in horizontaler Lage aufgestellten Balkens in einem an der gegenüberliegenden Seite befindlichen Fernrohre F aufgefangen. Fig. 2 zeigt die Anordnung in schematischer Darstellung.



Bei Krümmung des Balkens wird eine Neigung der Spiegel zu- oder voneinander eintreten, je nachdem sich die Balkenden heben oder senken. Jede derartige Neigung wird sich bei hinreichender Empfindlichkeit im Fernrohre durch einen Scalenausschlag bemerkbar machen, dessen Grösse ein Maass für die stattfindende Krümmung ist. Um der Methode eine hinreichende Empfindlichkeit zu geben, haben wir noch den besonderen Kunstgriff angewendet, dass wir die Strahlen erst nach *mehrmaligem Hin- und Hergange zwischen den Spiegeln* ins Fernrohr gelangen liessen. Zur Unterscheidung des zweiten Scalenbildes, d. h. des durch zweimaligen Hin- und Hergang der Strahlen entstandenen Bildes, von dem ersten Bilde hat man verschiedene Mittel. Zunächst ist es bedeutend lichtschwächer als das erste Bild. Um deutlich ablesen zu können, muss die Scalenbeleuchtung sehr intensiv sein. Ich habe mich bei meinen Versuchen transparenter ölgetränkter, auf einem dünnen Glasstreifen aufgeklebter Papierscalen bedient, deren

1) A. König, Verhandl. d. physik. Gesellsch. zu Berlin 4. p. IV und p. 59. 1885; Wied. Ann. 28. p. 108. 1886.

Beléuchtung durch eine dahinter gestellte elektrische Glühlampe geschah. Ferner unterscheidet sich das zweite Bild von dem ersten dadurch, dass es dem Auge als von vier Spiegelrändern umrahmt erscheint, während das erste Bild nur zwei derartige Rahmen aufweist. Ein drittes Unterscheidungsmerkmal besteht darin, dass man das Fernrohrocular näher an das Objectiv schrauben muss, wenn man von einer scharfen Einstellung auf das erste Bild zu einer solchen auf das zweite Bild gelangen will.

Bei den Vorversuchen gelang es immer, das zweite Bild im Fernrohre aufzufangen, bei den Versuchen des III. und IV. Teiles dagegen musste ich mich, infolge ungünstiger Veränderung der Spiegelstellung auf das erste Bild beschränken; bei den Versuchen des V. Teiles konnte aber wieder das zweite Bild benutzt werden.

Bei Zugrundelegung dieser Methode kann man mit Benutzung der unter I. mitgeteilten Daten *berechnen*, ob die zu untersuchende Krümmung nun auch wirklich von einer messbaren Grösse ist.

In der Spandauer Arbeit ist für das Temperaturintervall von 7° eine Krümmung bez. eine Senkung der Balkenenden von 0,001 mm angegeben. Nimmt man einen höheren Temperaturunterschied, z. B. von $105^{\circ} = 15.7^{\circ}$, so wird bei einem solchen, Proportionalität des Vorganges vorausgesetzt, die Senkung $15.0,001 = 0,015$ mm betragen.

Setzt man diesen Wert für Δs in den oben für α abgeleiteten Ausdruck ein, so erhält man:

$$\alpha = \frac{4 \cdot \Delta s}{l} = \frac{4 \cdot 0,015}{117} = 0,00051.$$

Jeder der beiden Spiegel erfährt eine Drehung um den Winkel $\alpha/2$. Bei der Beobachtung des nach je einmaliger Reflexion an jedem Spiegel zu stande kommenden Bildes erleiden die vom beobachteten Scalenteil ausgehenden Strahlen eine Drehung um den Winkel

$$4 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2\alpha.$$

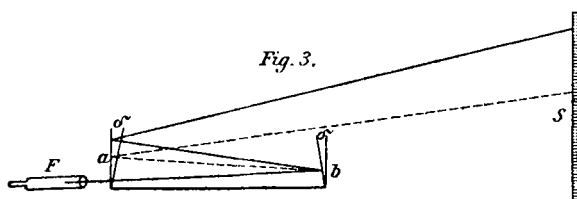
Dieser Ablenkung entspricht auf einer 4,50 m entfernten Scala ein Ausschlag von:

$$2 \cdot 0,00051 \cdot 4500 = 4,6 \text{ mm.}$$

Theoretisch ist hiermit die Möglichkeit einer Messung der Krümmung dargethan, schon für das erste Bild, a fortiori also für das zweite.

Die hier gegebene Berechnung der zu erwartenden Scalenablenkung ist nicht genau, weil die Wege von der Scala aus für die beiden Spiegel verschieden sind.

