

Ueber die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

Sind die Exponentendifferenzen einer hypergeometrischen Differentialgleichung reciproke Werthe von ganzen Zahlen:

$$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \nu = \frac{1}{n},$$

so ist bekanntlich das Argument x eine eindeutige automorphe Function des Verhältnisses η zweier Particularlösungen. Geeignete Spaltung in homogene Bestandtheile:*)

$$x = x_1 : x_2, \quad \eta = \eta_1 : \eta_2$$

liefert den Satz, dass x_1 und x_2 (und damit alle ganzen rationalen homogenen Functionen von x_1 und x_2) unverzweigte automorphe Formen von η_1 und η_2 sind. Aber dieselbe Eigenschaft kommt auch, wie zuerst Halphen**) gezeigt hat, den in den x irrationalen Formen:

$$\Phi = (xa)^{\frac{1}{l}}, \quad \Psi = (xb)^{\frac{1}{m}}, \quad \chi = (xc)^{\frac{1}{n}}$$

zu; a, b, c bedeuten dabei die drei Verzweigungspunkte. Wie bereits mehrfach geschehen, sollen dieselben im folgenden als „Primformen“ bezeichnet werden. Analytische Ausdrücke für solche Functionen hat Hr. Poincaré***) gegeben; in formentheoretische Gestalt hat dieselben Hr. Ritter umgesetzt und dabei sowohl Vereinfachungen, als Erweiterungen ihres Gültigkeitsgebietes erzielt; aber auch so reichen sie noch nicht für alle Fälle aus.

Andrerseits hat Hr. Klein†) die Aufmerksamkeit auf die Dar-

*) Vgl. hier und im folgenden: Ritter, die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, dieser Ann. Bd. 41; insbes. p. 8. 16 ff. 41.

**) Comptes Rendus de l'acad. des sciences Bd. 92, p. 856 (1881). Halphen verwendet dort übrigens keine homogene Variablen und es bedürfen also seine Angaben, um mit den im Text gebrauchten Formeln vergleichbar zu sein, noch einer leichten Umsetzung.

***) Acta mathematica I (1882).

†) In einer Vorlesung über lineare Differentialgleichungen, W. S. 1890/91.

stellung der η_1, η_2 durch Perioden von Abel'schen Integralen I. Gattung gelenkt und die Vermuthung ausgesprochen, die zu diesen Integralen gehörenden Thetareihen könnten vielleicht zu analytischen Ausdrücken für die Halphen'schen Formen führen. In den beiden einfachsten Fällen habe ich diese Vermuthung in der That bestätigt gefunden, während in andern Fällen Schwierigkeiten auftreten, die zu überwinden mir bisher nicht gelungen ist. Da aber einerseits gerade die erstgenannten Fälle zu denjenigen gehören, in welchen die Convergenz der zunächst in Betracht kommenden Poincaré'schen Reihen nicht bewiesen ist und man daher bis jetzt eine directe analytische Darstellung der Primformen überhaupt nicht besitzt; da andererseits die in Frage stehenden Specialfälle Abel'scher Integrale auch als solche ein gewisses Interesse besitzen, so glaube ich meine Untersuchung hier mittheilen zu dürfen.

Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$-1 + \lambda - \mu - \nu = 2a,$$

$$-1 - \lambda + \mu - \nu = 2b,$$

$$-1 - \lambda - \mu + \nu = 2c,$$

$$-1 + \lambda + \mu + \nu = 2d,$$

so sind die erwähnten Integrale die folgenden:

$$\int (za)^a (zb)^b (zc)^c (zx)^d (z dz).$$

Sie gehören zu einer Classe von Integralen, die unter dem Namen der *binomischen* vielfach behandelt worden sind;*) insbesondere hat Herr Netto**) bereits alle diejenigen Fälle aufgezählt, welche unter $p = 2$ und $p = 3$ fallen. Zwei von den ersteren gehören zu den hier zu betrachtenden, nämlich:

$$\int \frac{(z dz)}{\sqrt[4]{(za)^2 (zb)^2 (zc)^2 (zx)}} \quad \left(\text{für } \lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = 0 \right)$$

und:

$$\int \frac{(z dz)}{\sqrt[3]{(za) (zb)^2 (zc)^2 (zx)}} \quad \left(\text{für } \lambda = \frac{1}{3}, \mu = 0, \nu = 0 \right);$$

und diese beiden sind es eben, welche den hier zu untersuchenden Fällen entsprechen. Dass in ihnen ein, resp. zwei Exponentendifferenzen den Werth 0 haben, bedingt, dass eine, resp. zwei Prim-

*) Zuletzt von Hrn. Osgood, zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen, Diss. Erlangen 1890. Dort p. 5 die ältere Litteratur zusammengestellt.

**) De transformatione aequationis $y^2 = R(x)$ in aequationem $\eta^2 = R_1(\xi)$, Diss. Berol. 1870, p. 7.

formen ausarten; für die zwei, resp. eine nicht ausgeartete werden wir analytische Ausdrücke finden, deren Convergencebereich sich bis an ihre natürliche Grenze erstreckt.

I. Der Fall $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = 0.$

§ 1.

Construction und canonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche.

Im Falle $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = 0$ war es das Integral:

$$(1) \quad \int \frac{(z dz)}{\sqrt[4]{(za)^2 (zb)^2 (zc)^3 (zx)}}$$

dessen Perioden wir zu betrachten hatten. Wir müssen uns vor allem die Riemann'sche Fläche construiren, auf der die zu integrirende Function eindeutig ist. Diese ist dadurch definirt, dass wir neben z_1, z_2 die algebraische Form:

$$(2) \quad y = \sqrt[4]{(za)^2 (zb)^2 (zc)^3 (zx)}$$

stellen; wir sehen vor allem, dass sie vier Blätter wird besitzen müssen, die bei $z = c$ und $z = x$ alle vier, bei $z = a$ und $z = b$ zweimal zu je zweien zusammenhängen. Die Fläche ist sonach eine reguläre.*) Wir können ihre vier Blätter sehr bequem dadurch unterscheiden, dass wir festsetzen: wenn y_k der Werth von y ist, welcher in dem über einer bestimmten Stelle z_0 der z -Ebene befindlichen Punkte des k 'ten Blattes statt hat, soll:

$$(3) \quad y_2 = iy_1, \quad y_3 = -y_1, \quad y_4 = -iy_1$$

sein. Ist das für eine Stelle z_0 festgesetzt, so wird es für jede andere Stelle z auch gelten. Alsdann führt die Umkreisung von a oder b in positivem Sinne aus dem 1. ins 3., dem 2. ins 4., dem 3. ins 1., dem 4. ins 2. Blatt; dagegen bei ebensolcher Umkreisung von c (bezw. x) werden die Blätter in der Reihenfolge (1, 4, 3, 2), bezw. (1, 2, 3, 4) durchlaufen. Um diesen Zusammenhang der Blätter vor Augen zu haben, werden wir einen beliebigen Punkt o der Fläche mit den 4 Verzweigungspunkten durch Uebergangslinien verbinden; unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass dieselben bei Umkreisung von o in derselben Reihenfolge getroffen werden, wie in nebenstehender Figur 1: In der

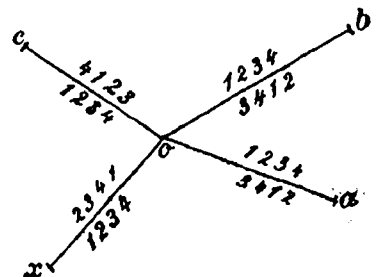


Fig. 1.

*) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 14, p. 459 und dazu Dyck, dieser Ann. Bd. 17, p. 473.

selben deuten die an die Uebergangslinien einander gegenüber gesetzten Ziffern an, wie die Blätter in ihnen zusammenhängen.

Um nun auf dieser Fläche ein canonesches Querschnittssystem*) zu construiren, breiten wir sie zunächst in eine Ebene aus. Zu diesem Zwecke trennen wir die Blätter längs der Uebergangslinien oa , ob , ox von einander, sodass sie nur noch längs oc zusammenhängen, deformiren dann jedes einzelne Blatt

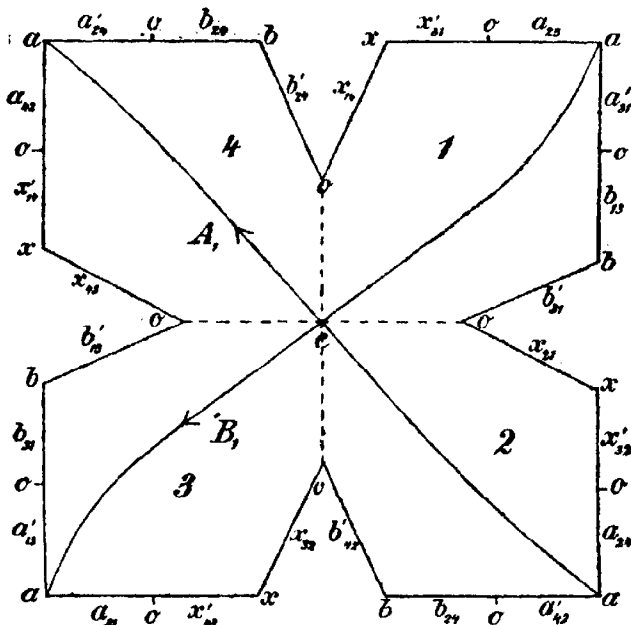


Fig. 2.

in geeigneter Weise und legen sie schliesslich in einer Ebene nebeneinander, sodass nebenstehende Fig. 2 entsteht. Jedes Blatt stellt sich in derselben als Achteck dar (mit zwei Winkeln von je 180°); die Blätter liegen so um den Punkt c herum, dass sie bei positiver Umkreisung desselben in der richtigen Reihenfolge getroffen werden. Jede Seite ist bezeichnet mit den Buchstaben desjenigen Verzweigungspunktes, den sie enthält;

als Indices sind ihr die Nummern derjenigen beiden Blätter beigefügt, die sie verbindet. Dabei steht die Nummer desjenigen Blattes voran, das zur Rechten der von o nach dem Verzweigungspunkt hin durchlaufenen Seite liegt; und ein Accent ist da beigesezt, wo die Seite als Begrenzung des durch ihren zweiten Index bezeichneten Blattes auftritt.

