

# Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado.

(Nota di F. BRIOSCHI, in *Milano*.)

---

1.° Sia  $f(x_1, x_2)$  una forma binaria del quinto ordine; è noto che essa ha tre covarianti  $p, q, r$  del terzo ordine e dei gradi 3.°, 5.°, 9.°. Posto:

$$l = \frac{1}{2}(ff)_4,$$

si hanno i primi due covarianti dalle:

$$p = -\frac{1}{3}(fl)_2, \quad q = (lp),$$

e supposto  $m = \frac{1}{2}(pp)_2$  si ottiene il terzo  $r = (mp)$ .

I covarianti  $p, q, r$  sono legati da una equazione del terzo grado come ho dimostrato in altro lavoro (\*).

La forma  $f$  ha tre invarianti:

$$A = \frac{1}{2}(ll)_2, \quad B = (lm)_2, \quad C = \frac{1}{2}(mm)_2,$$

dei gradi 4.°, 8.°, 12.°, inoltre l'invariante del 18.° ordine, ed il discriminante  $\Delta$ .

Indicando con  $x_0, x_1, \dots, x_4$  le radici della equazione:

$$f(x) = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + \dots + a_5 = 0,$$

si ha:

$$f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_4) = 5^5 a_0^5 \Delta,$$

ed esprimendo  $\Delta$  in funzione dei coefficienti  $a_0, a_1, \dots$  si ottiene:

$$\Delta = 16(A^2 - 144B).$$

---

(\*) *Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria.*  
Annali di Matematica, Serie II, T. XI.

2.° La trasformazione della equazione  $f(x) = 0$  per mezzo del covariante  $p$ , o per la formola:

$$y = \frac{p(x)}{f'(x)},$$

è nota da molti anni per le ricerche del sig. HERMITE sull'invariante del 18.° grado (\*). In questa Nota considero invece l'analoga trasformazione che può operarsi coll'invariante  $q(x)$ .

Indicando con  $x_r$  una qualsivoglia delle radici  $x_0, x_1, \dots, x_4$ , pongo:

$$\frac{1}{5} f'(x_r) = \alpha, \quad \frac{1}{4 \cdot 5} f''(x_r) = \beta, \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} f'''(x_r) = \gamma, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^{IV}(x_r) = \delta;$$

è noto:

1.° che sostituendo nel primo coefficiente di un covariante ai coefficienti  $a_0, a_1, \dots$  le  $a_0 = 0, a_1 = \alpha, a_2 = \beta, a_3 = \gamma, a_4 = \delta, a_5 = 1$ , si ottiene il valore di quel covariante per  $x = x_r$ .

2.° che la stessa sostituzione eseguita in un invariante dà il valore di esso in funzione delle radici.

Per determinare il valore di  $q(x_r)$  e quelli di  $A, B, C$ , pongasi:

$$l_0 = 3\beta^2 - 4\alpha\gamma, \quad 2l_1 = 2\beta\gamma - 3\alpha\delta, \quad l_2 = \alpha - 4\beta\delta + 3\gamma^2,$$

inoltre:

$$\begin{aligned} p_0 &= 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \beta^3 \\ 3p_1 &= \alpha\beta\delta + \alpha\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2\gamma \\ 3p_2 &= \alpha\gamma\delta + \beta^2\delta - \alpha\beta - \beta\gamma^2 \\ p_3 &= \alpha\gamma + 2\beta\gamma\delta - \beta^2 - \alpha\delta^2 - \gamma^3, \end{aligned}$$

ed:

$$m_0 = p_0p_2 - p_1^2, \quad 2m_1 = p_0p_3 - p_1p_2, \quad m_2 = p_1p_3 - p_2^2,$$

e si avranno le:

$$A = l_0l_2 - l_1^2, \quad B = l_0m_2 - 2l_1m_1 + l_2m_0, \quad C = m_0m_2 - m_1^2.$$

Il primo coefficiente del covariante  $q$  è:

$$l_0p_1 - l_1p_0,$$

quindi sostituendo i valori superiori si ottiene:

$$6q(x_r) = \alpha[3\beta^3\delta - 2\beta^2\gamma^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta + 9\alpha^2\delta^2 + 6\alpha\beta^2 + 8\alpha\gamma^3 - 8\alpha^2\gamma],$$

---

(\*) *Sur l'équation du 5.<sup>me</sup> degré*. Paris, 1866.

la quale espressione dimostra la proprietà speciale al covariante  $q$ , cioè che:

$$\frac{q(x_r)}{\alpha} = \frac{5q(x_r)}{f'(x_r)},$$

è una funzione intera di  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  del grado 10.<sup>o</sup> rispetto alle radici.

