18.

Einige geometrische Betrachtungen.

(Von Herrn *Steiner*.)

Die in den nachstehenden Paragraphen angefangenen Betrachtungen enthalten die Grundlage der geometrischen Untersuchung über das Schneiden der Kreise. Es lassen sich daraus die Auflösungen fast aller Aufgaben über das Schneiden und Berühren der Kreise entwickeln, und zwar in den meisten Fällen sehr einfach, auch wird durch sie oft zwischen mehreren Aufgaben, welche auf den ersten Anblick keine Gemeinschaft zu haben scheinen, ein gewisser Zusammenhang sichtbar. Zwei andere, eben so erfolgreiche Gegenstände, besonders in Bezug auf die Curven und Flächen zweiten Grades, und in Bezug auf die sogenannten Porismen, und die meisten Sätze, welche man gewöhnlich durch die Theorie der Transversalen zu beweisen pflegt, sind die harmonische Proportion und die perspectivische Projection.

Vor etwa drei Jahren sah sich der Verfasser dieser Abhandlung, zufälliger Weise, zur Beschäftigung mit der Aufgabe: 1) einen Kreis zu beschreiben, welcher drei andere, gegebene Kreise berührt; 2) mit der Malfattischen Aufgabe (14); so wie 3) mit dem XV. Theorem im IV. Buch der *Collect. mathem.* von Pappus; und 4) mit verschiedenen Porismen und der rein geometrischen Betrachtung der Curven und Flächen zweiten Grades, angeregt. Den Pappischen Satz kannte er nur ohne Beweis; eben so die Malfattische Aufgabe; von der ersten (1) jedoch die Vieta'sche geometrische Lösung.

Der Verfasser pflegt in der Regel nicht eher über eine Aufgabe oder über einen Gegenstand weiter nachzulesen, bevor er nicht selbst eine Auflösung oder Sätze darüber gefunden hat, um alsdann seine Resultate mit den schon vorhandenen zu vergleichen.

Dieses fand auch bei den eben genannten Gegenständen Statt; das Bestreben des Verfassers war, z. B. bei den Auflösungen der verschiedenen Aufgaben über Berührung der Kreise, den ihnen zum Grunde liegenden gemeinschaftlichen Zusammenhang zu finden.

Den Satz (2), „dafs der Ort der gleichen Tangenten zweier gegebenen Kreise eine grade Linie sei," hatte der Verfasser schon bei einer frühern geometrischen Untersuchung gefunden. Die Bedeutung der Aehnlichkeitspuncte (7) und der gemeinschaftlichen Potenz (11) zweier Kreise, wovon schon bei Pappus und Vieta sich Spuren finden, lernte er durch ihre, von ihm gefundene vielseitige Anwendbarkeit erkennen. Mittelst der Anwendung dieser drei Sätze offenbarte sich ihm nun der gesuchte Zusammenhang der verschiedenen Aufgaben über Berührung der Kreise, welche er sich vorgelegt hatte, nebst einer Menge damit in Verbindung stehender Sätze.

Als nun der Verfasser seinen Gegenstand einigermaſsen erschöpft zu haben glaubte, sah er sich auch nach Demjenigen um, was Andere gethan. Er sah, daſs die Franzosen nicht nur einen groſsen Theil der von ihm gelöseten Sätze und Aufgaben schon besitzen, sondern auch bei den Beweisen und Auflösungen sich fast allenthalben derselben Mittel bedient haben, wie er. In Hinsicht der Anwendung der harmonishen Proportion und der perspectivischen Projection auf eine groſse Menge geometrischer Gegenstände (besonders auf die Curven und Flächen zweiten Grades, die Porismen u. s. w.) fand er besonders bei Poncelet (*Traité des proprietés projectives des figures* *), sowohl viele seiner Sätze, als auch denselben Gang der Betrachtung.

Für die Versicherung, daſs der Verfasser Dasjenige, was die Franzosen in dieser Hinsicht gethan, vorher nicht gekannt habe, hofft er, werden nicht allein diejenigen seiner Bekannten, welche, bei täglichem Umgange mit ihm, die Entstehung und Entwickelung seiner Arbeiten beobachteten, sondern dem Sachkenner wird auch schon die umfassendere, allgemeinere Entwicklungsweise in den Untersuchungen, aus welcher nicht nur alle jene Betrachtungen, sondern auch eine groſse Menge neuer Resultate von selbst hervorgehen, ein Zeugniſs ablegen. So hat er z. B. die Untersuchungen über Kreise und Kugeln auf die Weise verallgemeinert, daſs die Winkel, unter welchen dieselben sich schneiden, betrachtet werden, so daſs die Berührung nur als ein spezieller Fall des Schneidens anzusehen ist, nemlich der, wo der Schneidungswinkel $= 0$ oder $= 180^\circ$ ist. Und zwar löset er durch Hülfe der in den nachstehenden Paragraphen (I. II. III.) entwickelten Lehrsätze nicht allein alle die verschiedenen (Apollonischen) Aufgaben über Berührung der Kreise und der graden Linien etc., sondern noch weit mehr Aufgaben über das Schneiden der Kreise; wie z. B. folgende:

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei der Gröſse und Lage nach gegebene Kreise K_1, K_2, K_3 respective unter den gegebenen Winkeln α_1, α_2, α_3 schneidet."