Auf Grund dieser Figur können wir einen „elementaren Periodenweg“ als eine Linie definiren, welche von einem Punkt einer nicht-accentuirten Seite nach dem entsprechenden Punkt der gleichbezeichneten accentuirten führt; ein solcher soll mit demselben Zeichen versehen werden, wie die erstgenannte dieser Seiten. Wir können einen solchen Weg auch auffassen als zusammengesetzt aus zwei Wegstücken, deren jedes, ganz in einem Blatte liegend, c mit einem der übrigen Verzweigungspunkte verbindet; was wir z. B. durch folgende Gleichung ausdrücken wollen:

$$(4) \quad a_{13} = ac_1 + ca_3.$$

Auf der Ebene, über welche die ursprüngliche Gestalt der Riemann-

*) Für die folgenden Entwicklungen vgl. man Lüroth, über die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale, Abh. der bayr. Acad. II. Cl. Bd. 15, 16 (1885/87). Dabei folge ich dem von Herrn Lüroth (vgl. p. 333 der ersten Abh.) ursprünglich eingeschlagenen Gedankengang, nicht seiner auf Benutzung anschauungsmässiger Hilfsmittel möglichst verzichtenden Darstellung.

schen Fläche ausgebreitet ist, stellt sich ein solcher Weg dar als eine Curve, welche c und noch einen andern Verzweigungspunkt umschliesst und dabei eventuell c mehrmals umwindet, aber ausser den dadurch bedingten keine weiteren Uebergangslinien trifft.

Solcher elementaren Periodenwege haben wir in unserer Figur im ganzen 12; diese sind aber nicht alle von einander unabhängig. Vielmehr können *vollständige Umkreisungen sowohl der Verzweigungspunkte a, b, x als auch des Punktes o* aus ihnen zusammengesetzt werden; das liefert folgende Relationen:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_{13} + a_{31} &= 0, & a_{13} + b_{31} + x_{21} &= 0, \\ a_{24} + a_{42} &= 0; & a_{24} + b_{42} + x_{32} &= 0, \\ b_{13} + b_{31} &= 0, & a_{31} + b_{13} + a_{43} &= 0, \\ b_{24} + b_{42} &= 0; & a_{42} + b_{24} + x_{14} &= 0. \\ x_{14} + x_{43} + x_{32} + x_{21} &= 0; \end{aligned}$$

In diesen Relationen drückt das $= 0$ jedesmal aus, dass ein aus den links stehenden Elementarwegen zusammengesetzter Weg sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Jeder Elementarweg kommt in einer Relation der ersten Gruppe und in einer der zweiten vor*); in Folge dessen ist *von den 9 Relationen (5) eine und nur eine eine Folge der andern, so dass alle Elementarwege sich aus vier geeignet gewählten unter ihnen zusammensetzen lassen. So ergibt sich für das Geschlecht der Fläche:*

$$(6) \quad p = 2.$$

Aus diesen „elementaren Periodenwegen“ können wir nun folgendermassen ein „canonisches Querschnittssystem“ im Sinne Riemann's erhalten. Als erstes Querschnittspaar können immer zwei sich schneidende elementare Periodenwege gewählt werden; wir mögen etwa:

$$(7) \quad A_1 = a_{24}, \quad B_1 = a_{13}$$

nehmen. Zerschneiden wir unsere Figur 2 längs dieser Querschnitte (die bereits in sie eingetragen sind) und fügen die entstehenden Stücke in geeigneter Weise längs einander zugeordneter Seiten an einander, so können wir z. B. nebenstehende Figur 3 erhalten. Wege, welche

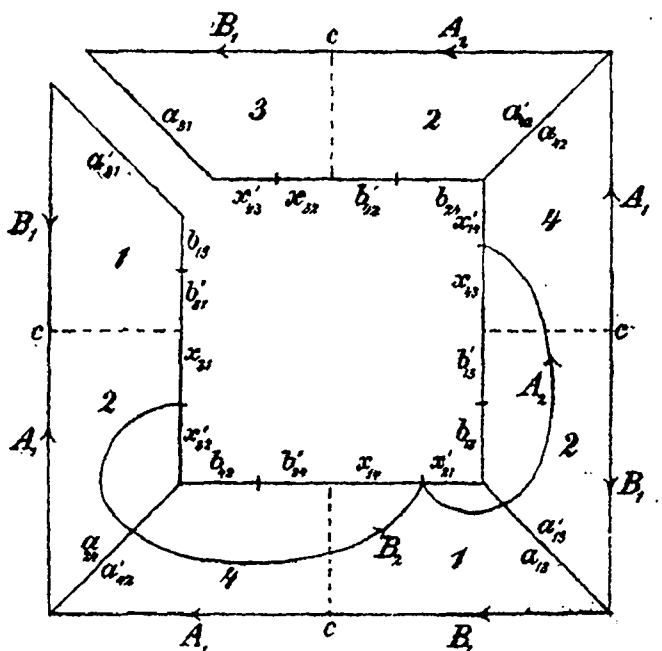


Fig. 3.

*) Vgl. Lüroth, a. a. O. Bd. 15, p. 342 ff.

ganz im Innern dieser Figur verlaufen (also weder A_1 , noch B_1 schneiden), seien wie bei Fig. 2, aber mit einem übergesetzten Strich bezeichnet. Aus ihnen können wir wieder in mannigfacher Weise zwei sich schneidende auswählen, welche geeignet sind, als ein Paar

eines canonischen Querschnittsystems zu dienen; z. B. die beiden folgenden:

$$A_2 = \bar{x}_{14}, \quad B_2 = \bar{x}_{21},$$

welche in Fig. 3 bereits eingetragen sind. Zerschneiden wir Fig. 3 längs dieser Querschnitte und fügen wie vorhin die abgetrennten Stücke längs correspondirender Seiten an, so erhalten wir nebenstehende Figur 4.

Diese lässt sich nun dadurch vereinfachen, dass aneinanderstossende correspondirende Seiten zusammengeheftet werden: zunächst b_{24} mit b'_{24} , hierauf b_{42} mit b'_{42} , dann x_{32} mit x'_{32} ; ausserdem b_{31} mit b'_{31} und dann b_{13} mit b'_{13} . Dadurch entsteht nebenstehende Figur 5.

In derselben repräsentiren a_{31} , x'_{43} einerseits, a'_{31} , x_{43} andererseits die beiden Ufer des von Riemann mit c_1 bezeichneten Verbindungsstückes zwischen den beiden Querschnittspaaren. Die Reduction der Fläche auf eine einfach zusammenhängende ist damit vollendet.

Es bleibt noch übrig, die Resultate zusammenzustellen. Wie man aus Figur 3 entnimmt, ist:

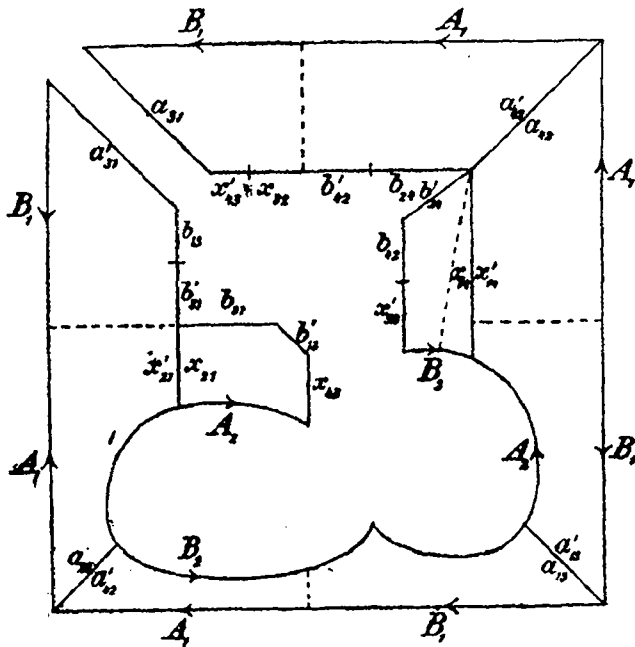


Fig. 4.

Fig. 5: A simplified geometric diagram showing a rectangular frame with a large central cutout. The top edge is labeled B1 and A1. The left edge is B1 and A1. The right edge is A1 and B1. The bottom edge is A1 and B1. Internal segments are labeled with a, b, x, and their primed counterparts. A central circular region is labeled A2 and B2.

Fig. 5.

(9)

$$\bar{x}_{14} = x_{14} - a_{13},$$

$$\bar{x}_{21} = x_{21} - a_{24};$$

man erhält also als Ausdrücke der canonischen Querschnitte durch die elementaren:

$$(10) \quad \begin{aligned} A_1 &= a_{24}, & B_1 &= a_{13}, \\ A_2 &= x_{14} - a_{13}, & B_2 &= x_{21} - a_{24} \end{aligned}$$

und mit Hilfe der Relationen (5) umgekehrt als *Ausdrücke der elementaren Querschnitte durch die canonischen*:

$$(11) \quad \begin{aligned} a_{13} &= B_1, & b_{31} &= -A_1 - B_1 - B_2, & x_{21} &= A_1 + B_2, \\ a_{24} &= A_1, & b_{42} &= -A_1 + A_2 + B_1, & x_{32} &= -A_2 - B_1, \\ a_{31} &= -B_1, & b_{13} &= A_1 + B_1 + B_2, & x_{43} &= -A_1 - B_2, \\ a_{42} &= -A_1, & b_{24} &= A_1 - A_2 - B_1, & x_{14} &= A_2 + B_1. \end{aligned}$$

§ 2.

Transformationen der Fläche in sich.

Die speciellen Eigenschaften, welche unsere Flächen gegenüber der allgemeinen Fläche desselben Geschlechts besitzt, beruhen auf den *eindeutigen Transformationen in sich*, welche sie zulässt; diese müssen wir daher zunächst untersuchen. Dabei werden wir namentlich fragen, *welche Aenderungen unser canonisches Querschnittssystem bei jeder dieser Transformationen erfährt*.

