Ueber die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

Martin Krause in Rostock.

In seinen Arbeiten über die Abel'schen Functionen giebt Hermite*) die Grundzüge einer Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Diese Theorie ist durch eine Reihe weiterer Arbeiten ausgebildet worden, vor allem sind die Transformationen ersten, zweiten und dritten Grades einer genaueren Betrachtung unterzogen worden.**)

Die folgende Arbeit hat den Zweck für die Transformation fünften Grades analoge Untersuchungen durchzuführen.

Sämmtliche Transformationen fünften Grades:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

bei welchen zwischen den Transformationszahlen gewisse nicht näher anzugebende Relationen bestehen, lassen sich in $1 + 5 + 5^2 + 5^3$ nicht äquivalente Classen theilen, die so beschaffen sind, dass sämmtliche in einer Classe befindlichen Systeme durch Transformationen aus einander abgeleitet werden können, deren Determinante die Einheit ist. Als Repräsentanten mögen folgende gewählt werden:

---

*) Hermite: Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. Comptes rendus tome XL. 1855.

**) Weber: Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen. Crelle 74.
Königsberger: Ueber die Transformation des zweiten Grades für die Abel'schen Functionen erster Ordnung. Crelle 67.
Königsberger: Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Crelle 67.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & 5 & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wo die Grössen i, i', i'' die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 bedeuten können.*)

Wir setzen:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = e^{\pi i f(v_1, v_2)} \vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_\lambda$$

wobei:

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) = (a_0 v_1 + b_0 v_2)(a_3 v_1 + b_3 v_2) + (a_1 v_1 + b_1 v_2)(a_2 v_1 + b_2 v_2) \\ + \tau_{11}'(a_3 v_1 + b_3 v_2)^2 + 2\tau_{12}'(a_2 v_1 + b_2 v_2)(a_3 v_1 + b_3 v_2) \\ + \tau_{22}'(a_2 v_1 + b_2 v_2)^2 \end{aligned}$$

ist, ferner v_1', v_2', τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' die Argumente und Moduln der transformirten ϑ-Functionen bedeuten. Die Bezeichnungsweise der ϑ-Functionen ist die von Weierstrass eingeführte.

Hierbei können und wollen wir uns, ohne der Allgemeinheit der Untersuchungen Abbruch zu thun, von vorne herein auf diejenigen Transformationen beschränken, welche den oben eingeführten Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen entsprechen.

Dann können wir nach Hermite setzen:

$$\begin{aligned} \Pi(v_1, v_2)_5 = (1)\vartheta(v_1, v_2)_5^3\, \vartheta(v_1, v_2)_1^2 + (2)\vartheta(v_1, v_2)_5^3\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}^2 \\ + (3)\vartheta(v_1, v_2)_5^3\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}^2 + (4)\vartheta(v_1, v_2)_5^2\, \vartheta(v_1, v_2)_1\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}\, \vartheta(v_1, v_2)_{34} \\ + (5)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_1^4 + (6)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}^4 \\ + (7)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}^4 + (8)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}^2\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}^2 \\ + (9)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}^2\, \vartheta(v_1, v_2)_1^2 + (10)\vartheta(v_1, v_2)_5\, \vartheta(v_1, v_2)_1^2\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}^2 \\ + (11)\vartheta(v_1, v_2)_1^3\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}\, \vartheta(v_1, v_2)_{34} + (12)\vartheta(v_1, v_2)_1\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}^3\, \vartheta(v_1, v_2)_{34} \\ + (13)\vartheta(v_1, v_2)_1\, \vartheta(v_1, v_2)_{02}\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}^3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Aufgabe der Transformation fünfter Ordnung besteht in der Bestimmung der Constanten (1), (2), $\cdot\cdot$ (13). Indem wir dieselbe lösen, werden sich zu gleicher Zeit einige Relationen zwischen den Differentialquotienten der ursprünglichen und der transformirten ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente ergeben.