Posto:

$$y_r = 2 \frac{q(x_r)}{\alpha},$$

si ha  $\Sigma y_r = 0$ , ossia è nullo il coefficiente del secondo termine nella trasformata in  $y$ . I coefficienti dei termini terzo, quarto, ecc. saranno dei gradi 20.<sup>o</sup>, 30.<sup>o</sup>, ... rispetto alle radici, cioè dei gradi 8.<sup>o</sup>, 12.<sup>o</sup>, 16.<sup>o</sup>, 20.<sup>o</sup> rispetto ai coefficienti della  $f(x)$ . Essi saranno quindi funzioni dei soli tre invarianti  $A, B, C$ .

Ricorrendo al metodo che ho indicato in altra occasione (\*) si giunge facilmente alla calcolazione della trasformata in  $y$ , che è la seguente:

$$\begin{aligned} y^5 - 10By^3 + 40Cy^2 + 5\left(\frac{4}{3}AC + 5B^2\right)y + \\ + 4\left(\frac{4}{3}AB^2 + \frac{4}{9}A^2C - 54BC\right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

la quale può scriversi anche così:

$$y(y^2 - 5B)^2 + 40C(y^2 - 5B) + \frac{20}{3}ACy + 4\left(\frac{4}{3}AB^2 + \frac{4}{9}A^2C - 4BC\right) = 0.$$

3.<sup>o</sup> Sia:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x - x_r},$$

e si indichino con  $g_2, g_3, g$  gli invarianti ed il discriminante della biquadratica  $\varphi(x)$ ; sarà come è noto:

$$g = g_2^3 - 27g_3^2,$$

e:

$$\Pi \varphi'(x) = 4^4 \cdot a_0^4 \cdot g,$$

da cui:

$$16\alpha g^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5a_0} \cdot \Delta^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Gli invarianti  $g_2, g_3$ , come pure i covarianti di  $\varphi$ , possono esprimersi in funzione delle  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , e si hanno le:

$$g_2 = \frac{5}{6}[6\alpha - 15\beta\delta + 10\gamma^2]$$

$$g_3 = \frac{5^2}{4^2 \cdot 3^3}[144\alpha\gamma + 180\beta\gamma\delta - 108\beta^2 - 135\alpha\delta^2 - 80\gamma^3].$$

(\*) *Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten.* Math. Annalen, Bd. XXIX.

Ora, pei valori superiori di  $l_0, l_1, l_2$ , essendo:

$$4A = 12\alpha\beta^2 - 16\alpha^2\gamma + 32\beta^2\gamma^2 - 48\beta^3\delta + 76\alpha\beta\gamma\delta - 9\alpha^2\delta^2 - 48\alpha\gamma^3,$$

rammentando il valore di  $q(x_r)$ , si giunge alla relazione:

$$24q(x_r) + A\alpha = -\frac{4 \cdot 3^3}{5^2} \cdot \alpha^2 g_3,$$

da cui:

$$12y_r + A = -\frac{4 \cdot 3^3}{5^2} \alpha g_3,$$

od infine per la (2):

$$27 \frac{g_3}{g^{\frac{1}{2}}} = -4 \frac{\sqrt{5}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} [12y_r + A] = -z_r,$$

supposto  $a_0 = 1$ .

4.° Per determinare quale funzione delle radici della equazione  $\varphi(x) = 0$  sia la  $z_r$  supponiamo  $r = 0$ , siano cioè  $x_1, x_2, x_3, x_4$  le radici di quest'ultima equazione. È noto che indicando con  $\lambda, \mu, \nu$  le tre espressioni di queste radici:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{12} [(x_1 - x_4)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)] \\ \mu &= \frac{1}{12} [(x_1 - x_2)(x_4 - x_3) - (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)] \\ \nu &= \frac{1}{12} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_4 - x_3)],\end{aligned}$$

sono  $\lambda, \mu, \nu$  le radici della equazione:

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Ora scrivendo per brevità  $(rs) = x_r - x_s$ , ai valori di  $\lambda, \mu, \nu$  può darsi la forma:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{12}(13)(32) \left[ \frac{(14)}{(13)} + \frac{(24)}{(23)} \right], & \mu &= \frac{1}{12}(14)(43) \left[ \frac{(12)}{(14)} + \frac{(32)}{(34)} \right], \\ \nu &= \frac{1}{12}(12)(24) \left[ \frac{(13)}{(12)} + \frac{(43)}{(42)} \right],\end{aligned}$$

ed essendo  $g_3 = 4\lambda\mu\nu$ , si avrà

$$z_0 = \left[ \frac{(14)}{(13)} + \frac{(24)}{(23)} \right] \left[ \frac{(12)}{(14)} + \frac{(32)}{(34)} \right] \left[ \frac{(13)}{(12)} + \frac{(43)}{(42)} \right]. \quad (3)$$

Queste cinque funzioni  $z_0, z_1, \dots, z_4$  furono già indicate dal sig. KRONECKER in una sua comunicazione all'Accademia di Berlino, non peranco compiuta (\*).

(\*) *Sitzungsberichte der K. Akademie Wissenschaften*. 25 Februar 1886.

Essendo:

$$z_r = 4 \frac{\sqrt{5}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} (12y_r + A),$$

la calcolazione della equazione di cui le radici sono  $z_0, z_1, \dots, z_4$  non presenta difficoltà dipendendo dalla già calcolata (1) in  $y$ .

Posto  $z_r = v_r \sqrt{5}$  si può dare all'equazione in  $v$  la forma seguente:

$$(v - P)^5 - 10(P^2 - 1)(v - P)^3 + 25(P^2 - 1)^2(v - P) + \\ + 16P(P^2 - 1)^2 + Q(5v^2 + 27) = 0,$$

nella quale:

$$P = 4 \frac{A}{\Delta^{\frac{1}{2}}}, \quad P = 2 \cdot 3^3 \cdot 4^7 \frac{C}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Il sig. HERMITE nella Memoria sopra citata ha pure considerato una equazione della stessa specie. Indicando con  $f, g, h, l$  le quattro funzioni delle radici  $x_0, x_1, \dots$

$$f = (12)(34), \quad g = (13)(42), \quad h = (14)(23) \\ l = (01)(02)(03)(04),$$

egli pone:

$$\lambda_0 = (h - g)(g - f)(f - h)l,$$

e quindi sarà:

$$\lambda_r = 4 \cdot 5^3 (12y_r + A) = 5^3 \cdot \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot v_r.$$

5.° Ritornando alla equazione (1) in  $y$ , supponiamo in essa  $B = 0$ , e posto:

$$y = \frac{4}{3} \frac{A}{z^2 + 3}, \quad I = -\frac{1}{3^6} \frac{A^3}{C},$$

nella seconda delle quali  $I$  ha l'ordinario valore, si deduce la:

$$\overline{12}^3 I = (z^3 + 3)^3 (z^4 + 11z^2 + 64),$$

o la:

$$\overline{12}^3 (I - 1) = z^2 (z^4 + 10z^2 + 45)^2,$$

cioè la nota forma normale delle equazioni del quinto grado. Una equazione del quinto grado per la quale l'invariante  $B = 0$  si trasforma quindi per le indicate sostituzioni nella:

$$z^5 + 10z^3 + 45z + t = 0,$$

essendo

$$t = -24\sqrt{3}\sqrt{I-1}.$$

6.° A questo risultato si può giungere in altro modo, il quale ha il vantaggio di stabilire la proprietà caratteristica delle forme binarie del quinto ordine di cui l'invariante  $B=0$ .

Rammento, a questo scopo, alcune relazioni fra invarianti e covarianti di una quintica  $f(x_1, x_2)$ , relazioni l'esistenza delle quali è dimostrata nel mio scritto citato nel § 1.° Ai covarianti  $l, m, p$ , ed agli invarianti  $A, B, C$  definiti nel medesimo paragrafo, aggiungo ora il covariante quadratico  $n$ , ed i covarianti lineari  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , così definiti:

$$n = (lm), \quad \alpha = (lp)_2, \quad \beta = (la), \quad \gamma = (ma), \quad \delta = (na),$$

e l'invariante  $D$  del 18.° grado:

$$D = (\alpha\delta) = (\gamma\beta).$$

Posto:

$$\begin{aligned} L &= 4(2AB - 27C), & M &= 4AC - B^2 \\ P &= \frac{1}{2}BL - AM, & Q &= CL - \frac{1}{2}BM, \end{aligned}$$

si ha:

$$D^2 = BLM - AM^2 - CL^2,$$

e le:

$$D^2 l = L\delta^2 - 2P\delta\alpha - \frac{1}{4}LM\alpha^2, \quad D^2 m = M\delta^2 - 2Q\delta\alpha - \frac{1}{4}M^2\alpha^2$$