Unmittelbar ersichtlich ist, dass *unsere Fläche die folgende eindeutige Transformation in sich gestattet*:

$$(1) \quad z' = z, \quad y' = iy.$$

Dieselbe ist von der Periode 4; sie vertauscht die Blätter der Fläche in der Reihenfolge (1 2 3 4) cyklisch, und zwar so, dass jedes Blatt als ganzes in ein anderes Blatt übergeführt wird. Dementsprechend setzen sich auch die elementaren Periodenwege sehr einfach um; und daraus erhält man mit Hilfe der Relationen (10) und (11) des § 1 die folgenden Umsetzungen der canonischen Querschnitte*):

$$(2) \quad \begin{aligned} A'_1 &= a'_{24} &= a_{31} &= -B_1, \\ A'_2 &= x'_{14} - a'_{13} &= x_{21} - a_{24} &= B_2, \\ B'_1 &= a'_{13} &= a_{24} &= A_1, \\ B'_2 &= x'_{21} - a'_{24} &= x_{32} - a_{31} &= -A_2. \end{aligned}$$

Bei der Transformation (1) geht also nicht nur die Fläche in sich über, sondern auch das auf ihr gezeichnete canonische Querschnittssystem, indem die einzelnen Querschnitte desselben nur unter sich vertauscht und theilweise im Richtungssinn geändert werden.

Eine *zweite Transformation* unserer Fläche in sich kommt zu Stande, wenn man z einer linearen Substitution unterwirft, welche

*) Dass Accente hier in anderer Bedeutung benutzt werden, als in § 1, wird nicht zu Verwechslungen Anlass geben.

a mit b , c mit x vertauscht, was bekanntlich möglich ist. In homogener Form kann eine solche durch folgende 4 Gleichungen dargestellt werden, von denen je zwei die beiden andern zur Folge haben:

$$(3) \quad \begin{aligned} (cb) (s'a) &= (ac) (sb), \\ (ax) (s'b) &= (xb) (sa), \\ (ax) (s'c) &= (ac) (sx), \\ (cb) (s'x) &= (xb) (sc). \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Substitution ist entgegengesetzt gleich dem Doppelverhältniss von a und b gegen c und x :

$$(4) \quad \Delta = - \frac{(ac) (bx)}{(ax) (bc)}.$$

Um zu zeigen, dass unsere Fläche bei dieser Substitution in sich übergeht, führen wir eine Function y' ein, welche von s' ebenso abhängt, wie y von s :

$$(5) \quad y' = \sqrt[4]{(s'a)^2 (s'b)^2 (s'c)^3 (s'x)}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$(6) \quad \sigma = \sqrt[4]{\frac{(ac) (bc)}{(ax) (bx)}},$$

so finden wir:

$$(7) \quad \begin{aligned} y &= \sigma \Delta \sqrt[4]{(sa)^2 (sb)^2 (sc) (sx)^3} = \sigma \Delta \frac{y'^2}{(sa) (sb) (sc)^2} \\ &= \sigma \Delta \frac{(sa) (sb) (sc) (sx)}{y} \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$(8) \quad \begin{aligned} y &= \frac{\sigma}{\Delta} \sqrt[4]{(s'a)^3 (s'b)^2 (s'c) (s'x)^3} = \frac{\sigma}{\Delta} \frac{y'^3}{(s'a) (s'b) (s'c)^2} \\ &= \frac{\sigma}{\Delta} \frac{(s'a) (s'b) (s'c) (s'x)}{y'}. \end{aligned}$$

Damit sind y' und s' rational durch y und s ausgedrückt und umgekehrt, während zwischen y' und s' dieselbe Gleichung besteht, wie zwischen y und s ; d. h. es ist in der That durch die Substitution (8) nicht nur die Ebene der s umkehrbar eindeutig auf sich selbst bezogen, sondern auch das algebraische Gebilde (y, s) . Aber diese letztere Beziehung kann, wenn (8) gegeben ist, noch auf 4 verschiedene Arten hergestellt werden; dieselben unterscheiden sich durch die Auswahl des in der Definition von σ (6) der 4. Wurzel beizulegenden Werthes. Sie gehen aus einander hervor, wenn man irgend eine von ihnen mit der Substitution (1) combinirt; es genügt daher, eine von ihnen zu betrachten und demgemäss von hier ab unter σ einen bestimmten Werth der 4. Wurzel zu verstehen.

Wollen wir nun weiter untersuchen, wie sich bei unserer Transformation das Querschnittssystem ändert, so haben wir vor allem zu beachten, dass die *Uebergangslinien unserer Figuren mit dem algebraischen Gebilde als solchem (mit der „idealen Riemann'schen Fläche“)* nichts zu thun haben und folglich keineswegs in sich übergeführt zu werden brauchen. Vielmehr wird der Punkt o in einen andern o' übergehen und damit werden auch die Uebergangslinien sich ändern^{*)}. Um von den damit verbundenen Modificationen ein klares Bild zu bekommen, zeichnen wir beide Systeme von Uebergangslinien (die alten ausgezogen, die neuen punktiert) in eine und dieselbe Figur (den Punkt o' denken wir dabei ins unendliche verlegt). Die beiden Systeme

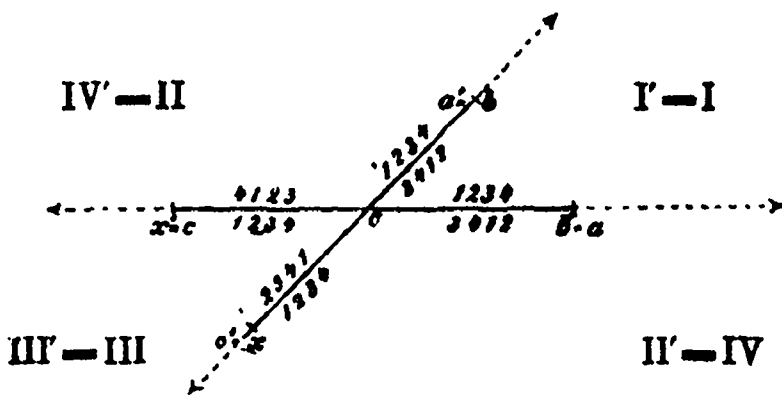


Fig. 6

zerlegen zusammengenommen die s -Ebene in 4 Gebiete, die durch römische Ziffern bezeichnet sind; dieselben werden bei der Substitution (8) in der Weise vertauscht, wie es in der Figur angegeben ist. Diese Gebietseintheilung überträgt sich nun auch auf jedes Blatt unserer Fläche; dabei ist aber zu beachten, dass die Gebiete in der transformierten Fläche in anderer Weise zu Blättern zusammengefasst sind, als in der ursprünglichen. Ein Gebiet eines Blattes kann dem entsprechenden Gebiet eines beliebigen andern Blattes noch zugeordnet werden, da die Fläche regulär ist; ist das geschehen, so bestimmen sich die übrigen Zuordnungen entsprechender Gebiete durch Ueberschreitung entsprechender Uebergangslinien. Wir wollen etwa:

$$1I' - 1I$$

setzen; gehen wir dann von $1I$ aus unter Ueberschreitung der Uebergangslinie oa nach $3IV$, so entspricht dem ein Weg, der von

^{*)} Auch wenn man den Punkt o mit einem der Doppelpunkte der Substitution (8) zusammenfallen lässt, kann man nicht erreichen, dass das System der Uebergangslinien in sich transformirt wird, so lange man an der in Fig. 1 festgesetzten Aufeinanderfolge der Querschnitte um o herum festhält; ändert man aber diese, so werden die Figuren 2—5 viel weniger übersichtlich.

$1 I' = 1 I$ aus $o' a'$ überschreitet. Dort liegt aber $1 II$ an $1 I$ an, sodass wir:

$$3 IV' = 1 II$$

erhalten. So fortfahrend gewinnen wir die Tabelle:

$$(9) \quad \begin{array}{l} 1 I' = 1 I, \quad 1 II' = 3 IV, \quad 1 III' = 4 III, \quad 1 IV' = 3 II, \\ 2 I' = 4 I, \quad 2 II' = 2 IV, \quad 2 III' = 3 III, \quad 2 IV' = 2 II, \\ 3 I' = 3 I, \quad 3 II' = 1 IV, \quad 3 III' = 2 III, \quad 3 IV' = 1 II, \\ 4 I' = 2 I, \quad 4 II' = 4 IV, \quad 4 III' = 1 III, \quad 4 IV' = 4 II. \end{array}$$

Unter Wiederaufnahme einer in § 1, Gleichg. (4) erklärten Bezeichnung entnehmen wir dieser Tabelle die folgende:

$$(10) \quad \begin{array}{l} a' b_1' = b a_1, \quad b' c_1' = a x_3, \quad c' x_1' = x c_4, \quad x' a_1' = c b_3, \\ a' b_2' = b a_4, \quad b' c_2' = a x_2, \quad c' x_2' = x c_3, \quad x' a_2' = c b_2, \\ a' b_3' = b a_3, \quad b' c_3' = a x_1, \quad c' x_3' = x c_2, \quad x' a_3' = c b_1, \\ a' b_4' = b a_2, \quad b' c_4' = a x_4, \quad c' x_4' = x c_1, \quad x' a_4' = c b_4. \end{array}$$

Damit sind wir nun im Stande, die Aenderung des Querschnittsystems bei unserer Transformation abzuleiten. Man hat z. B. nach § 1, (10):

$$A_1' = a_2' = a' c_2' + c' a_4'.$$

Die hier rechts stehenden Wegstücke kommen in der Tabelle (10) nicht unmittelbar vor, man kann aber etwa $a' c_2'$ durch $a' x_2' + x' c_2'$, $c' a_4'$ durch $c' x_4' + x' a_4'$ ersetzen und erhält dann aus (10):

$$A_1' = b c_2 + c x_3 + x c_1 + c b_4.$$

Fügt man rechts $x c_2 + c x_4$ zu, so kann man wieder $b c_2 + c b_4$ zu b_{24} , $x c_4 + c x_3$ zu x_{43} , $x c_1 + c x_4$ zu x_{14} zusammenziehen und erhält aus § 1, Gleichg. (11) $A_1' = -B_2$. So gewinnt man die folgende Umsetzung der canonischen Querschnitte:

$$(11) \quad \begin{array}{l} A_1' = -B_2, \quad B_1' = A_2, \\ A_2' = B_1, \quad B_2' = -A_1. \end{array}$$

Auch bei unserer zweiten Transformation geht sonach unser canonisches Querschnittsystem in sich über, abgesehen von Vertauschungen der Querschnitte unter einander und Aenderung ihres Richtungssinnes.