Bei der Krümmung mögen die Spiegel aus ihrer verticalen Stellung eine kleine Drehung je um den Winkel δ nach innen erfahren (Fig. 3). Der Abstand des Spiegels a von der Scala S sei D . Wir setzen dann voraus, dass die Strahlen senkrecht auf die Spiegel auffallen, was immer nahezu der Fall ist. In der Fig. 3 ist die Neigung der Strahlen übertrieben dargestellt.



Unter d sei die Entfernung der beiden Spiegel voneinander verstanden. Die gesamte auf S abzulesende Ablenkung ist dann $4\delta \cdot D + 2\delta \cdot d$ Scalenteile, während in der obigen Berechnung eine Ablenkung von nur $4\delta \cdot D = 2\alpha \cdot D$ Scalenteile angenommen wurde. Der berechnete Wert erhöht sich dadurch aber nur auf 4,7 mm.

Bei zweimaligem Hin- und Hergange der Strahlen ist der im Fernrohre zu beobachtende Ausschlag gleich $\delta(8D + 12d)$.

III. Verhalten des unbelasteten Waagebalkens beim Erwärmen.

Wurde der Waagebalken in einem Zimmer von gewöhnlicher Temperatur einer niedrigen Temperatur ausgesetzt, so war das Beschlagen der Spiegel nicht zu verhindern. Ich habe mich daher darauf beschränkt, sein Verhalten bei Temperaturerhöhung, mit der gewöhnlichen Zimmertemperatur als Anfangstemperatur, zu untersuchen. Bei späteren Versuchen, die weiter unten beschrieben sind, wurde allerdings unter Benutzung scharfer Winterkälte auch oft mit einer viel niedrigeren Anfangstemperatur begonnen.

Es sei bemerkt, dass die Spiegel an der Unterseite des Balkens angebracht waren — von der Lage gesprochen, welche er bei den Wägungen in Spandau hatte —, da eine an der Oberseite befindliche dachsparrenförmige Versteifung (vgl. Spandauer Abhandlung p. 29) die Beobachtung mit Beibehaltung der beim Wägen üblichen Lage unmöglich gemacht hätte. Die Lage des Balkens bei der jetzigen Beobachtung war also derart, dass die Seite mit dem vermutlich grösseren Wärmeausdehnungskoeffizienten nach unten gekehrt war. Beim Erwärmen musste eine Neigung der Spiegel nach innen zu eintreten, was auf der Scala, die entsprechende Lage derselben vorausgesetzt, einen Ausschlag von höheren zu niederen Scalenteilen bewirkte.

Um dem Balken eine für die Beobachtung passende Lage zu geben, war auf seiner Mitte zwischen den beiden Spiegeln eine etwa 30 cm lange, am unteren Ende zum Zwecke der Befestigung horizontal umgebogene, flache Messingstange aufgeschraubt, die mit ihrem oberen Ende in ein festes Stativ eingeklemmt wurde.

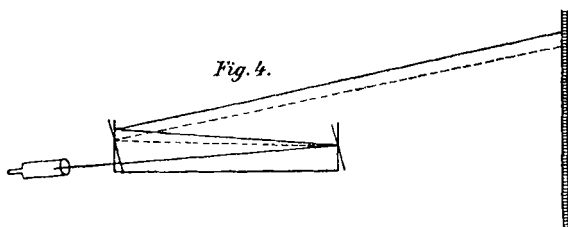
Die Erwärmung geschah im Wasserbade, in welchem der Balken bis auf die Spiegel, die aus dem Wasser hervorragen mussten, vollständig untergetaucht wurde. Um die Spiegel vor dem zerstörenden Einfluss des Wassers zu schützen, hatte Hr. Stückrath unter jedem einen kleinen runden Teller angebracht. Durch eine auf der Oberfläche des Wassers ausgebreitete Oelschicht wurde das Aufsteigen von Wasserdampf, der eine Ablesung sehr erschwert hätte, verhindert.

Schon bei den ersten Versuchen, die in der Weise angestellt wurden, dass das Bild der Scala nach je einmaliger Reflexion der Strahlen an jedem Spiegel im Fernrohre an der gegenüberliegenden Seite beobachtet wurde, trat immer ein Ausschlag in der im Falle der vermuteten Krümmung zu erwartenden Richtung von höheren zu niederen Scalenteilen ein. Aber es war damit noch nicht vollkommen sicher, ob dieser Ausschlag von der festzustellenden Krümmung herrührte. Ausser der Krümmung konnte der Waagebalken beim Erwärmen noch *Drehungen* erleiden infolge von thermischen Verzerrungen seiner Befestigung.