*) Man sehe S. 96. des I. Hefts dieses Journals.

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher vier, der Gröfse und Lage nach gegebene Kreise unter einerlei Winkel schneidet." U. s. w.

Und zwar werden alle diese Aufgaben ebensowohl bei Kreisen, die in einerlei Ebene, als bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, gelöset. Ferner werden analoge Aufgaben bei Kugeln im Raume gelöset, als z. B.:

„Eine Kugel zu beschreiben, welche vier, der Gröfse und Lage nach gegebene Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 respective unter den gegebenen Winkeln α_1, α_2, α_3, α_4 schneidet."

„Eine Kugel zu beschreiben, welche fünf der Gröfse und Lage nach gegebene Kugeln unter einerlei Winkel schneidet." U. s. w.

Nach dem frühern Plane des Verfassers sollten seine geometrischen Untersuchungen ein zusammenhängendes Werk ausmachen; allein bei der Ausarbeitung fand sich, dafs es zu ausgedehnt werden würde; andererseits war es ihm bis jetzt noch nicht möglich, seinen Untersuchungen ein bestimmtes Ziel zu setzen, weil sich dieselben noch täglich erweitern und auf neue Gegenstände anwenden lassen, so dafs bestimmte Schranken der freien Entwickelung des Gegenstandes nur nachtheilig sein würden. Der Verfasser wird daher erst einen Theil davon, welcher

> „Das Schneiden (mit Einschlufs der Berührung) der Kreise in der Ebene, das Scheiden der Kugeln im Raume, und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche"

enthalten soll, welche Untersuchungen schon vor zwei Jahren beendet waren, und deren Ausarbeitung zum Drucke gegenwärtig beinahe vollendet ist, in einem Bande von etwa 25 bis 30 Bogen, herausgeben, und wenn dieser erste Theil einige Theilnahme findet, die übrigen Untersuchungen nachfolgen lassen.

---

§. I. Von der Potenz bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

1.

Wenn die geraden Linien Mm und PG (Fig. 8.) aufeinander senkrecht stehen: so ist für jeden beliebigen Punct P des Perpendikels PG, wenn man die Puncte m, M als gegeben betrachtet:

$$MP^2 - mP^2 = MG^2 - mG^2,$$

das heifst:

„Der Unterschied der Quadrate der Abstände aller Puncte P der Senkrechten PG von zwei gegebenen Puncten M, m ist eine unveränderliche Gröfse, nemlich gleich dem Unterschiede der Quadrate der Abstände MG, mG der Senkrechten PG von den gegebenen Puncten M, m." Hieraus folgt:

„Dafs der geometrische **Ort** eines Puncts P, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Puncten M, m gleich ist einer gegebenen Gröfse u^2, eine gerade Linie PG ist, welche auf derjenigen (Mm), die die gegebenen Puncte verbindet, senkrecht steht."

Bezeichnet man den Abstand der gegebenen Puncte Mm von einander durch a: so ist

$$MG + mG = a \text{ und } MG^2 - mG^2 = u^2.$$

Daraus folgt:

$$MG = \frac{a^2 + u^2}{2a} \text{ und } mG = \frac{a^2 - u^2}{2a}.$$

2.

In den Lehrbüchern der Geometrie findet man folgenden Satz bewiesen:

„Werden aus einem, in der Ebene eines Kreises M, (Fig. 9.) willkürlich angenommenen Puncte P, gerade Linien PAB, PCD .... gezogen, die den Kreis schneiden: so ist das Product (Rechteck) aus den Abständen des Puncts von den Durchschnittspuncten der schneidenden Linien eine beständige Gröfse; d. h. es ist

$$PA \times PB = PC \times PD = \ldots\ldots\ldots"$$

Dieses Product, für einen bestimmten Punct, in Bezug auf einen gegebenen Kreis, soll

„**Potenz des Puncts in Bezug auf den Kreis,**"

oder auch umgekehrt:

„**Potenz des Kreises in Bezug auf den Punct** *)" heifsen.

