Projektive Konstruktionen in der hyperbolischen Geometrie.

Von

MARCEL GROSSMANN in Zürich.

In einer früheren Arbeit*) habe ich für die nichteuklidische Geometrie Konstruktionen entwickelt unter der Voraussetzung, daß für den Fall der hyperbolischen Geometrie ein reeller, im Endlichen liegender Kegelschnitt als der absolute Kegelschnitt der Ebene betrachtet werde, während für den Fall der elliptischen Geometrie der imaginäre absolute Kegelschnitt durch den konjugierten reellen vertreten sei. Zu den Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie ist die Bemerkung gemacht worden, daß die entstehenden Figuren nur Bilder der wirklich auszuführenden seien, und daß die Einfachheit der Lösungen eingebüßt werde, wenn man von einer solchen „Übersetzung" wieder zum „Urtext" übergehe.**) In der Tat habe ich in jener Arbeit mit uneigentlichen (unendlich fernen und idealen) Elementen konstruiert, als ob es eigentliche, zugängliche wären; denn mein Ziel war, geometrische Figuren zu geben, deren projektive Beziehungen zu einem gegebenen Kegelschnitt die metrischen Sätze der hyperbolischen Geometrie veranschaulichen.

In der vorliegenden Arbeit will ich zeigen, daß die projektive Natur der Metrik der hyperbolischen Geometrie einen weiteren Schritt zu tun gestattet.

Es werden für die fundamentalen Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen Geometrie Lösungen entwickelt, die mit dem Lineal allein ausführbar sind, wenn ein fester Hilfskreis gegeben ist.

Es handelt sich also um eine Aufgabe, die von Steiner für die euklidische Geometrie gelöst worden ist.

---

*) M. Großmann, Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie, Beilage zum Programm der thurgauischen Kantonsschule auf das Jahr 1903/4, Frauenfeld.

**) Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie. Wissenschaft und Hypothese, Bd. IV.

Wenn ein Kreis k und sein Mittelpunkt M gegeben sind, so ist die Metrik der Ebene allerdings noch nicht völlig bestimmt. Denn von dem absoluten Kegelschnitt ω der Ebene weiß man dann nur, daß er den Kreis k doppelt berühren muß in den Schnittpunkten mit der Polaren m des Mittelpunktes M. Jeder Kegelschnitt des so definierten Berührungsbüschels kann als ω betrachtet werden, und die Geometrie ist hyperbolisch, elliptisch oder euklidisch, je nachdem ω als reell, imaginär oder mit der Geraden m zusammenfallend vorausgesetzt wird. Um also die Metrik der Ebene zu einer bestimmten zu machen, sind ergänzende Festsetzungen zu treffen. Es kann dies in mannigfaltiger Weise geschehen; ich wähle als zweckmäßig für die hyperbolische Geometrie die folgende:

Der absolute Kegelschnitt ω der Ebene ist bestimmt, wenn man einen Kreis k, dessen Mittelpunkt M und den Parallelwinkel $\Pi(r)$ als gegeben voraussetzt, der zu einem Radius $MA = r$ des Hilfskreises gehört. (Fig. 1.)

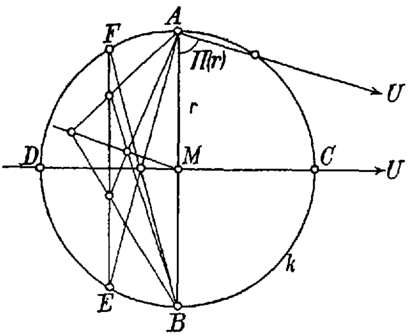

Fig. 1.

Denn der — uneigentliche — Schnittpunkt U des Schenkels AU des Winkels $\Pi(r)$ mit dem zu MA senkrechten Durchmesser CD des Kreises ist ein Punkt des absoluten Kegelschnittes. Dieser Durchmesser CD ist aber bestimmt als die Verbindungsgerade von M mit dem Pol von MA in bezug auf den Kreis, da dieser Pol mit dem absoluten Pol von MA zusammenfällt. In Fig. 1 ist zur Konstruktion von CD ein Vierseit gewählt worden, dessen Seitenpaare durch die Endpunkte A und B des gegebenen Durchmessers gehen, während die eine Diagonale durch M, die andere also durch den Pol von CD geht. Sind E und F ihre Schnittpunkte mit k, so schneiden sich die Geraden AE und BF auf dem gesuchten Durchmesser CD.

Als allgemeines Prinzip für die Lösung metrischer Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen Geometrie verwende ich das folgende:

Man transformiere die Figur F, um die es sich bei der zu lösenden Aufgabe handelt, in eine andere Figur F' durch Anwendung der Homologie H, die den absoluten Kegelschnitt ω in den gegebenen Hilfskreis k verwandelt.

Die Figur F' steht dann zu k in den nämlichen projektiven Beziehungen, wie die Figur F zu ω. Macht man von diesen Beziehungen konstruktiv Gebrauch, so sind die Resultate dieser Konstruktionen schließlich noch zurückzutransformieren.

Die Homologie H hat den Mittelpunkt M des Kreises k zum Zentrum und dessen Polare m zur Achse; sie bildet die realen Punkte der Ebene auf das Innere des Hilfskreises ab. Für Figuren F' spielt der Hilfskreis k dann dieselbe Rolle, wie in meinen früheren Konstruktionen das Bild des absoluten Kegelschnittes ω.