§ 3.

Die Integrale I. Gattung und ihre Perioden.

Alle Integrale I. Gattung unserer Fläche lassen sich linear und homogen durch zwei geeignete unter ihnen ausdrücken; als solche mögen wir etwa die beiden folgenden wählen:

$$(1) \quad w_1 = \sqrt[4]{(ac)(bc)} \int \frac{(x ds)}{y},$$

$$(2) \quad w_2 = \sqrt[4]{(ax)(bx)} \int \frac{(xa)(xb)(xc)^2(xdx)}{y^3}.$$

Die Factoren vor den Integralzeichen sind zunächst im Interesse der Vereinfachung späterer Formeln hinzugefügt; man erkennt aber, dass dadurch w_1 und w_2 in den 4 Paaren homogener Variablen $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, x_1 x_2$ von derselben Dimension $-\frac{1}{4}$ werden. Die Perioden, welche diese Integrale bei *Durchlaufung* der Querschnitte unseres canonischen Systems annehmen, seien bezeichnet mit:

	A_1	A_2	B_1	B_2
(3)	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Zur Ableitung von Relationen zwischen diesen Perioden benutzen wir die Resultate des vorigen Paragraphen über die eindeutigen Transformationen in sich, welche unsere Fläche zulässt. Bei der ersten Transformation haben wir:

$$(4) \quad w_1' = -i w_1, \quad w_2' = i w_2.$$

Es ist aber z. B.:

$$(5) \quad \int_{A_1'} dw_1' = \int_{A_1} dw_1;$$

also folgt aus den Gleichungen (4) und § 2, (2):

$$\begin{aligned} +i\omega_{13} = \omega_{11}, & \quad -i\omega_{14} = \omega_{12}, & \quad -i\omega_{11} = \omega_{13}, & \quad +i\omega_{12} = \omega_{14}, \\ -i\omega_{23} = \omega_{21}, & \quad +i\omega_{24} = \omega_{22}, & \quad +i\omega_{21} = \omega_{23}, & \quad -i\omega_{22} = \omega_{24}; \end{aligned}$$

Gleichungen, die sich auf die vier folgenden reduciren:

$$(6) \quad \begin{aligned} \omega_{13} &= -i\omega_{11}, & \omega_{14} &= i\omega_{12}, \\ \omega_{23} &= i\omega_{21}, & \omega_{24} &= -i\omega_{22}. \end{aligned}$$

Die erste Transformation liefert also Relationen zwischen den verschiedenen Perioden desselben Integrals.

Bei der Substitution (3), (7) des § 2 dagegen wird:

$$(7) \quad w_1' = w_2, \quad w_2' = w_1$$

(unter der Voraussetzung, dass über die Werthe der 4. Wurzeln in § 2, Gleichg (6) und § 3, Gleichn (1), (2) in übereinstimmender Weise verfügt ist); also folgt aus § 2, (11):

$$\begin{aligned} -\omega_{24} &= \omega_{11}, & \omega_{23} &= \omega_{12}, & \omega_{22} &= \omega_{13}, & -\omega_{21} &= \omega_{14}, \\ -\omega_{14} &= \omega_{21}, & \omega_{13} &= \omega_{22}, & \omega_{12} &= \omega_{23}, & -\omega_{11} &= \omega_{24}; \end{aligned}$$

Gleichungen die sich mit Rücksicht auf (6) auf die beiden folgenden reduciren:

$$(8) \quad \omega_{21} = -i\omega_{12}, \quad \omega_{22} = -i\omega_{11}.$$

Die zweite Transformation liefert also Relationen zwischen den Perioden verschiedener Integrale.

Die Tabelle der Perioden wird demnach:

$$(9) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ \hline w_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & -i\omega_{11} & i\omega_{12} \\ w_2 & -i\omega_{12} & -i\omega_{11} & \omega_{12} & -\omega_{11} \end{array};$$

dabei ist bemerkenswerth, dass die bekannte Bilinearrelation zwischen den Perioden durch die angegebenen Werthe derselben von selbst erfüllt wird.

Statt der bisher benutzten Perioden führen wir nun neue ein, bei welchen die am Schlusse des § 2 hervorgehobene einfache Eigenschaft nicht mehr gilt, welche aber dafür im folgenden einfachere Formeln geben; wir setzen nämlich*):

$$(10) \quad \begin{array}{ll} A_1 = B_1 = a_{13}, & B_1 = -A_1 - B_2 = x_{43}, \\ A_2 = B_2 = x_{21} - a_{24}, & B_2 = -A_2 - B_1 = x_{21}. \end{array}$$

Für diese wird das Periodenschema:

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	$-i\omega_{11}$	$i\omega_{12}$	$-\omega_{11} - i\omega_{12}$	$-\omega_{12} + i\omega_{11}$
w_2	ω_{12}	$-\omega_{11}$	$i\omega_{12} + \omega_{11}$	$i\omega_{11} - \omega_{12}$

oder wenn**):

$$\begin{array}{l} -\omega_{11} - i\omega_{12} = \eta_1, \\ -i\omega_{11} = \eta_2 \end{array}$$

gesetzt wird:

$$(11) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ \hline w_1 & -\eta_2 & -\eta_1 + i\eta_2 & \eta_1 & -i\eta_1 \\ w_2 & i\eta_1 + \eta_2 & i\eta_2 & -\eta_1 & -i\eta_1 \end{array}$$

*) Die Transformation (10) erfüllt in der That die Bedingungen, welche erforderlich sind, damit A_1, A_2, B_1, B_2 ebenfalls ein „canonisches“ Querschnittsystem bilden.

**) An Integrale II. G. ist bei der Bezeichnung η natürlich nicht zu denken; es handelt sich darum, Anschluss an eine in der Theorie der Differentialgleichungen 2. O. gebrauchte Bezeichnung zu gewinnen.

Die 8 Perioden von w_1 und w_2 setzen sich also aus nur zwei Grössen mit Hilfe complexer ganzer Zahlen als Coefficienten linear zusammen.

§ 4.

Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde.

Um unser Gebilde vom Geschlechte 2 auf die Normalform $(\lambda, \sqrt{f_6(\lambda)})$ zu reduciren, haben wir das Verhältniss zweier Differentiale I. G. als neue Variable einzuführen. Indem wir uns homogener Schreibweise bedienen, mögen wir etwa setzen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= y^2, \\ \lambda_2 &= (za)(zb)(zc)^2. \end{aligned}$$

Um aus diesen Gleichungen umgekehrt z_1, z_2, y durch λ_1, λ_2 auszudrücken, führen wir einen Proportionalitätsfactor σ ein und erhalten zunächst:

$$(2) \quad \begin{aligned} (zc) &= \sigma \lambda_2^2, \\ (zx) &= \sigma \lambda_1^2 \end{aligned}$$

und daraus weiter:

$$(3) \quad \begin{aligned} (cx)(za) &= \sigma [(ax) \lambda_2^2 - (ac) \lambda_1^2], \\ (cx)(zb) &= \sigma [(bx) \lambda_2^2 - (bc) \lambda_1^2]. \end{aligned}$$

Irgend zwei dieser Formeln geben z_1, z_2 ; um y zu erhalten, definiren wir die binäre Form Λ Grades Λ durch:

$$(4) \quad \Lambda = \lambda_1 \lambda_2 [(ax) \lambda_2^2 - (ac) \lambda_1^2] [(bx) \lambda_2^2 - (bc) \lambda_1^2]$$

und erhalten:

$$(5) \quad y = \frac{\sigma^2 \lambda_2 \sqrt{\Lambda}}{(cx)},$$

$$(6) \quad \frac{y^3}{(za)(zb)(zc)^2} = \frac{\sigma^2 \lambda_1 \sqrt{\Lambda}}{(cx)},$$

sowie umgekehrt:

$$(7) \quad \sqrt{\Lambda} = (cx) \cdot (za)^3 (zb)^3 (zc)^4 y.$$

Durch die Formeln (1) und (7) sind $\lambda_1, \lambda_2, \sqrt{\Lambda}$ rational durch z_1, z_2, y ausgedrückt; durch (2) und (5) umgekehrt $z_1 : z_2$ und $y : z_2^2$ durch $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\sqrt{\Lambda} : \lambda_2^3$ *); es ist also dadurch die vierblättrige Riemann'sche Fläche des § 1 umkehrbar eindeutig auf eine zweiblättrige mit 6 Verzweigungspunkten bezogen.

*) Es scheint nicht möglich zu sein, auch die Formen des einen Gebildes ohne Benutzung eines Proportionalitätsfactors wie hier das σ umkehrbar eindeutig durch die des andern auszudrücken.