$$Mp = 4Cl\alpha - 2Bm\alpha + 2m\delta$$

$$gMf = \alpha^3 l - 27\alpha m^2 + 8A\alpha lm - 2B\alpha l^2 + 2(27B - 8A^2)mp,$$

e fra i tre covarianti lineari  $\alpha, \gamma, \delta$  sussiste la relazione:

$$M\delta = Q\alpha - D\gamma.$$

Per quest'ultima relazione, i covarianti  $l, m$  e quindi  $p, f$  si possono esprimere in funzione dei covarianti lineari  $\alpha, \gamma$  dei gradi 5.°, 11.°, e si hanno le:

$$M^2 l = -Q\alpha^2 + 2D\alpha\gamma + L\gamma^2, \quad Mm = C\alpha^2 + \gamma^2,$$

e supponendo  $B=0$  si ottengono facilmente le:

$$4^3 A^3 C^3 p = 8 \cdot 3^3 C^3 \alpha^3 + 6 CD\alpha^2 \gamma - 8 \cdot 3^4 C^2 \alpha \gamma^2 - 2 D\gamma^3$$

$$3^2 \cdot 4^3 A^3 C^5 f = 3^4 \cdot C^4 \alpha^5 + 10 \cdot 3^3 C^3 \alpha^3 \gamma^2 + 45 \cdot 3^2 C^2 \alpha \gamma^4 + 2 D\gamma^5,$$

ossia posto:

$$\alpha = \eta_1, \quad \gamma = \eta_2 \sqrt[3]{3C}, \quad (4)$$

si avrà:

$$\frac{4^3}{3^3} A^3 C f = \eta_1^5 + 10 \eta_1^3 \eta_2^2 + 45 \eta_1 \eta_2^4 - t \eta_2^5,$$

essendo:

$$t = -\frac{2D}{3C\sqrt[3]{3C}},$$

e quindi:

$$t^2 + \frac{1}{12} = -\frac{4^3}{3^3} \frac{A^3}{C}, \quad (5)$$

come nel precedente paragrafo.

Rimane così dimostrato che una forma binaria del quinto ordine per la quale l'invariante  $B = 0$  mediante la trasformazione (4) si riduce alla forma normale.

Il valore superiore di  $p$  per le stesse (4) diviene:

$$\frac{4^3}{3^3} A^3 p = 8\eta_1 - t\eta_1^3 \eta_2 - 72\eta_1 \eta_2^3 + t\eta_2^3,$$

ed indicando con  $\rho$  il covariante di quarto ordine e di quarto grado definito dalla relazione:

$$4A\rho = 3lm - \alpha p,$$

si ottiene la:

$$\frac{4^3}{3^3} A^4 \rho = \eta_1^4 + 18\eta_1^2 \eta_2 - t\eta_1 \eta_2^3 - 27\eta_2^4.$$

Infine dal valore superiore di  $m$  si deduce:

$$4Am = \eta_1^2 + 3\eta_2^2.$$

Fra i covarianti  $f, \rho, p, m, \alpha, \gamma$ , sussistono le tre relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} p\eta_2^2 &= A\rho\eta_1 - 3Cf, & 3Cf\eta_1 - A\rho\eta_2^2 &= 3^3 \cdot m^3 \\ C[p\eta_1 - 8A\rho]^2 + 3^3 \cdot Cp^2\eta_2^2 &= -3^3 \cdot \eta_2^2 m^3, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

e quindi per le ultime due la:

$$C[p\eta_1 - 8A\rho]^2 + 3^3 \cdot Cp^2\eta_2^2 + [3Cf\eta_1 - A\rho\eta_2^2]\eta_2^2 = 0,$$

e questa, per la prima delle superiori, conduce alla equazione quadratica in  $\eta_1$ :

$$P\eta_1^2 + 2Q\eta_1 + R = 0,$$

essendo:

$$\begin{aligned} P &= Cp^4 + 3ACfp\rho - A^3\rho^3 \\ 2Q &= C[11Ap^3\rho - 9Cf^2p + 6A^2f\rho^2] \\ R &= C[64A^2p^2\rho^2 - 81Cp^3f - 9ACf^2\rho]. \end{aligned}$$