Die Aufgabe soll dadurch gelöst werden, dass die 16 Substitutionen angewendet werden, welche $\vartheta(v_1, v_2)_5$ in die 16 möglichen ϑ-Functionen überführen. Nach Vornahme dieser Operation wird in denjenigen Gleichungen, welche einer Transformation von $\vartheta(v_1, v_2)_5$ in eine der 10 geraden ϑ-Functionen entspricht, $v_1 = v_2 = 0$ gesetzt, während in den 6 anderen Gleichungen zuerst nach v_1 und v_2 differenzirt und dann $v_1 = v_2 = 0$ gesetzt werden soll.

*) Siehe Crelle 67, pag. 99.

Hierbei machen wir für die rechten Seiten Gebrauch von der von Herrn Königsberger, Crelle 64. pag. 23 angegebenen Tabelle.

Die Werthe der linken Seite ergeben sich auf folgende Weise:

Setzt man an Stelle von

$$v_1 : v_1 + \tfrac{1}{2}m_1 + \tfrac{1}{2}n_1\tau_{11} + \tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},$$

von

$$v_2 : v_2 + \tfrac{1}{2}m_2 + \tfrac{1}{2}n_1\tau_{21} + \tfrac{1}{2}n_2\tau_{22},$$

so wird:

$$\Pi(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1 + \tfrac{1}{2}n_1\tau_{11} + \tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},\ v_2 + \tfrac{1}{2}m_2 + \tfrac{1}{2}n_1\tau_{21} + \tfrac{1}{2}n_2\tau_{22})_5$$
$$= E e^{ci\pi} e^{f(v_1, v_2)} \vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_\nu,$$

wobei unter den angeführten Beschränkungen E die bei der Vermehrung der Argumente v_1, v_2 um die angegebene Grösse zur k^{ten} Potenz der ursprünglichen ϑ-Function hinzugekommene Exponentialgrösse bedeutet und ferner nach einigen leichten Reductionen wird:*)

$$c = -\tfrac{1}{2}(n_1 m_1 + n_2 m_2),$$

während der Index der ϑ-Function sich aus den Congruenzen ergiebt:

$$m_1^\nu \equiv m_1, \quad m_2^\nu \equiv m_2, \quad n_1^\nu = n_1, \quad n_2^\nu \equiv n_2 \mod 2.$$

Hiermit sind alle Daten für die Rechnung gegeben:

Bezeichnen wir noch den Werth von $\vartheta(v_1', v_2')_\lambda$ für $v_1' = v_2' = 0$ mit 0_λ, so ergeben sich zunächst folgende Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} 0_5 = (3)\vartheta_5^3\,\vartheta_{34}^2 + (7)\,\vartheta_5\,\vartheta_{34}^4, \\ 0_{34} = (3)\,\vartheta_{34}^3\vartheta_5^2 + (7)\,\vartheta_{34}\,\vartheta_5^4, \\ 0_{03} = (2)\,\vartheta_{03}^3\,\vartheta_{23}^2 + (6)\,\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}^4, \\ 0_{23} = -(2)\,\vartheta_{23}^3\vartheta_{03}^2 + (6)\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{03}^4, \\ 0_{14} = (1)\,\vartheta_{14}^3\vartheta_4^2 + (5)\,\vartheta_{14}\,\vartheta_4^4, \\ 0_4 = -(1)\,\vartheta_4^3\,\vartheta_{14}^2 + (5)\,\vartheta_4\,\vartheta_{14}^4. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich unter Hinzunahme der bekannten Relationen zwischen den ϑ-Functionen:**)

$$(2)\quad \begin{cases} (1) = \dfrac{\dfrac{0_{14}\vartheta_{14}}{\vartheta_4^2} - \dfrac{0_4\vartheta_4}{\vartheta_{14}^2}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, & (2) = \dfrac{\dfrac{0_{03}\vartheta_{03}}{\vartheta_{23}^2} - \dfrac{0_{23}\vartheta_{23}}{\vartheta_{03}^2}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \\[2ex] (3) = \dfrac{\dfrac{0_5\vartheta_5}{\vartheta_{34}^2} - \dfrac{0_{34}\vartheta_{34}}{\vartheta_5^2}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, & (5) = \dfrac{\dfrac{0_{14}}{\vartheta_{14}} + \dfrac{0_4}{\vartheta_4}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, \\[2ex] (6) = \dfrac{\dfrac{0_{03}}{\vartheta_{03}} + \dfrac{0_{23}}{\vartheta_{23}}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}, & (7) = \dfrac{\dfrac{0_{34}}{\vartheta_{34}} - \dfrac{0_5}{\vartheta_5}}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4}. \end{cases}$$

---

*) Siehe Crelle 67, pag. 107.