Um auf Grund dieser Formeln die Integrale des § 3 in die neue Fläche zu übertragen, bilden wir noch:

$$\begin{aligned} d \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(dz x)}{(zc)} - \frac{(dz x)}{(zx)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(cx)(zdz)}{(zc)(zx)}, \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$(8) \quad (cx)(zdz) = 2\sigma^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda d\lambda);$$

damit erhalten wir:

$$(9) \quad \begin{aligned} w_1 &= 2\sqrt{(ac)(bc)} \int \frac{\lambda_1(\lambda d\lambda)}{V\Lambda}, \\ w_2 &= 2\sqrt{(ax)(bx)} \int \frac{\lambda_2(\lambda d\lambda)}{V\Lambda}. \end{aligned}$$

Was die beiden Transformationen in sich betrifft, welche unsere neue Fläche gemäss § 2 ebenfalls zulassen muss, so lautet die erste derselben:

$$(10) \quad \lambda_1' = \lambda_1, \quad \lambda_2' = -\lambda_2, \quad V\Lambda' = iV\Lambda,$$

die zweite:

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_1' &= \sqrt{(ax)(bx)} \lambda_2, \quad \lambda_2' = \sqrt{(ac)(bc)} \lambda_1, \\ V\Lambda' &= \sqrt{(ac)^3 (bc)^3 (ax)^3 (bx)^3} \cdot V\Lambda. \end{aligned}$$

Wir müssen noch zusehen, wie sich das auf unserer ursprünglichen Fläche eingetragene Querschnittssystem auf die neue zweiblättrige Fläche überträgt; dazu werden wir am bequemsten zu unhomogener Schreibweise übergehen. Zu diesem Zwecke werde gesetzt:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1;$$

dann erhalten wir statt der Formeln (1) — (8): *

$$(1a) \quad \lambda = -\frac{y^2}{z(z-1)^2} = \sqrt{\frac{z-x}{z-1}};$$

$$(2a) \quad z-1 = (x-1) \cdot \frac{1}{1-\lambda^2}, \quad z-x = (x-1) \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2};$$

$$(3a) \quad z = \frac{x-\lambda^2}{1-\lambda^2};$$

$$(4a) \quad \Lambda = -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-x);$$

$$(5a) \quad y = (1-x) \frac{V\Lambda}{(1-\lambda^2)^2};$$

$$(6a) \quad -\frac{y^2}{z(z-1)^2} = (1-x) \frac{\lambda V\Lambda}{(1-\lambda^2)^2};$$

*) Wir führen für die Functionen $y : z^2$ und $\Lambda : \lambda^2$ keine neuen Zeichen ein, sondern behalten y und Λ bei.

$$(7a) \quad \sqrt{\lambda} = (1 - x) \frac{y}{(z-1)^2};$$

$$(8a) \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} (1 - x) \frac{dz}{(z-x)(z-1)}.$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir zunächst, dass die Verzweigungspunkte beider Flächen sich gegenseitig entsprechen, und zwar wie folgt:*)

$z = 0,$	$y = z^{\frac{1}{2}} \sqrt{x},$	$\lambda = -\sqrt{x},$	$\sqrt{\lambda} = 0,$
$0,$	$iz^{\frac{1}{2}} \sqrt{x},$	$+\sqrt{x},$	$0,$
$\infty,$	$z^{\frac{3}{2}},$	$-1,$	$0,$
$\infty,$	$iz^{\frac{3}{2}},$	$+1,$	$0,$
$1,$	$0,$	$\infty,$	$\infty,$
$x,$	$0,$	$0,$	$0.$

Um uns bestimmter ausdrücken und bestimmte Figuren zeichnen zu können, nehmen wir

$$x \text{ positiv, reell, } < 1$$

an. (Den allgemeinen Fall können wir durch stetige Aenderung von x auf diesen zurückführen.) Alsdann nehmen die Querschnitte des § 3 folgende Gestalt an: **)

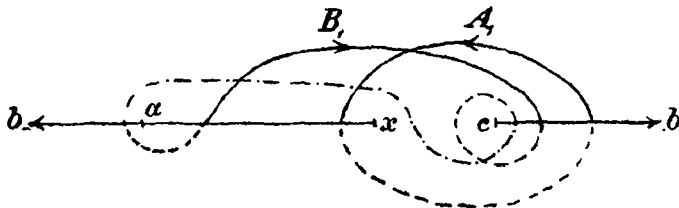


Fig. 7.

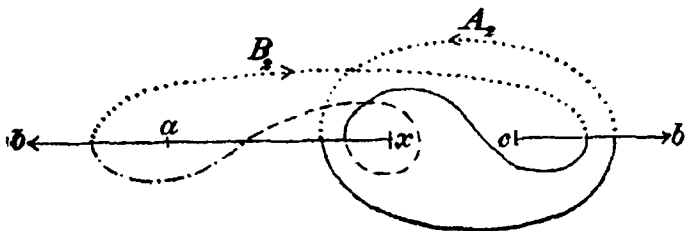


Fig. 8.

*) Die bei $z = 0$ und bei $z = \infty$ übereinanderliegenden Verzweigungspunkte sind durch die Anfangsglieder der zugehörigen Reihenentwicklungen von y nach Potenzen von z unterschieden; $\sqrt[4]{x}$ bedeutet einen bestimmten aber willkürlichen Werth der 4. Wurzel, \sqrt{x} das Quadrat desselben. Wird in dem nachher untersuchten speciellen Fall $\sqrt[4]{x}$ positiv reell genommen, so verbinden der erste und der dritte Verzweigungspunkt das erste und dritte, der zweite und der vierte das zweite und vierte Blatt.

**) Der Deutlichkeit wegen ist jedes Paar Querschnitte in einer besonderen Figur gezeichnet; Linien des ersten Blattes sind ausgezogen, des 2. mit Strichen, des 3. mit Strichen und Punkten, des 4. mit Punkten bezeichnet.

In der Ebene λ können wir ein System von Uebergangslinien annehmen wie folgt: *)

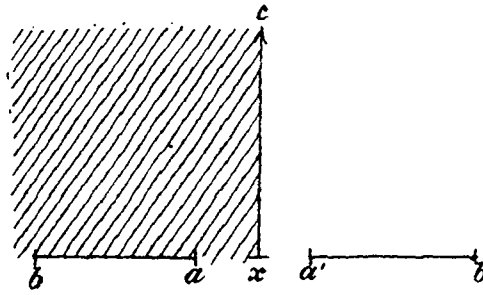


Fig. 9.

das schraffierte Gebiet des ersten Blattes der Fläche $(\lambda, \sqrt{\Lambda})$ entspricht dann derjenigen Halbebene des ersten Blattes der Fläche (z, y) , in welcher z einen positiv imaginären Bestandtheil hat.

Verfolgen wir etwa, wie sich z. B. B_1 in diese Fig. 9 überträgt. Dabei haben wir nur zu beachten, dass in c und x die Winkel auf der λ -Fläche nur halb so gross sind als auf der z -Fläche, während sonst überall (auch in a und b) die Abbildung conform ist. Zieht man also den Querschnitt B_1 in Fig. 7 bis dicht an die geraden Verbindungslinien der Verzweigungspunkte zusammen, so entspricht ihm folgende Linie auf der λ -Fläche: **)

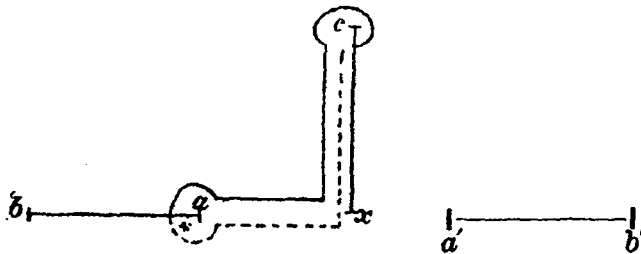


Fig. 10.

die mit der folgenden äquivalent ist:

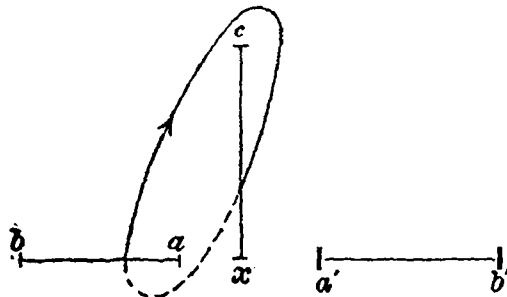


Fig. 11.

*) Die Verzweigungspunkte in Fig. 9 sind mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die entsprechenden in Fig. 8; entsprechen zwei Punkte von (9) demselben von (8), so sind sie durch Accente unterschieden.

**) In Figg. 10—12 ist der Bequemlichkeit halber c im Endlichen gezeichnet.

Führt man dasselbe mit den übrigen Querschnitten aus, so erhält man folgende Figur:

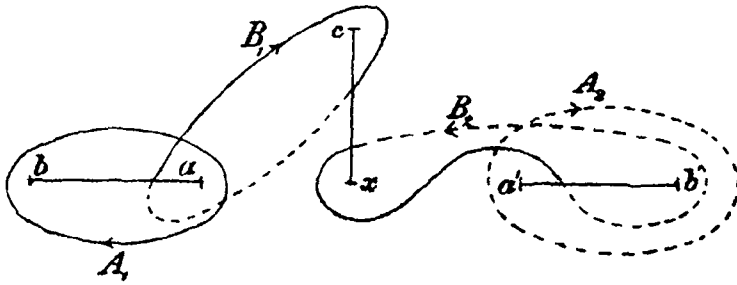


Fig. 18.

Damit ist das § 3, Glchgen. 10 definirte Querschnittsystem auf die zweiblättrige Fläche übertragen.

Wir fragen noch, wie bei dieser Zerschneidung der Fläche die Zerlegungen von Λ in zwei cubische Factoren φ, ψ , wie sie in den geraden Sigma-, bezw. Thetafunctionen auftreten, sich den transcendenten Charakteristiken dieser Functionen zutordnen. Auf Grund der von Hrn. Klein*) gegebenen Regel finden wir insbesondere:

den Zerlegungen:

$$\begin{aligned} \varphi &= (ac) \lambda_1^3 - (ax) \lambda_1 \lambda_2^2, & \varphi &= (ac) \lambda_1^2 \lambda_2 - (ax) \lambda_2^3, \\ \psi &= (bc) \lambda_1^2 \lambda_2 - (bx) \lambda_2^3; & \psi &= (bc) \lambda_1^3 - (bx) \lambda_1 \lambda_2^2. \end{aligned}$$

entsprechen bezw. die Charakteristiken:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5.

Thetanullwerthe und automorphe Primformen.

Nunmehr sind alle Vorbereitungen getroffen, um zu der in Aussicht genommenen Darstellung der Primformen durch Thetanullwerthe übergehen zu können. Wir knüpfen dabei an an die Formel des Hrn. Thomae:**)

$$(1) \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{p_{12}} \sqrt[3]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$$

und haben nur die aus unseren Entwicklungen sich ergebenden Werthe der auftretenden Grössen in dieselbe einzusetzen. Dazu müssen wir uns vor allem die Periodendeterminanten und Thetanullwerthe verschaffen; wir schreiben die § 3, 11 gegebene Tabelle, die sich auf

*) Dieser Ann. Bd. 32, p. 358.

***) Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 71, p. 216.

Durchlaufung von Periodenwegen bezieht, um in die folgende auf *Ueberschreitung* von Querschnitten bezügliche:

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	η_1	$-i\eta_1$	η_2	$\eta_1 - i\eta_2$
w_2	$-\eta_1$	$-i\eta_1$	$-i\eta_1 - \eta_2$	$-i\eta_2$

Aus dieser entnehmen wir die folgenden Werthe der Periodendeterminanten:

$$(2) \quad p_{12} = -2i\eta_1^2, \quad p_{13} = -i\eta_1^2, \quad p_{14} = \eta_1^2 - 2i\eta_1\eta_2, \\ p_{34} = i\eta_1^2 + 2i\eta_1\eta_2 - 2i\eta_2^2, \quad p_{42} = -i\eta_1^2, \quad p_{23} = -\eta_1^2 + 2i\eta_1\eta_2,$$

und der Thetamoduln:

$$(3) \quad \tau_{11} = \frac{i}{2} + \eta, \quad \tau_{12} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{22} = \frac{i}{2} + \eta;$$

indem

$$(4) \quad \eta = \eta_1 : \eta_2$$

gesetzt ist. Es ist aber zu beachten, dass in Gleichg. (1) unter p_{12} die Periodendeterminante der *Normalintegrale*

$$\int \frac{\lambda_1(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \int \frac{\lambda_2(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$$

verstanden ist, welche sich von unsern Integralen w_1, w_2 durch die in § 4, Gleichn. (9) angegebenen Factoren unterscheiden; in Folge dessen ist in (1) für p_{12} das Product des unter (2) angegebenen Werthes in:

$$(5) \quad \frac{1}{4} [(ac)(bc)(ax)(bx)]^{-\frac{1}{4}}$$

zu setzen. Setzt man dann noch zur Abkürzung:

$$(6) \quad e^{\pi i \left(\eta + \frac{i}{2}\right)} = p,$$

so gehen aus (1), je nachdem man die eine oder die andere der beiden am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Zerlegungen anwendet, die beiden Formeln hervor:

$$(7) \quad (ax)^{\frac{1}{4}} (bx)^{\frac{1}{4}} = 4\pi \sqrt{i} \eta_1^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} m_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} m_2 (-1)^{m_1 m_2} p^{m_1^2 + m_2^2},$$

$$(8) \quad (ac)^{\frac{1}{4}} (bx)^{\frac{1}{4}} = 4\pi \sqrt{i} \eta_1^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} m_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} m_2 (-1)^{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right)\left(m_2 + \frac{1}{2}\right)} p^{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m_2 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Diese beiden Formeln geben in der That die gesuchten analytischen Ausdrücke der beiden in diesem Fall existirenden Primformen durch Reihen, welche für alle in Betracht kommenden Werthe von η convergiren.

II. Der Fall $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = 0, \nu = 0.$

§ 1.

Construction und kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche.

Nach der ausführlichen Discussion des vorigen Falles werden wir uns bei dem jetzigen kürzer fassen dürfen, um so mehr, als verschiedene Verhältnisse sich bei demselben einfacher gestalten. Das Integral, dessen Perioden wir zu betrachten haben, ist:

$$(1) \quad \int \frac{(z dx)}{\sqrt{(za)(zb)^2(zc)^2(zx)}}$$

Die zugehörige Riemann'sche Fläche ist definiert durch die Irrationalität:

$$(2) \quad y = \sqrt[3]{(za)(zb)^2(zc)^2(zx)};$$

ihre drei Blätter hängen in den vier Verzweigungspunkten a, b, c, x cyklisch zusammen. Wir unterscheiden die drei Blätter dadurch, dass wir festsetzen: wenn y_k der Werth von y ist, welcher in dem über einer bestimmten Stelle z_0 der z -Ebene befindlichen Punkte des k^{ten} Blattes stattfindet, soll:

$$(3) \quad y_2 = \varepsilon y_1, \quad y_3 = \varepsilon^2 y_1$$

sein. (Unter ε soll in diesem Abschnitt stets die bestimmte dritte Einheitswurzel:

$$(4) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

verstanden werden). *Alsdann führt Umkreisung von a oder x in positivem Sinne aus dem ersten in's zweite, aus diesem in's dritte Blatt; dagegen ebensolche Umkreisung von b oder c aus dem 1. in's 3., aus diesem in's 2. Blatt.* Unter diesen Umständen werden wir die einfachste Uebersicht über die Gestalt der Fläche erhalten, wenn wir a mit b, c mit x durch Uebergangslinien verbinden; der Zusammenhang der Blätter längs derselben findet dann so statt, wie in der nachfolgenden Figur angegeben:

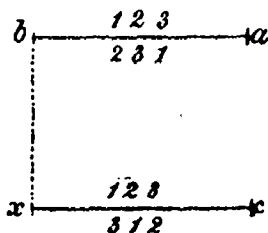


Fig. 13.

Um diese Fläche in eine Ebene auszubreiten, trennen wir die Blätter längs der Uebergangslinien von einander, schneiden jedes längs einer von b nach x führenden (in Fig. 13 punktierten) Linie auf, deformiren

sie in geeigneter Weise und legen sie schliesslich längs ab wieder so aneinander, wie sie dort ursprünglich zusammenhingen, sodass folgende Figur entsteht:

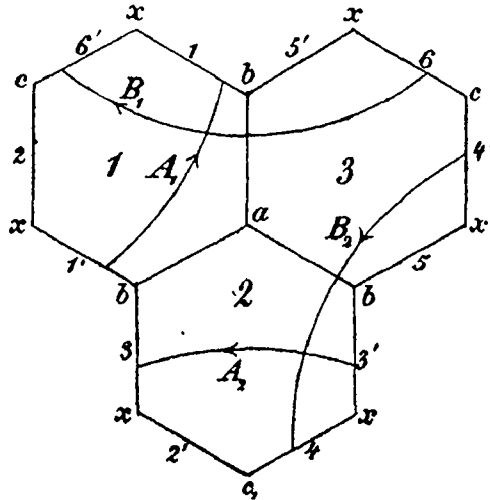


Fig. 14.

Die Seiten in dieser Figur sind einfach numerirt; zusammengehörige Seiten sind mit derselben Nummer bezeichnet und durch einen Accent unterschieden. Als *elementaren Periodenweg* (k) bezeichnen wir dann eine Linie, welche von einem Punkt der Seite k' nach dem entsprechenden Punkt der Seite k führt. Solcher elementaren Periodenwege haben wir in unserer Figur 6; zwischen ihnen bestehen (vgl. I, § 1, Gleichgen (5)) die drei Relationen:

$$(5) \quad \begin{aligned} (1) + (3) + (5) &= 0, & (\text{Umkreisung von } b), \\ (2) + (4) + (6) &= 0, & (\text{„ „ } c), \\ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) &= 0, & (\text{„ „ } x), \end{aligned}$$

welche mit 2 unabhängigen äquivalent sind; es bleiben also vier unabhängige Periodenwege und das Geschlecht der Fläche ergibt sich zu:

$$p = 2.$$

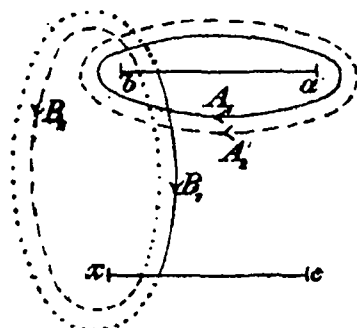


Fig. 15.

Aus diesen elementaren Periodenwegen kann in unserem Falle ein *kanonisches Querschnittssystem* ohne weiteres zusammengesetzt werden; z. B. in der in Fig. 14 bereits angegebenen Weise, nämlich:

$$(6) \quad \begin{aligned} A_1 &= (1), & B_1 &= -(6), \\ A_2 &= (3), & B_2 &= (4). \end{aligned}$$

Auf die ursprüngliche Riemann'sche Fläche rückübertragen sieht dasselbe folgendermassen (Fig. 15) aus. *)

*) Im ersten, zweiten, dritten Blatt verlaufende Linien sind bezw. ausgezogen, gestrichelt, punktiert.

Umgekehrt erhält man aus (6) mit Rücksicht auf die Relationen (5) die folgenden *Ausdrücke der elementaren Perioden durch die kanonischen*:

$$(7) \quad \begin{array}{ll} (1) = A_1, & (2) = B_1 - B_2, \\ (3) = A_2, & (4) = B_2, \\ (5) = -A_1 - A_2, & (6) = -B_1. \end{array}$$

§ 2.

Transformationen der Fläche in sich.

Unsere Riemann'sche Fläche gestattet drei von einander unabhängige cyklische Transformationen in sich.

Die erste derselben, von der Periode 3:

$$(1) \quad z' = z, \quad y' = \varepsilon y$$

ist unmittelbar ersichtlich. Sie kann aufgefasst werden als eine Drehung der Fig. (14) um 120° in positivem Sinne um den Punkt a ; sodass also bei ihr jedes Blatt der Fläche als ganzes in das nächste Blatt übergeführt wird. Dem entsprechend hat man bei ihr die folgende *Umsetzung der kanonischen Querschnitte*: *)

$$(2) \quad \begin{array}{ll} A_1' = (1)' = (3) = A_2, & B_1' = -(6)' = -(2) = -B_1 + B_2, \\ A_2' = (3)' = (5) = -A_1 - A_2, & B_2' = (4)' = (6) = -B_1. \end{array}$$

Ebenfalls sofort ersichtlich ist, dass unsere Fläche *zweitens* auch in sich selbst übergeht, wenn man mit z die *lineare Substitution* vornimmt, die sich durch die Gleichungen ausdrückt:

$$(3) \quad \begin{cases} (cx)(z'a) = (ac)(zx), \\ (cx)(z'b) = (bx)(zc), \\ (ab)(z'c) = (ac)(zb), \\ (ab)(z'x) = (bx)(za), \end{cases}$$

und deren Determinante:

$$(4) \quad \Delta = - \frac{(ac)(bx)}{(ab)(cx)}$$

ist; setzt man nämlich:

$$(5) \quad y' = \sqrt[3]{(z'a)(z'b)^2(z'c)^2(z'x)},$$

sò findet man:

$$(6) \quad y = -\Delta^{-1}y', \quad y' = -\Delta y.$$

*) Wegen der Bedeutung der Accente vgl. die erste Fussnote zu I, § 2.