Die Durchführung gestaltet sich sehr einfach. Um zu den Geraden und Punkten einer Figur F die homologen zu finden, konstruiert man vorbereitend einige leicht angebbare Geradenpaare der Homologie H. Es erzeugt H auf jedem Kreisdurchmesser eine Projektivität; von dieser kennt man für den Durchmesser CD (Fig. 2) das Paar C, U und die Doppelpunkte M und N, wenn N der Schnittpunkt mit der Achse m ist. Projiziert man diese drei Paare von A aus auf den Hilfskreis k, so entsteht auf diesem eine Projektivität, die dem Punkte C den Schnittpunkt E von AU mit dem Kreis zuordnet, während A und B die Doppelpunkte sind, AB also die Perspektivachse ist. Um also zu D den homologen Punkt D' zu konstruieren, verbindet man E mit M bis zum Schnittpunkt F mit k und projiziert diesen Punkt F von A aus auf MD. Entspricht dem Punkte A in der Homologie der Punkt A', so wird $MA' = MD'$ sein. Man findet daher A', indem man die Halbierungsgerade s des rechten Winkels AMD ermittelt. Diese trifft die Strecke AD in ihrem Mittelpunkte O, der zum — idealen — Schnittpunkt von BC mit AD konjugiert-harmonisch ist in bezug auf A und D. Man bestimmt also zum Strahl BC den konjugiert-harmonischen bezüglich der Strahlen BA und BD; dann schneidet dieser AD in dem gesuchten Punkte O. Die Geraden AD' und DA' müssen sich auf s schneiden, womit A' gefunden ist.

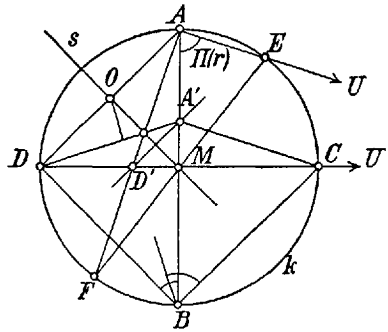

Fig. 2.

Man kennt nun als Paare homologer Geraden AD und $A'D'$, AU und $A'C$, da $U' \equiv C$ ist. Die Symmetrie bezüglich der Durchmesser AB und CD gestattet aber — ohne daß dies immer notwendig durchzuführen wäre — noch die Angabe der Paare, die zu den gefundenen symmetrisch liegen.

Ist g irgend eine Gerade der Figur F, so bringt man sie zum Schnitt mit zwei Geraden, deren homologe man kennt, und bestimmt zu den Schnittpunkten auf den Strahlen durch M die homologen. Die Verbindungsgerade beider ist g'.

Wenn z. B. eine gegebene Strecke PQ von einem gegebenen Punkte X aus auf einer gegebenen Geraden g abgetragen werden soll, so ergibt sich der Endpunkt Y der Strecke wie folgt. Sind U_1, U_2 die unendlich fernen Punkte der Geraden PQ, V_1, V_2 diejenigen von g, so fordert die Gleichheit der Strecken XY und PQ die Gleichung

$$(U_1 U_2 P Q) = (V_1 V_2 X Y).$$

Man konstruiert also P', Q', X' und g', findet auf dem Kreis k die Punkte U_1', U_2', V_1', V_2', die den unendlich fernen entsprechen, und konstruiert Y' aus der Beziehung

$$(U_1' U_2' P' Q') = V_1' V_2' X' Y').$$

Y liegt auf g und dem Strahl MY'. Diese Konstruktion erfordert insgesamt 33 gerade Linien und es sei vergleichsweise bemerkt, daß Steiner zu seiner Lösung der entsprechenden Aufgabe der euklidischen Geometrie über 40 Gerade benötigt. Im allgemeinen aber erfordern die Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie naturgemäß eher mehr Linien als diejenigen der euklidischen.

Zum Schluß erwähne ich eine Bestimmung von ω, die für alle drei geometrischen Systeme gleich lautet.

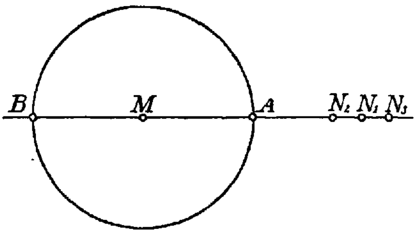

Fig. 3.

Der absolute Kegelschnitt ω ist bestimmt, wenn man einen Kreis k, dessen Mittelpunkt M und auf einem Durchmesser einen Punkt N gibt, für den $MA = AN$ ist. Sind in Fig. 3 MA und AN_1 im Sinne der euklidischen Geometrie gleich, so ist der Punkt N_2 seiner Lage nach charakteristisch für die hyperbolische Geometrie, während zu N_3 eine elliptische Metrik gehören würde.

Die absoluten Punkte U_1, U_2 des Durchmessers AB sind nämlich bestimmt als gemeinsames Paar von zwei Involutionen, wovon die eine durch die Paare

$$M, M \quad \text{und} \quad A, B$$

die andere durch die Paare

$$A, A \quad \text{und} \quad M, N$$

gegeben ist.

Zürich, den 23. Februar 1909.