Zum Beispiel konnte eine mit der Temperatur zunehmende

Drehung, hervorgerufen durch ungleichmässige Ausdehnung der beiden Seiten des Messinghalters oder des Stativs, welches diesen hielt, eine Scalenablenkung in demselben Sinne herbeiführen wie die Krümmung.

Dies ist der Fall, wenn eine Senkung des dem Fernrohre zugekehrten Balkenendes eintritt, hervorgerufen durch eine etwaige stärkere Ausdehnung der zugewandten Seite des Halters. In Fig. 4 sind vom Balken in der Lage, die er nach erfolgter Drehung inne hat, nur die beiden Spiegel gezeichnet. Die Strahlen, die bei dieser Stellung der Spiegel — in der Fig. 4 sind sie durch die gestrichelten Linien bezeichnet — zur Beobachtung gelangen, kommen von einer tiefer gelegenen Stelle der Scala. Wir haben also einen Ausschlag in demselben



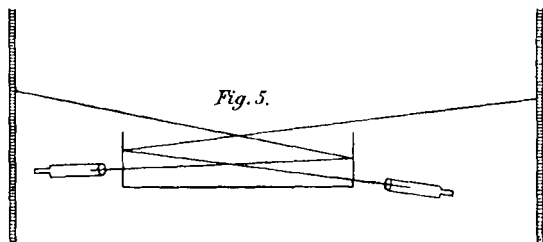
Sinne, wie ihn die Krümmung hervorbringt, ohne dass er in diesem Falle von einer solchen herrührt. Eine Drehung des Balkens im umgekehrten Sinne wird auch einen Ausschlag in entgegengesetzter Richtung zur Folge haben, d. h. einen Ausschlag von niederen zu höheren Scalenteilen. Eine gleichzeitig mit der Krümmung des Balkens stattfindende Drehung desselben wird den durch die Biegung bewirkten Ausschlag vermindern oder vergrössern, je nachdem die Drehung in dem einen oder in dem anderen Sinne erfolgt.

Diese durch Drehung des Balkens hervorgerufene Vergrösserung oder Verminderung des Ausschlages beträgt $d \cdot 2 \epsilon$ Scalenteile, wo d der Abstand der beiden Spiegel, ϵ die Drehung ist, welche jeder der beiden Spiegel erfährt. Wie bei der Berechnung des nur durch Biegung bewirkten Ausschlages auf die Entfernung der beiden Spiegel keine Rücksicht genommen zu werden brauchte, so kann man auch hier die Grösse $d \cdot 2 \epsilon$ vernachlässigen, gegen $D \cdot 2 \epsilon$, sofern ϵ kleine Werte nicht überschreitet. Dennoch war es wünschenswert,

bei den Veränderungen der Scaleneinstellung ganz sicher zwischen Biegung und Drehung unterscheiden zu können. Zu diesem Zwecke wurde folgende Versuchsanordnung gewählt.

Jedem Spiegel wurde in einer Entfernung von 4,50 m eine transparente beleuchtete Scala gegenübergestellt und die Strahlen derselben nach Reflexion an nur einem Spiegel in einem an derselben Seite des Balkens befindlichen Fernrohre aufgefangen. Fig. 5 zeigt, wie die Anordnung gemeint ist.

Bei Neigung beider Spiegel nach innen zu, wie es die Theorie bei Biegung verlangt, wird in beiden Fernrohren eine Ablenkung von höheren zu niederen Scalenteilen zu beobachten sein, während bei einer Drehung die Ablenkung in dem einen Fernrohre in entgegengesetzter Richtung vor sich geht wie in dem anderen.



Diese beiden Fernrohre dienen also zur Controle der Form- und Lagenveränderungen, welche der Balken als Ganzes während des Versuches erleidet (*Controlfernrohre*). Durch ein drittes Fernrohr (*Hauptfernrohr*) wird das Bild einer der beiden Scalas, von beiden Spiegeln wie in Fig. 2 entworfen, oder auch erst nach zweimal doppelter Reflexion beobachtet.

In den Controlfernrohren giebt eine Drehung um ε eine Scalablenkung von $2\varepsilon \cdot D$. In die Ablesung am Hauptfernrohr geht dieselbe Drehung mit $2\varepsilon \cdot d$ ein. D war rund das 20fache von d . Die Controlfernrohre geben bei allen Versuchen, wenn überhaupt Drehungen, so nur solche von einigen Scalenteilen an. Der Einfluss der Drehungen auf die Ablesung im Hauptfernrohr war also stets verschwindend.