**) Rosenhain: Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes pag. 416.

Setzen wir ferner:

$$\left(\frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)_\lambda}{\partial v_i}\right)_{v_1=v_2=0} = \frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v_i} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta(v_1', v_2')_\lambda}{\partial v_i}\right)_{v_1=v_2=0} = \frac{\partial O_\lambda}{\partial v_i}, \quad i = 1, 2,$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial O_3}{\partial v_i} = (6)\dfrac{\partial \vartheta_3}{\partial v_i}\vartheta_{14}^4 + (7)\dfrac{\partial \vartheta_3}{\partial v_i}\vartheta_4^4 - (8)\dfrac{\partial \vartheta_3}{\partial v_i}\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2 \\ \qquad - (12)\dfrac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_i}\vartheta_{14}^3\vartheta_4 + (13)\dfrac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_i}\vartheta_{14}\vartheta_4^3, \\ \dfrac{\partial O_{13}}{\partial v_i} = (6)\dfrac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_i}\vartheta_4^4 + (7)\dfrac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_i}\vartheta_{14}^4 + (8)\dfrac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_i}\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2 \\ \qquad - (12)\dfrac{\partial \vartheta_3}{\partial v_i}\vartheta_{14}\vartheta_4^3 - (13)\dfrac{\partial \vartheta_3}{\partial v_i}\vartheta_{14}^3\vartheta_4, \\ \dfrac{\partial O_{04}}{\partial v_i} = (5)\dfrac{\partial \vartheta_{04}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^4 + (7)\dfrac{\partial \vartheta_{04}}{\partial v_i}\vartheta_{03}^4 + (9)\dfrac{\partial \vartheta_{04}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2 \\ \qquad + (11)\dfrac{\partial \vartheta_{24}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^3\vartheta_{03} + (13)\dfrac{\partial \vartheta_{24}}{\partial v_i}\vartheta_{23}\vartheta_{03}^3, \\ \dfrac{\partial O_{24}}{\partial v_i} = (5)\dfrac{\partial \vartheta_{24}}{\partial v_i}\vartheta_{03}^4 + (7)\dfrac{\partial \vartheta_{24}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^4 - (9)\dfrac{\partial \vartheta_{24}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2 \\ \qquad + (11)\dfrac{\partial \vartheta_{04}}{\partial v_i}\vartheta_{23}\vartheta_{03}^3 - (13)\dfrac{\partial \vartheta_{04}}{\partial v_i}\vartheta_{23}^3\vartheta_{03}, \\ \dfrac{\partial O_1}{\partial v_i} = (5)\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v_i}\vartheta_5^4 + (6)\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v_i}\vartheta_{34}^4 + (10)\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v_i}\vartheta_5^3\vartheta_{34}^2 \\ \qquad + (11)\dfrac{\partial \vartheta_{02}}{\partial v_i}\vartheta_5^3\vartheta_{34} + (12)\dfrac{\partial \vartheta_{02}}{\partial v_i}\vartheta_5\vartheta_{34}^3, \\ \dfrac{\partial O_{02}}{\partial v_i} = (5)\dfrac{\partial \vartheta_{02}}{\partial v_i}\vartheta_{34}^4 + (6)\dfrac{\partial \vartheta_{02}}{\partial v_i}\vartheta_5^4 + (10)\dfrac{\partial \vartheta_{02}}{\partial v_i}\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2 \\ \qquad + (11)\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v_i}\vartheta_5\vartheta_{34}^3 + (12)\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v_i}\vartheta_5^3\vartheta_{34}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$N = \pi^2 \vartheta_4 \vartheta_{14} \vartheta_5 \vartheta_{34} \vartheta_{03} \vartheta_{23},$$