I covarianti lineari  $\alpha$ ,  $\gamma$  od  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  si possono quindi determinare in funzione di  $f$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $A$ ,  $C$  per la risoluzione di equazioni quadratiche. Posto:

$$\begin{aligned} 4a &= 3C^3(Ap^3\rho - 3Cf^2) \\ 4^3 \cdot 3^2 \cdot b &= C^5(4A^2\rho^2 - 9Cfp)(9Cp^4 - 16A^3\rho^3 + 24ACfp\rho), \end{aligned}$$

ossia  $a$ ,  $b$  gli invarianti di quarto e di ottavo grado della quintica:

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 5\mu v + \nu = 0.$$

nella quale:

$$2\lambda = -Cp, \quad \mu = AC\rho, \quad \nu = -3C^2f,$$

si ha:

$$4C^4(Q^2 - PR) = 16p^2(a^2 - 144b) = p^2\nabla,$$

e quindi:

$$\eta_1 = \frac{44\lambda^3\mu - \lambda\nu^2 + \mu^2\nu \pm \lambda\nabla^{\frac{1}{2}}}{16\lambda^4 - \mu^3 + 2\lambda\mu\nu},$$

ed il valore di  $\eta_2$  si otterrà dalla:

$$2\lambda\eta_2^2 + \mu\eta_1 + \nu = 0.$$

È noto (\*) che una radice qualunque  $v_r$  dell'equazione superiore si esprime in funzione di  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e della corrispondente radice  $z_r$  della equazione normale nel modo seguente:

$$v_r = -\frac{\eta_1 + \eta_2 z_r}{z_r^2 + 3},$$

le radici  $v_r$  sono quindi note quando sia determinato il valore del coefficiente  $t$  dell'equazione suindicata in funzione dei coefficienti  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Ora dalle prime due relazioni (6) si deducono le:

$$\begin{aligned} 2\lambda\eta_1^2 - 3\mu\eta_1 - 3\nu &= 8A\lambda m \\ \mu\eta_2^2 + \nu\eta_1 &= -3^3 \cdot C \cdot m^3, \end{aligned}$$

---

(\*) KIEPERT, *Auflösung der Gleichungen fünften Grades*. Journal für die Mathematik, Bd. LXXXVII. — KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, pag. 193.

quindi per la (5) si avrà:

$$\overline{12}^3 I = \frac{(2\lambda\eta_1^2 - 3\mu\eta_1 - 3\nu)^3}{8\lambda^3(\mu\eta_1^2 + \nu\eta_1)}.$$

7.° Il prof. GORDAN ha dimostrato che una equazione qualsivoglia del quinto grado  $f(x) = 0$ , mediante la sostituzione (\*):

$$v = \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \psi(x),$$

nella quale  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  sono polinomi in  $x$  del secondo e del quarto grado che soddisfano le:

$$\begin{aligned} \Sigma \varphi(x) &= 0 & \Sigma \psi(x) &= 0 \\ \Sigma \varphi^2(x) &= 0 & \Sigma \varphi(x)\psi(x) &= 0 & \Sigma \psi^2(x) &= 0, \end{aligned}$$

si trasforma nella:

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 5\mu v + \nu = 0,$$

e quindi saranno  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  forme binarie in  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  degli ordini 3.°, 4.°, 5.°.

L'invariante  $B$  dell'ottavo grado della equazione superiore in  $v$  ha la proprietà di scomporsi in due fattori; infatti trovasi facilmente essere:

$$18B = (2\mu^2 - 3\lambda\nu)(9\lambda^4 - \mu^3 + \lambda\mu\nu),$$

e perciò sarà  $B = 0$  quando sia:

$$2\mu^2 - 3\lambda\nu = 0.$$

Indicando con  $k$  una indeterminata, questa è soddisfatta ponendo:

$$\mu = 3\lambda k, \quad \nu = 6\lambda k^2,$$

per le quali l'equazione in  $v$  diventa:

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 15\lambda k v + 6\lambda k^2 = 0,$$

la quale facilmente si riconduce alla forma normale (\*\*).

La equazione  $2\mu^2 - 3\lambda\nu = 0$  equivale alla:

$$(\Sigma v^4)^2 - 4\Sigma v^3 \Sigma v^5 = 0,$$

conduce cioè ad una equazione dell'ottavo grado in  $\lambda_1 : \lambda_2$ .

Ottobre 1888.

(\*) GORDAN, *Ueber Gleichungen fünften Grades*. Math. Annalen, Bd. XXVIII.

(\*\*) GORDAN, *Sur les équations du cinquième degré*. Journal de Mathématiques de JORDAN, T. 1.<sup>r</sup>.