Die in dieser Weise angestellten Versuche ergaben folgende *Resultate*.

Das Hauptfernrohr zeigte einen Ausschlag von höheren zu niederen Scalenteilen an; die Controlfernrohre liessen im allgemeinen Ausschläge in demselben Sinne beobachten. Die Ablenkung in dem Hauptfernrohr war nahezu gleich der Summe der Ablenkungen in den Controlfernrohren, ein Beweis, dass thatsächlich Neigung der Spiegel nach innen zu, herrührend von einer Krümmung des Balkens nach oben, eingetreten war, dass dagegen die Drehung, wenn überhaupt vorhanden, nur klein war. In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer derartigen Versuchsreihe zusammengestellt. Die Controlfernrohre sind als rechtes und linkes unterschieden. Die Veränderungen der Scaleneinstellungen sind in Temperaturintervallen von 10° angegeben.

Die Anfangstemperatur ist die jeweilige Zimmertemperatur, meist 12° . Ueber 75° ist die Erwärmung nicht ausgedehnt. War die Temperatur vollständig wieder auf die ursprüngliche Temperatur vor dem Erwärmen zurückgegangen, so wurde nochmals abgelesen. Waren während der Erwärmung keine anderweitigen Störungen aufgetreten, so musste jedes Fernrohr die ursprüngliche Scaleneinstellung wieder anzeigen, was natürlich selten ganz genau der Fall war. Es wurden aber nur solche Versuchsreihen als zuverlässig betrachtet, bei welchen wenigstens nahezu Rückkehr zu den ursprünglichen Einstellungen eingetreten war. Die letzte Horizontalreihe in jeder Tabelle, durch einen Strich von den übrigen Ablesungen getrennt, giebt diese Scaleneinstellung an.

Die Tabellen lassen im allgemeinen ein der Zunahme der Temperatur nicht proportionales Wachsen der Krümmung erkennen. Dies erklärt sich folgendermaassen.

Die Länge l eines Metallstabes ist eine Function der Temperatur ϑ .

$$l = l_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta + \beta \cdot \vartheta^2 + \dots)$$

Wenn man vom „Ausdehnungscoefficienten“ schlechtweg spricht, so meint man α und denkt sich die höheren als linearen Glieder der Entwicklung vernachlässigt. Unsere Krümmung war die Folge von sehr kleinen Differenzen in der

thermischen Ausdehnung. Es ist klar, dass für solche sehr kleinen Differenzen die Vernachlässigung der höheren als nach ϑ linearen Glieder durchaus unstatthaft ist. Dann wird auch die Krümmung, welche der Differenz der thermischen Ausdehnung proportional ist, keineswegs mehr der Temperatur proportional wachsen. Vielmehr kann der Fall eintreten, dass die Krümmung in dem einen Temperaturintervall schneller, in dem anderen langsamer als die Temperatur wächst, oder auch dass sie für einen Bereich constant bleibt, wie es in der That beobachtet wurde.

Die folgende Tabelle ist aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen als Beispiel ausgewählt.¹⁾

Hauptfernrohr Scaleneinstellung		Controlfernrohre	
		links	rechts
13°	108	207	88
25°	105,0	205,9	87,2
35	105,0	205,9	87,2
45	105,0	205,9	87,2
55	103,3	205,3	86,7
65	101,2	205,3	84,2
75	100,7	204,7	84,2
13°	108	207	88
Gesamt- auschlag von 13—75° 7,3 Scalenteile		Teilausschläge von 13—75° 2,3 Scalenteile von 13—75° 3,8 Scalenteile Summe: 6,1 Scalenteile	

Derartige Versuchsreihen wurden in grosser Anzahl gemacht.

Aus allen zuverlässigen Beobachtungsreihen ergibt sich übereinstimmend, dass in der That die Temperaturerhöhung eine Krümmung des Balkens in dem Sinne bewirkt, wie er nach den in Spandau gemachten Erfahrungen und nach der von Richarz und Krigar-Menzel angenommenen Erklärung

1) Die Zahlen mehrerer anderer Versuchsreihen sind in der Dissertation angegeben. Die hier wiedergegebene ist die mit I bezeichnete auf p. 26 nach Anbringung von Reductionen auf den sonst stets gewählten Scalenabstand von 4,5 m.