$$D_\lambda = \frac{\partial O_\lambda}{\partial v_1}\frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v_2} - \frac{\partial O_\lambda}{\partial v_2}\frac{\partial \vartheta_\lambda}{\partial v_1},$$

$$D_\lambda^{(\mu)} = \frac{\partial O_\lambda}{\partial v_1}\frac{\partial \vartheta_\mu}{\partial v_2} - \frac{\partial O_\lambda}{\partial v_2}\frac{\partial \vartheta_\mu}{\partial v_1}$$

so wird unter Hinzunahme der Relationen, welche zwischen den ϑ-Functionen und deren Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente bestehen:*)

*) Siehe Thomae: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle 1876, pag. 71.

$$(4)\quad\begin{cases}(11) = \dfrac{1}{N}\,\dfrac{D_1\vartheta_5^2 + D_{02}\vartheta_{34}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},\\[2mm] (12) = \dfrac{1}{N}\,\dfrac{D_{13}\vartheta_4^2 - D_3\vartheta_{14}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},\\[2mm] (13) = -\dfrac{1}{N}\,\dfrac{D_{24}\vartheta_{23}^2 + D_{04}\vartheta_{03}^2}{\vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4},\end{cases}$$

während die Grössen (8), (9), (10) sich aus den Gleichungen ergeben:

$$(5)\quad\begin{cases}(6)\,\vartheta_4^4 + (7)\,\vartheta_{14}^4 + (8)\,\vartheta_4^2\,\vartheta_{14}^2 = \dfrac{D_{13}^{(3)}}{\pi^2\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_{03}\vartheta_{23}},\\[2mm] (5)\,\vartheta_{23}^4 + (7)\,\vartheta_{03}^4 + (9)\,\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2 = \dfrac{D_{04}^{(24)}}{\pi^2\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_{14}},\\[2mm] (5)\,\vartheta_{34}^4 + (6)\,\vartheta_5^4 + (10)\,\vartheta_5^2\,\vartheta_{34}^2 = \dfrac{D_{02}^{(1)}}{\pi^2\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{03}\vartheta_{23}}.\end{cases}$$

Zu gleicher Zeit erhält man die Relationen:

$$(6)\quad\begin{cases}D_1\,\vartheta_5^2 + D_{02}\vartheta_{34}^2 = D_{24}\vartheta_{03}^2 - D_{04}\vartheta_{23}^2,\\ D_3\,\vartheta_{14}^2 - D_{13}\vartheta_4^2 = D_1\,\vartheta_{34}^2 + D_{02}\vartheta_5^2,\\ -D_{24}\vartheta_{23}^2 - D_{04}\vartheta_{03}^2 = D_{13}\vartheta_{14}^2 + D_3\,\vartheta_4^2\,.\end{cases}$$

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{D_{04}^{(24)} - D_{24}^{(04)}}{\pi^2\vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_{14}} = \dfrac{0_4}{\vartheta_4} + \dfrac{0_{14}}{\vartheta_{14}} + \dfrac{0_{34}}{\vartheta_{34}} - \dfrac{0_5}{\vartheta_5},\\[2mm] \dfrac{D_{02}^{(1)} - D_1^{(02)}}{\pi^2\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_{14}} = \dfrac{0_{03}}{\vartheta_{03}} + \dfrac{0_{23}}{\vartheta_{23}} - \dfrac{0_4}{\vartheta_4} - \dfrac{0_{14}}{\vartheta_{14}},\\[2mm] \dfrac{D_{13}^{(3)} - D_3^{(13)}}{\pi^2\vartheta_{03}\vartheta_{23}\vartheta_5\vartheta_{34}} = \dfrac{0_{03}}{\vartheta_{03}} + \dfrac{0_{23}}{\vartheta_{23}} + \dfrac{0_{34}}{\vartheta_{34}} - \dfrac{0_5}{\vartheta_5}.\end{cases}$$