Dabei wird jedes einzelne Blatt der Fläche in sich transformirt; die neue Figur der Querschnitte wird:

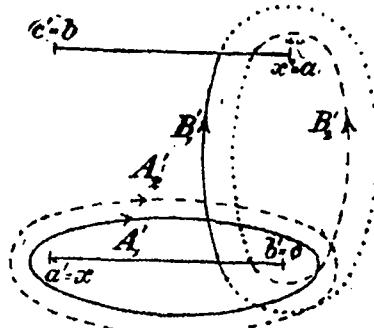


Fig. 16.

also die zugehörige kanonische Periodentransformation:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1' &= -A_1, & B_1' &= -B_1, \\ A_2' &= -A_2, & B_2' &= -B_2. \end{aligned}$$

Weniger in die Augen fallend ist die dritte Transformation der Fläche in sich, welche folgendermassen erhalten wird: Wir nehmen mit z die lineare Substitution vor:

$$(8) \quad \begin{aligned} (cb)(z'a) &= (ac)(zb), \\ (ax)(z'b) &= (xb)(za), \\ (ax)(z'c) &= (ac)(zx), \\ (cb)(z'x) &= (xb)(zc), \end{aligned}$$

deren Determinante:

$$\Delta = -\frac{(ac)(bx)}{(ax)(bc)}$$

ist; führen wir dann wieder die Function:

$$(10) \quad y' = \sqrt[3]{(z'a)(z'b)^2(z'c)^2(z'x)}$$

ein, welche von z' ebenso abhängt wie y von z , so erhalten wir:

$$(11) \quad y' = -\sigma \Delta \cdot \frac{(za)(zb)(zc)(zx)}{y} = -\sigma \Delta \frac{y^3}{(zb)(zc)}$$

und umgekehrt:

$$(12) \quad y = -\frac{\sigma}{\Delta} \frac{(z'a)(z'b)(z'c)(z'x)}{y'} = -\frac{\sigma}{\Delta} \frac{y'^3}{(z'b)(z'c)}$$

Dabei ist σ ein willkürlicher aber bestimmter Werth der 3. Wurzel:

$$(13) \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{(bc)}{(ax)}}.$$

Es wird also in der That bei der Substitution (8) nicht nur die z -Ebene, sondern auch unsere dreiblättrige Fläche umkehrbar eindeutig auf sich selbst bezogen; von den 3 Arten, auf welche das noch möglich ist, ist durch die Verfügung über die dritte Wurzel in (13) eine ausgewählt. Dabei können die Uebergangslinien von Anfang an so gezogen werden,

dass sie bei (4) in sich übergehen; dann wird jedes ganze Blatt der Fläche wieder in ein ganzes Blatt übergeführt. *Aber wenn man etwa festsetzt, dass das erste Blatt der alten Fläche dem ersten der neuen entsprechen soll, wird das zweite der alten dem dritten der neuen, das dritte der alten dem zweiten der neuen entsprechen müssen; wie man sieht, wenn man Umkreisungen entsprechender Verzweigungspunkte verfolgt (vgl. I, § 2). In Folge dessen wird das Querschnittssystem der Fig. 15 in das folgende neue (Fig. 17) übergeführt.*

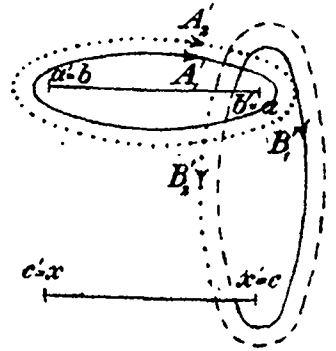


Fig. 17.

Aus dieser Figur entnimmt man mit Rücksicht auf die Relationen (5) des § 1, dass die *zugehörige kanonische Periodentransformation* folgendermassen lautet:

$$(14) \quad \begin{aligned} A_1' &= A_1, & B_1' &= B_1 - B_2, \\ A_2' &= -A_1 - A_2, & B_2' &= -B_2. \end{aligned}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen möge noch eine allgemeinere Bemerkung Platz finden: *es ist in dem jetzt behandelten Falle nicht möglich, das Querschnittssystem so zu wählen, dass es bei den eindeutigen Transformationen der Fläche in sich ebenfalls in sich übergeführt wird.*

§ 3.

Die Integrale I. Gattung und ihre Perioden.

Unter den Integralen erster Gattung auf unserer Fläche mögen wir etwa die beiden folgenden wählen, welche analog wie I, § 3 normirt sind:

$$(1) \quad w_1 = \sqrt[3]{(bc)} \int \frac{(x dz)}{y}$$

$$(2) \quad w_2 = \sqrt[3]{(ax)} \int \frac{(xb)(zc)(x dz)}{y^2}$$

Die Perioden, welche diese Integrale bei *Durchlaufung* der Querschnitte unseres kanonischen Systems annehmen, seien bezeichnet mit:

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
w_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Wir untersuchen wieder das Verhalten dieser Functionen gegenüber den linearen Transformationen des vorigen Paragraphen. Bei der Substitution (1) desselben haben wir:

$$(4) \quad w_1 = \varepsilon w_1', \quad w_2 = \varepsilon^2 w_2';$$

also folgt mit Rücksicht auf § 2 (2):

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \varepsilon \omega_{12}, & \omega_{21} &= \varepsilon^2 \omega_{22}, \\ \omega_{12} &= -\varepsilon \omega_{11} - \varepsilon \omega_{12}, & \omega_{22} &= -\varepsilon^2 \omega_{21} - \varepsilon^2 \omega_{22}, \\ \omega_{13} &= -\varepsilon \omega_{13} + \varepsilon \omega_{14}, & \omega_{23} &= -\varepsilon^2 \omega_{23} + \varepsilon^2 \omega_{24}, \\ \omega_{14} &= -\varepsilon \omega_{13}, & \omega_{24} &= -\varepsilon^2 \omega_{23}. \end{aligned}$$

Die erste Transformation liefert also die folgenden Relationen je zwischen den Perioden eines und desselben Integrals:

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_{12} &= \varepsilon^2 \omega_{11}, & \omega_{14} &= -\varepsilon \omega_{13}; \\ \omega_{22} &= \varepsilon \omega_{11}, & \omega_{24} &= -\varepsilon^2 \omega_{23}. \end{aligned}$$

Die zweite Transformation des § 2 liefert:

$$(6) \quad w_1 = -w_1', \quad w_2 = -w_2',$$

also keine Relationen zwischen den Perioden.

Bei der dritten Transformation endlich ist:

$$(7) \quad w_1 = w_2', \quad w_2 = w_1';$$

also wegen § 2 (14):

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \omega_{21}, & \omega_{21} &= \omega_{11}, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} - \omega_{22}, & \omega_{22} &= -\omega_{11} - \omega_{12}, \\ \omega_{13} &= \omega_{23} - \omega_{24}, & \omega_{23} &= \omega_{13} - \omega_{14}, \\ \omega_{14} &= -\omega_{24}, & \omega_{24} &= -\omega_{14}. \end{aligned}$$

Diese Transformation liefert also folgende Ausdrücke der Perioden des zweiten Integrals durch die des ersten:

$$(8) \quad \omega_{21} = \omega_{11}, \quad \omega_{23} = \varepsilon^2 \omega_{13}.$$

Setzen wir also:

$$(9) \quad \omega_{11} = -\eta_2, \quad \omega_{13} = +\eta_1,$$

so wird die Tabelle der Perioden:

$$(10) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ \hline w_1 & -\eta_2 & -\varepsilon^2 \eta_2 & \eta_1 & -\varepsilon \eta_1 \\ w_2 & -\eta_2 & -\varepsilon \eta_2 & -\varepsilon^2 \eta_1 & \varepsilon \eta_1 \end{array}$$

Auch in diesem Fall ist die Bilinearrelation zwischen den Perioden durch die angegebenen Werthe derselben von selbst erfüllt.

§ 4.

Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde.

Die Reduction auf die Normalform hyperelliptischer Gebilde ist in diesem Falle etwas umständlicher als im ersten. Setzen wir wieder

$$dw_1 : dw_2 = \lambda_1 : \lambda_2,$$

also etwa:

$$(1) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= y, \\ \lambda_2 &= (zb)(zc), \end{aligned}$$

so erhalten wir zunächst:

$$(2) \quad -\frac{(\lambda d\lambda)}{\lambda_1 \lambda_2} = d \log \lambda_1 - d \log \lambda_2 = \frac{1}{3} \frac{q(zdz)}{(za)(zb)(zc)(zx)}.$$

Die rechts im Zähler stehende Form:

$$(3) \quad q = -(ab)(zc)(zx) + (cx)(za)(zb)$$

ist nicht selbst rational durch λ_1, λ_2 ausdrückbar, wohl aber ihr Quadrat; mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\begin{aligned} (ab)^2 (zc)^2 &= (bc)^2 (za)^2 - (ac)^2 (zb)^2 + 2(ab)(ac)(zb)(zc), \\ (cx)^2 (za)^2 &= (ax)^2 (zc)^2 + (ac)^2 (zx)^2 - 2(ac)(ax)(zc)(zx), \end{aligned}$$

sowie:

$$(ab)(zx) - (ax)(zb) = (xb)(za)$$

folgt nämlich:

$$(4) \quad \begin{aligned} q^2 &= (bc)^2 (za)^2 (zx)^2 + (ax)^2 (zb)^2 (zc)^2 \\ &\quad + 2[(ab)(xc) + (ac)(xb)](za)(zb)(zc)(zx). \end{aligned}$$

Definirt man also die Form 6. Grades Λ durch:

$$(5) \quad \Lambda = (bc)^2 \lambda_1^6 + 2(ab)(xc) + (ac)(xb)] \lambda_1^3 \lambda_2^3 + (ax)^2 \lambda_2^6,$$

so erhält man:

$$(6) \quad q = \frac{\sqrt{\Lambda}}{\lambda_2^2}, \quad \sqrt{\Lambda} = (zb)^2 (zc)^2 q$$

und damit aus (2):

$$(7) \quad \frac{(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}} = -\frac{1}{3} \frac{(zdz)}{y^2}.$$

Durch (1) und (6) sind $\lambda_1, \lambda_2, \sqrt{\Lambda}$ rational durch z_1, z_2, y ausgedrückt. Um die Umkehrung dieser Formeln zu erzielen, leiten wir aus ihnen andere ab, welche sowohl in z_1, z_2 , als in λ_1, λ_2 homogen sind, zunächst:

$$(8) \quad (zb)(zc) \lambda_1^3 = (za)(zx) \lambda_2^3;$$

$$(9) \quad (zb)(zc) \sqrt{\Lambda} = \lambda_2^3 [-(ab)(zc)(zx) + (cx)(za)(zb)].$$