derselben zu vermuten war. Was die Grösse der Krümmung angeht, so ist der im II. Teile für eine Temperaturerhöhung um 105° vorherberechnete Ausschlag von rund 5 Scalenteilen in den meisten Versuchsreihen schon für das Intervall von $13-75^{\circ}$, also für eine Erwärmung von 62° , mit einem Ausschlag von etwa 7 Scalenteilen übertroffen. Diese Nichtübereinstimmung von Berechnung und Versuch ist die Folge der bei der Vorherberechnung gemachten Annahme einer der Temperatur *proportional* erfolgenden Krümmung, welche Annahme sich jetzt als unzulässig erwies. Die von Richarz und Krigar-Menzel constatirte Abnahme der Empfindlichkeit gilt nur für das Temperaturintervall von $5-12^{\circ}$. Nach unseren Versuchen wäre diese Abnahme für dieselbe Differenz von 7° aber zwischen anderen Temperaturgrenzen verschieden ausgefallen. Ueber die wahrscheinliche Grösse der thermischen Krümmung war also von vornherein durch Rechnung nichts Bestimmtes auszusagen, da die Rechnung in diesem Falle auf die unerwiesene Voraussetzung einer proportional der Temperatur verlaufenden Krümmung gegründet werden musste. Aus diesem Grunde ist also auch die Nichtübereinstimmung der beobachteten Krümmung mit der berechneten völlig belanglos.

Uebrigens kann man die thermische Veränderung der Empfindlichkeit der Spandauer Waage auch grösser als zu $\frac{1}{10}$ vom Ganzen annehmen; z. B. folgt aus dem Maximum (3714) und dem Minimum (3229) der zweiten Periode (vgl. oben p. 115 u. 116) eine Veränderung von $\frac{1}{7}$ vom Ganzen, und zwar für eine Temperaturdifferenz von nur $3,6^{\circ}$. Daraus würde für unsere Versuche eine Ablenkung von 7,6 Scalenteilen bei der Erwärmung um 62° folgen, die mit der beobachteten fast genau übereinstimmt.

Als das Verhalten des Waagebalkens bei Belastung (vgl. folgendes Capitel) untersucht werden sollte zeigte sich die Erscheinung, dass der Balken im Verlaufe der zahlreichen Versuche die Eigenschaft, sich zu krümmen, fast vollständig verloren hatte. Da diese Versuche während einer Frostperiode angestellt wurden, so konnte man die Erwärmung mit einer niedrigeren Anfangstemperatur als der gewöhnlichen Zimmertemperatur beginnen. Das Beschlagen der Spiegel konnte jetzt

nämlich dadurch verhindert werden, dass die Temperatur des Arbeitszimmers auf die draussen herrschende Temperatur gebracht wurde. Statt des Wassers von gewöhnlicher Temperatur wurde eine Kältemischung in die Wanne, in welcher die Erwärmung des Balkens vorgenommen wurde, gebracht. Mit der Temperatur der Kältemischung beginnend, wurde die Erwärmung wie früher bis auf 60° oder 70° fortgesetzt.

Die Ausschläge, die jetzt für das Temperaturintervall von $15-75^{\circ}$ beobachtet werden konnten, waren bedeutend kleiner als die früheren in den Versuchsreihen des Abschnittes III mitgeteilten, ein sicherer Beweis, dass die thermische Krümmung sich sehr vermindert hatte.

Diese Abnahme der thermischen Krümmung lässt sich leicht erklären, wenn man annimmt, dass durch das wiederholte Erwärmen Veränderungen in der molecularen Structur des Balkenmetalles eingetreten sind. Erwärmt man ein Stück Metall, welches zuvor gehämmert oder gezogen wurde, so hat dasselbe nach dem Erkalten seine ursprüngliche Weichheit wieder erlangt. Demnach kann man annehmen, dass die stärker gehämmerte Oberseite des Waagebalkens allmählich ihre grössere Härte und damit ihren grösseren Ausdehnungscoefficienten verlor, wodurch der Balken die Eigenschaft, sich beim Erwärmen zu krümmen, einbüsste.

IV. Verhalten des belasteten Waagebalkens beim Erwärmen.

Die Spandauer Beobachtungen über die Abnahme der Empfindlichkeit sind bei belasteter Waage angestellt. Es war also auch zu untersuchen, welchen Anteil die Belastung an der thermischen Krümmung hatte.