Die Constante (4) endlich kann aus einer der Gleichungen bestimmt werden:

$$(8)\quad\begin{cases}0_2 = -(1)\,\vartheta_2^3\vartheta_{12}^2 - (2)\,\vartheta_2^3\vartheta_0^2 + (3)\,\vartheta_2^3\vartheta_{01}^2 - (4)\,\vartheta_2^2\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_0\\ \qquad + (5)\,\vartheta_2\vartheta_{12}^4 + (6)\,\vartheta_2\vartheta_0^4 + (7)\,\vartheta_2\vartheta_{01}^4 - (8)\,\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{01}^2\\ \qquad - (9)\,\vartheta_2\vartheta_{12}^2\vartheta_{01}^2 + (10)\,\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + (11)\,\vartheta_{12}^3\vartheta_0\vartheta_{01}\\ \qquad + (12)\,\vartheta_{12}\vartheta_0^3\vartheta_{01} - (13)\,\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{01}^3,\\ 0_{01} = -(1)\,\vartheta_{01}^3\vartheta_0^2 - (2)\,\vartheta_{01}^3\vartheta_{12}^2 + (3)\,\vartheta_{01}^3\vartheta_2^2 - (4)\,\vartheta_{01}^2\vartheta_0\vartheta_{12}\vartheta_2\\ \qquad + (5)\,\vartheta_{01}\vartheta_0^4 + (6)\,\vartheta_{01}\vartheta_{12}^4 + (7)\,\vartheta_{01}\vartheta_2^4 - (8)\,\vartheta_{01}\vartheta_{12}^2\vartheta_2^2\\ \qquad - (9)\,\vartheta_{01}\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + (10)\,\vartheta_{01}\vartheta_0^2\vartheta_{12}^2 + (11)\,\vartheta_0^3\vartheta_{12}\vartheta_2\\ \qquad + (12)\,\vartheta_0\vartheta_{12}^3\vartheta_2 - (13)\,\vartheta_0\vartheta_{12}\vartheta_2^3,\end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} O_0 = (1)\,\vartheta_0^3\vartheta_{01}^2 + (2)\,\vartheta_0^3\vartheta_2^2 + (3)\,\vartheta_0^3\vartheta_{12}^2 + (4)\,\vartheta_0^2\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12} \\ \quad + (5)\,\vartheta_0\vartheta_{01}^4 + (6)\,\vartheta_0\vartheta_2^4 + (7)\,\vartheta_0\vartheta_{12}^4 + (8)\,\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_{12}^2 \\ \quad + (9)\,\vartheta_0\vartheta_{01}^2\vartheta_{12}^2 + (10)\,\vartheta_0\vartheta_{01}^2\vartheta_2^2 + (11)\,\vartheta_{01}^3\vartheta_2\vartheta_{12} \\ \quad + (12)\,\vartheta_{01}\vartheta_2^3\vartheta_{12} + (13)\,\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{12}^3, \\ O_{12} = (1)\,\vartheta_{12}^3\vartheta_2^2 + (2)\,\vartheta_{12}^3\vartheta_{01}^2 + (3)\,\vartheta_{12}^3\vartheta_0^2 + (4)\,\vartheta_{12}^2\vartheta_2\vartheta_{01}\vartheta_0 \\ \quad + (5)\,\vartheta_{12}\vartheta_2^4 + (6)\,\vartheta_{12}\vartheta_{01}^4 + (7)\,\vartheta_{12}\vartheta_0^4 + (8)\,\vartheta_{12}\vartheta_{01}^2\vartheta_0^2 \\ \quad + (9)\,\vartheta_{12}\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + (10)\,\vartheta_{12}\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2 + (11)\,\vartheta_2^3\vartheta_{01}\vartheta_0 \\ \quad + (12)\,\vartheta_2\vartheta_{01}^3\vartheta_0 + (13)\,\vartheta_2\vartheta_{01}\vartheta_0^3. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen würden sich noch einige weitere Relationen zwischen den ursprünglichen und den transformirten ϑ-Functionen resp. deren Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente ergeben, indessen sehen wir von der Aufstellung derselben ab.

Breslau im September 1879.