Aus diesen können wir auf verschiedene Weisen weitere Relationen erhalten, von welchen sich ein in den z linearer Factor abspalten lässt, z. B. durch Multiplication von (8) mit (bc) und Subtraction von (9) die folgende:

$$(zb)(zc) [(bc) \lambda_1^3 - \sqrt{\Lambda}] = \lambda_2^3 \cdot (zb) [2(ac)(zx) - (ax)(zc)]$$

oder nach Division mit (zb) :

$$(10) \quad \frac{(zx)}{(zc)} = \frac{(bc) \lambda_1^3 + (ax) \lambda_2^3 - \sqrt{\Lambda}}{2(ac) \lambda_2^3}.$$

Ganz ebenso wird erhalten:

$$(11) \quad \frac{(za)}{(zb)} = \frac{(bc) \lambda_1^3 + (ax) \lambda_2^3 + \sqrt{\Lambda}}{2(bx) \lambda_2^3}.$$

und endlich erhält man aus (1) direct:

$$(12) \quad \frac{y}{(zb)(zc)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Durch (11) und (12) sind auch umgekehrt die Functionen der alten Fläche rational durch die der neuen ausgedrückt).*

Wir fügen noch die Formeln für die Transformation der Integrale bei, welche sich unmittelbar aus (7) ergeben:

$$(13) \quad \begin{aligned} w_1 &= -3 \sqrt[3]{bc} \int \frac{\lambda_1(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}, \\ w_2 &= -3 \sqrt[3]{ax} \int \frac{\lambda_2(\lambda d\lambda)}{\sqrt{\Lambda}}, \end{aligned}$$

sowie die Formeln für die in § 2 untersuchten *Transformationen der Fläche in sich*, ausgedrückt in $\lambda_1, \lambda_2, \sqrt{\Lambda}$; nämlich:

für die *erste*:

$$(14) \quad \lambda_1' = \varepsilon \lambda_1, \quad \lambda_2' = \lambda_2, \quad \sqrt{\Lambda'} = \sqrt{\Lambda};$$

für die *zweite*:

$$(15) \quad \lambda_1' = -\Delta \lambda_1, \quad \lambda_2' = -\Delta \lambda_2, \quad \sqrt{\Lambda'} = -\Delta^3 \sqrt{\Lambda};$$

für die *dritte*, unter σ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$(16) \quad \begin{aligned} \lambda_1' &= \sigma \sqrt[3]{(ax)^2} \lambda_2, & \lambda_2' &= \sigma \sqrt[3]{(bc)^2} \lambda_1, \\ & & \sqrt{\Lambda'} &= \sigma^3 (ax) (bc) \sqrt{\Lambda}. \end{aligned}$$

*) Wegen der *Formen* vgl. man die erste Fussnote zu I, § 4.

Endlich müssen wir noch das auf unserer ursprünglichen Fläche gezeichnete *Querschnittssystem* auf die neue Fläche übertragen. Wir schreiben (vgl. I, § 4) unsere Formeln unhomogen wie folgt:

$$(1a) \quad \lambda = -\frac{y}{z-1} = -\frac{z(z-1)(z-x)}{y^2} = -\sqrt[3]{\frac{z(z-x)}{z-1}};$$

$$(5a) \quad \Lambda = \lambda^6 + 2(2-x)\lambda^3 + x^2;$$

$$(6a) \quad \sqrt{\Lambda} = \frac{(z-1)(z-x) - (1-x)z}{-(z-1)} = -\frac{z^2 - 2z + x}{z-1};$$

$$(10a) \quad \frac{z-x}{z-1} = \frac{\lambda^3 - x - \sqrt{\Lambda}}{-2},$$

$$(11a) \quad z = \frac{\lambda^3 - x + \sqrt{\Lambda}}{-2}.$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir zunächst, dass den Verzweigungspunkten der ersten Fläche die folgenden Punkte der zweiten entsprechen:

$$(17) \quad \begin{array}{lll} z = 0, & \lambda = 0, & \sqrt{\Lambda} = x, \\ \infty, & \infty, & \infty \text{ wie } -\lambda^3, \\ 1, & \infty, & \infty \text{ wie } +\lambda^3, \\ x, & 0, & -x. \end{array}$$

Die Verzweigungspunkte der neuen Fläche liegen bei:

$$(18) \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= -\left(1 + \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_1 &= -\left(1 - \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon \left(1 + \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_3 &= -\varepsilon \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_4 &= -\varepsilon^2 \left(1 + \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \lambda_5 &= -\varepsilon^2 \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Ihnen entsprechen auf der alten Fläche:

$$(19) \quad z = 1 + \sqrt{1-x} \quad \text{und} \quad z = 1 - \sqrt{1-x}.$$

Damit können wir nun die Querschnitte von Figur 15 her übertragen. Wir nehmen wieder:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1, \quad \text{dagegen } x \text{ diesmal reell } > 1,$$

sodass wir zunächst folgende Figur erhalten:

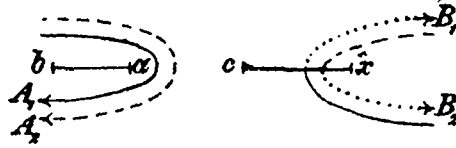


Fig. 18.

Ihr entspricht in der neuen Fläche

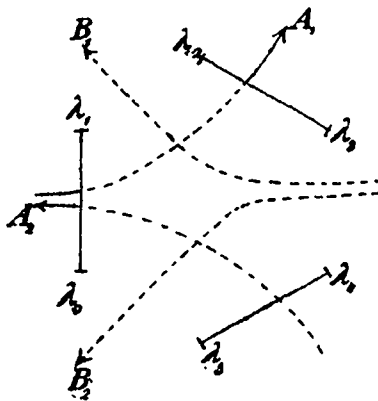


Fig. 19.

oder wenn wir die Querschnitte in geeigneter Weise zusammenziehen:

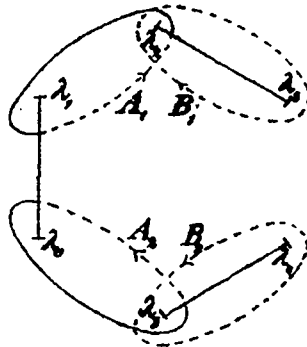


Fig. 20.

Aus dieser Figur entnehmen wir insbesondere, dass der Charakteristik:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

die folgende Zerlegung von Λ in zwei cubische Factoren entspricht:

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda^3 + (1 + \sqrt{1-x})^2, \\ \psi &= \lambda^3 + (1 - \sqrt{1-x})^2; \end{aligned}$$

oder homogen geschrieben:

$$\varphi = (bc) \lambda_1^3 + \frac{1}{(bc)} [\sqrt{(ab)(xc)} + \sqrt{(ac)(xb)}]^2 \lambda_2^3,$$

$$\psi = (bc) \lambda_1^3 + \frac{1}{(bc)} [\sqrt{(ab)(xc)} - \sqrt{(ac)(xb)}]^2 \lambda_2^3.$$

§ 5.

Thetanullwerthe und automorphe Primformen.

Wir knüpfen wieder an (vgl. I, § 5) an die Formel:

$$(1) \quad \vartheta = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{p_{12}} \sqrt{\Delta\varphi \Delta\psi},$$

indem wir die aus unseren Entwicklungen folgenden Werthe der vorkommenden Grössen in dieselbe einsetzen. Wir setzen zunächst die Tabelle § 3 (10) um in die folgende, die sich auf *Ueberschreitung* von Querschnitten bezieht:

$$(2) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ \hline w_1 & \eta_1 & -\varepsilon\eta_1 & \eta_2 & \varepsilon^2\eta_2 \\ w_2 & -\varepsilon^2\eta_1 & \varepsilon\eta_1 & \eta^2 & \varepsilon\eta_2 \end{array}$$

und entnehmen ihr die nachstehenden Werthe der Periodendeterminanten:

$$(3) \quad \begin{aligned} p_{12} &= (\varepsilon - 1) \eta_1^2, & p_{13} &= -\varepsilon \eta_1 \eta_2, & p_{14} &= 2 \varepsilon \eta_1 \eta_2, \\ p_{34} &= (\varepsilon - \varepsilon^2) \eta_2^2, & p_{42} &= -\varepsilon \eta_1 \eta_2, & p_{23} &= -2 \varepsilon \eta_1 \eta_2 \end{aligned}$$

und der Thetamoduln:

$$(4) \quad \begin{aligned} \tau_{11} &= \tau_{22} = \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \eta, \\ \tau_{12} &= -\frac{1}{3} (1 - \varepsilon) \eta. \end{aligned}$$

In (1) ist jedoch wegen § 4, Gleichg. (13) für p_{12} das Product aus dem unter (3) angegebenen Werthe in:

$$(5) \quad \frac{1}{9} (ax)^{-\frac{1}{3}} (bc)^{-\frac{1}{3}}$$

zu setzen. Schreibt man noch:

$$p \text{ für } e^{\frac{2\pi i}{3}(1-\varepsilon)\eta},$$

so erhält man schliesslich:

$$(6) \quad (ax)^{\frac{1}{3}} (bc)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{-3} \pi i \eta_1^{-1} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} p^{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}.$$

Auch in diesem Falle ist also die eine hier existirende Primform ausgedrückt durch eine Reihe, welche für alle in Betracht kommenden Werthe von η convergirt.

Göttingen, August 1892.

[In den beiden untersuchten Fällen haben sich für die Primformen Reihen der Form $\sum \sum p^{am_1^2 + bm_1 m_2 + cm_2^2}$ ergeben. Hrn. H. Weber verdanke ich die Bemerkung, dass bereits Dirichlet auf solche Reihen aufmerksam geworden ist, vgl. Bd. I seiner ges. Werke p. 467 ff. Neuerdings spielen sie eine grosse Rolle in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen; vgl. z. B. p. 318 des inzwischen erschienenen II. Bandes des Werkes von Klein und Fricke über dieselben. In der That gehen die betrachteten Integrale durch Transformationen höherer Ordnung in elliptische Integrale über. Dec. 1892].