Die Ausdehnung eines Metalles durch die Wärme wächst nämlich mit zunehmender Spannung.¹⁾ Da nun bei belasteter Waage die Oberseite des Balkens einen Zug, die Unterseite dagegen eine Zusammendrückung erleidet, so war eine Vergrösserung der thermischen Krümmung durch die Belastung theoretisch von vornherein sicher. Es blieb nur fraglich, wie gross sie war. Bei den von mir angestellten Versuchen, bei

1) G. R. Dahlander, Pogg. Ann. 145. p. 147. 1872; A. Winkelmann, Handbuch der Phys. 2. Abt. 2. p. 60. 1896.

welchen die Endschnitten des Balkens gerade so stark belastet wurden, wie in den Spandauer Versuchen, stellte sich heraus, dass eine Vergrößerung der thermischen Krümmung nicht eintrat. Nach den Resultaten des vorigen Capitels war dieses negative Ergebnis zu erwarten. Auf die in Spandau beobachtete Krümmung hat also die Belastung keinen merklichen Einfluss ausgeübt. Von der rein elastischen Durchbiegung durch die Belastung ist in dieser Arbeit natürlich nie die Rede.

Die Versuchsanordnung war folgende:

Da der Balken bei den vorliegenden Versuchen die umgekehrte Lage hatte wie bei den Wägungen, so musste die Belastung der Seitenschnitten durch eine nach oben gerichtete Kraft geschehen. Zu diesem Zwecke waren nahe am oberen Ende des Messinghalters, mit welchem der Balken in das Stativ eingeklemmt wurde, zwei dem Balken parallele und nahezu ebenso lange Messingstreifen angebracht, der eine vor, der andere hinter dem Halter. Eine nahe am Ende der Streifen befindliche Querverbindung diente als Unterstützungspunkt eines Hebels, an dessen kürzerem Arme ein Draht befestigt war, der an seinem unteren Ende mittels einer Pfanne unter die Endschneide der betreffenden Seite griff. Am Ende des längeren Hebelarmes hing ein Gewicht von 200 g. Das Verhältnis der Hebelarme war 1:10; auf die beiden Seitenschnitten wirkte also je eine Kraft von 2000 g. Fast gerade so gross war die Belastung der Schnitten in den Spandauer Versuchen.

Die Versuche mit der Belastung wurden angestellt, als der Balken bereits die Fähigkeit, sich bei Erwärmung zu krümmen, eingebüsst hatte. Dass die Belastung ohne Einfluss sei, wird sich also in diesem Falle in der Weise bekunden, dass an der belasteten Waage bei Temperaturerhöhung ebenfalls kein oder nur ein geringer Ausschlag eintrat. Dies haben die Versuche in der That ergeben, bei denen zur Erhöhung der Sicherheit abwechselnd ohne Belastung und mit Belastung beobachtet wurde. Zur Erklärung der thermischen Krümmung des Balkens bleiben daher lediglich Structurverschiedenheiten der oberen und der unteren Seite des Waagebalkens in der Weise, dass die Oberseite sich stärker bei Erwärmung ausdehnt.

V. Thermische Krümmung zweier fest miteinander verbundener Stäbe, der eine aus gewalztem, der andere aus gegossenem Messing.

Die thermische Krümmung des Waagebalkens ist durch die Versuche des III. Theiles nachgewiesen. Die Structurverschiedenheiten seiner Ober- und Unterseite, die zur Erklärung angenommen werden müssen, sind als zufällige vorauszusetzen. Es schien nicht uninteressant, einen besonderen Apparat mit den postulirten Structurverschiedenheiten herzustellen, die Differenz der Ausdehnungscoefficienten zu bestimmen und die Krümmung des Apparates zu messen.

Dieser Apparat, der ebenfalls aus der Werkstatt des Hrn. Stückrath stammte, bestand aus zwei rectangulären flachen Messingstäben von je 165 mm Länge, 15 mm Breite, und 6,5 mm Dicke. Sie waren durch zwei starke Stahlschrauben in der Nähe ihrer Enden in einem Abstände von 3,5 mm parallel zu einander verbunden. Vor und hinter einer Schraube, mit dieser in derselben Querschnittsebene, befand sich je eine Stahlkugel zwischen den beiden Messingstäben, welche letzteren durch die beiden Schrauben auf die vier Kugeln unter Vermeidung jeder elastischen Biegung aufgedrückt wurden.

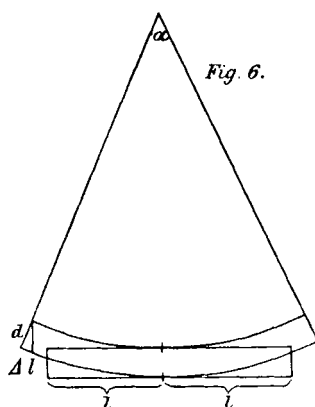
Der obere Stab war weiches gegossenes Messing, der untere hart gewalztes. Auf den Enden des oberen Stabes waren wiederum zum Zwecke der Beobachtung zwei verticale Spiegel angebracht, während ein auf seiner Mitte aufsitzender Messinghalter ein passendes Einklemmen in ein festes Stativ ermöglichte. Zur Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten der beiden flachen Messingstücke waren zwei dünne runde Stäbe von 10 cm Länge angefertigt aus je demselben Material. Die Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten geschah mit dem Fühlhebelapparat von Fuess.¹⁾ Unter Beobachtung aller Vorsichtsmaassregeln erhielt ich die folgenden vier, ziemlich Uebereinstimmung miteinander zeigenden Bestimmungen. Mit α_1 ist der Ausdehnungscoefficient des härteren (gewalzten) Stabes bezeichnet (unterer Teil des Apparates), mit α_2 der des weicheren (gegossenen) Stabes (oberer Teil des Apparates).

1) P. Glatzel, Pogg. Ann. 160. p. 497. 1877.

1. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0,0000\ 204 \\ \alpha_2 = 0,0000\ 196 \end{array} \right\}$
2. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0,0000\ 205 \\ \alpha_2 = 0,0000\ 190 \end{array} \right\}$
3. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0,0000\ 205 \\ \alpha_2 = 0,0000\ 193 \end{array} \right\}$
4. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0,0000\ 204 \\ \alpha_2 = 0,0000\ 196 \end{array} \right\}$.

Für $(\alpha_1 - \alpha_2)$ ergibt sich im Mittel daraus der Wert $10,75 \cdot 10^{-7}$, ein Wert, der annähernd doppelt so gross ist, wie der von Smeaton für gezogenes gegen gegossenes Messing gefundene und annähernd dreimal so gross wie der von Richarz und Krigar-Menzel postulierte Wert. Von Interesse ist noch, dass auch der Ausdehnungskoeffizient eines Stabes bestimmt wurde, der aus dem gewalzten Material gegossen wurde; wie vermutet, war der Ausdehnungskoeffizient nahezu auf α_2 heruntergegangen.

Da die untere Hälfte des Apparates den grösseren Ausdehnungskoeffizienten besitzt, so wird bei Temperaturerhöhung, falls eine Krümmung der beiden Metallstäbe stattfindet, ebenso wie in den früheren Versuchen eine Neigung der Spiegel nach innen zu und dementsprechend wiederum eine Scalenablenkung von höheren zu niederen Scalenteilen eintreten.



Zur Berechnung des Ausschlages aus der Differenz der Ausdehnungskoeffizienten hat man zunächst den Winkel zu bestimmen, den die Spiegel nach erfolgter Krümmung miteinander bilden.

Wie aus Fig. 6 zu ersehen ist, besteht zwischen der Entfernung d der beiden Metallstäbe (deren Dicke vernachlässigt ist), der durch die ungleiche Ausdehnung bewirkten Differenz ihrer halben Längen Δl und dem Winkel α die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta l}{d}$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{2 \Delta l}{d}.$$

Von den beiden zur Bestimmung von α dienenden Grössen ist d direct durch lineare Messung zu bestimmen. Was dabei

als Abstand der beiden Metallstäbe zu betrachten ist, ergibt sich aus folgender Ueberlegung.

Man denke sich die Metallstäbe immer dünner werden in der Weise, dass man schliesslich zwei verschwindend dünne Metallstreifen bekommt, ein idealer Fall, wie er in Fig. 6 gezeichnet ist, wo die beiden Stäbe durch Linien dargestellt sind. Diesen beiden Metallstreifen, welche erwärmt denselben Ausschlag liefern, wie die beiden Metallstäbe von der angegebenen Dicke, ist etwa eine Entfernung zuzuschreiben, welche gleich ist der Entfernung der beiden Stabmitten voneinander. Für d ist also in die obige Gleichung die Entfernung der beiden Stabmitten, die nach Messung 10 mm betrug, einzusetzen.

Die Längendifferenz $2 \Delta l$ der beiden Stäbe wird gefunden durch die Gleichung:

$$2 \Delta l = 2l \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \Delta t.$$

Hier ist $2l$ die Länge eines der beiden Stäbe, gemessen zu 165 mm; Δt ist die Temperaturerhöhung, die bei 15° beginnend, bis zu 75° fortgesetzt wurde; $(\alpha_1 - \alpha_2)$ hat den oben angegebenen Wert $10,75 \cdot 10^{-7}$.

Demnach ist:

$$2 \Delta l = 165 \cdot 10,75 \cdot 10^{-7} \cdot 60 = 0,01 \text{ mm.}$$

Setzt man für d und $2 \Delta l$ die Werte ein, so erhält man:

$$\alpha = \frac{0,01}{10} = 0,001.$$

Auf einer 4,50 m entfernten Scala wird bei Beobachtung des ersten durch je einmalige Reflexion an jedem Spiegel entstehenden Bildes eine Ablenkung von $2 \cdot 4500 \cdot 0,001 = 9$ Sct. entstehen, bei Beobachtung des zweiten Bildes eine solche von der doppelten Grösse, also von 18 Sct.

Die Versuchsanordnung war dieselbe wie früher, doch gelang es jetzt, das zweite Bild einer der beiden Scalen, durch zweimaligen Hin- und Hergang der Strahlen zwischen beiden Spiegeln entstehend, im Hauptfernrohr zu beobachten, während in den Controlfernrohren wie immer die Strahlen nach Reflexion an nur einem der beiden Spiegel aufgefangen wurden. Die folgende Tabelle giebt die erste derartige Versuchsreihe wieder.

Hauptfernrohr Scaleneinstellung		links	Controllfernrohre Scaleneinstellung rechts
15°	265,5	65,5	186,8
25°	262	65	186
35	260	64,5	185,5
45	260	64,5	185,5
55	259	64	186
75	252	62	184,5
Gesamtausschlag:		Teilausschläge:	
13,5 Scalenteile		3,5 Scalenteile	2,3 Scalenteile
		Summe: 5,8 Scalenteile	

Jetzt muss, da das zweite Bild im Hauptfernrohr beobachtet wird, im Gegensatz zu früher, die doppelte Summe der Teilausschläge nahezu den Gesamtausschlag im Hauptfernrohr ergeben. In allen folgenden Versuchsreihen stimmte dies weit besser als zufällig gerade in dieser ersten.¹⁾ Dass der Gesamtausschlag nur zu 13,5 gefunden wird, statt der 18 Scalenteile der Berechnung, liegt wohl hauptsächlich daran, dass bei letzterer die beiden Messingstreifen als verschwindend dünn betrachtet wurden.

Die sämtlichen Versuchsreihen beweisen zunächst, dass der Apparat auf Grund der jetzt wohlbekannten Strukturverschiedenheiten zwischen seiner oberen und unteren Hälfte ebenfalls eine thermische Krümmung von annähernd der berechneten Grösse erleidet. Ein Vergleich der durch das Hauptrohr angegebenen Gesamtausschläge der einzelnen Versuchsreihen zeigte sodann, dass ebenfalls wieder eine fortschreitende Abnahme dieser Krümmung eintrat. Bezüglich der Erklärung dieser letzteren Erscheinung verweise ich auf den III. Teil, wo gegen Schluss das zum Verständnis Erforderliche gesagt ist. Jetzt zeigten aber nur die drei ersten Versuchsreihen eine schnelle Abnahme der Krümmung, während die späteren von einer solchen Abnahme nichts mehr erkennen liessen. Es ist von vornherein als sicher anzunehmen, dass die gänzliche

1) Vgl. die Tabellen in der Dissertation.

Beseitigung der Structurverschiedenheiten an diesem Apparate höhere Temperaturen und eine längere Zeit erfordern würde, als am Waagebalken, wo diese Structurverschiedenheiten als zufällige geringer waren und infolge dessen auch leichter herabgesetzt werden konnten.

VI. Kurze Zusammenfassung.

1. Die von Richarz und Krigar-Menzel beobachtete Abnahme der Empfindlichkeit ihrer Waage bei steigender Temperatur beruhte auf einer im III. Teil der vorliegenden Arbeit nachgewiesenen thermischen Krümmung des Balkens, bedingt durch Structurverschiedenheiten zwischen Ober- und Unterseite desselben.

2. Diese Structurverschiedenheiten, die als zufällige anzunehmen waren, nahmen durch wiederholtes Erwärmen und Abkühlen bedeutend ab, sodass schliesslich nur mehr eine geringe Krümmung beim Erwärmen eintrat, die durch eine sehr empfindliche optische Beobachtungsmethode kaum noch nachzuweisen war.

3. Die in der Spandauer Arbeit angewandte Belastung hat auf die Grösse der thermischen Krümmung keinen nennenswerten Einfluss gehabt. (IV. Teil der vorliegenden Arbeit.)

4. An zwei in passender Weise miteinander verbundenen Metallstäben, mit denselben Structurverschiedenheiten, wie sie für den Spandauer Waagebalken anzunehmen waren, lässt sich sowohl die thermische Krümmung als auch die Abnahme derselben bei Anstellung öfterer Beobachtungen nachweisen. (V. Teil dieser Arbeit.)

Greifswald, Physik. Inst. d. Univ., März 1900.

(Eingegangen 30. März 1900).