Ferner wollen wir sagen: Die Potenz eines Puncts, in Bezug auf einen Kreis, sei **äufserlich** oder **innerlich**, je nachdem der Punct aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Liegt der Punct P aufserhalb des Kreises M, (Fig. 9.): so ist seine Potenz gleich dem Quadrat der, aus ihm an den Kreis gelegten, Tangente PT. Die Potenz eines innerhalb des Kreises M liegenden Puncts Q (Fig. 10.) ist gleich dem Quadrat der halben kleinsten Sehne QC, durch den gegebenen Punct. Bezeichnet man den Halbmesser MT, MC des Kreises M (Fig. 9, 10.) durch

*) Die Alten nannten den constanten Inhalt des zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten beschriebenen Parallelogramms, „**Potenz der Hyperbel.**"

R, so ist, vermöge der rechtwinkligen Dreiecke MTP, MQC, die Potenz des aufserhalb des Kreises liegenden Puncts P,

$$PT^2 = PM^2 - R^2,$$

und die Potenz des innerhalb des Kreises liegenden Puncts Q,

$$QC^2 = R^2 - MQ^2.$$

Hieraus folgt, dafs Puncte, welche gleich weit vom Mittelpunct eines Kreises entfernt sind, in Bezug auf ihn gleiche Potenzen haben. Fällt ein Punct in die Peripherie eines Kreises, so ist seine Potenz $= 0$; und umgekehrt, jeder Punct, dessen Potenz in Bezug auf einen gegebenen Kreis $= 0$ ist, liegt in der Peripherie des Kreises.

3.

Wenn M, m (Fig. 8.) die Mittelpuncte zweier Kreise M, m sind, deren Radien durch R, r bezeichnet werden mögen, und P ist ein Punct, welcher zu beiden Kreisen gleiche und gleichartige, d. h. in Bezug auf beide Kreise zugleich, äufserliche oder zugleich innerliche Potenzen hat, so ist entweder (2):

$$\text{a)}\quad MP^2 - R^2 = mP^2 - r^2$$

oder

$$\text{b)}\quad R^2 - MP^2 = r^2 - mP^2.$$

Aus Beidem folgt:

$$MP^2 - mP^2 = R^2 - r^2,$$

d. h.: „Der Unterschied der Quadrate der Abstände des Puncts P von M u. m. ist unter der vorausgesetzten Bedingung eine unveränderliche Gröfse $(R^2 - r^2)$, nemlich gleich dem Unterschied der Quadrate der Radien der gegebenen Kreise M, m."

Hieraus folgt nach (1.):

„Dafs der Ort eines Puncts P, welcher zu zwei gegebenen Kreisen M, m gleichartige und gleiche Potenz hat, eine gerade Linie PG ist, welche auf der Axe Mm der Kreise senkrecht steht."

Wegen dieser Eigenschaft der geraden Linie PG soll dieselbe fortan:

„**Linie der gleichen Potenzen der Kreise** M, m" heifsen.

Aus dem Obigen folgt noch als Zusätze:

„Dafs Erstlich die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, und

„Zweitens die Linie, welche zwei Kreise in einem und demselben Punct berührt, zugleich die Linie ihrer gleichen Potenzen ist."

Da nach (2.) die Potenz eines aufserhalb des Kreises liegenden Puncts gleich ist dem Quadrat der Tangente, aus dem Puncte an den Kreis, so folgt ferner:

„Dafs der geometrische Ort eines Puncts P, aus welchem die Tangenten an zwei gegebene Kreise M, m einander gleich sind, eine auf der Axe Mm der Kreise senkrecht stehende gerade Linie PG ist."

Beschreibt man mit einer der vier Tangenten, aus dem Punct P an die beiden gegebenen Kreise einen Kreis P, so schneidet derselbe die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig, und es folgt ferner:

„Dafs der geometrische Ort des Mittelpuncts P eines Kreises P, welcher zwei gegebene Kreise M, m rechtwinklig schneidet, eine gerade Linie PG ist, welche auf der Axe Mm der gegebenen Kreise senkrecht steht."

4.

Es seien M_1, M_2, M_3 (Fig. 11.) die Mittelpuncte dreier, der Gröfse und Lage nach gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3. Zu je zwei der gegebenen Kreise gehört nach (3.) eine Linie der gleichen Potenzen. Wir wollen diese drei Linien, mittelst der den Kreisen zukommenden Zahlen, und zwar durch $l(12)$, $l(13)$, $l(23)$ bezeichnen, d. h. $l(12)$ bezeichnet die Linie der gleichen Potenzen der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2, u. s. w.

Derjenige Punct, in welchem sich z. B. die beiden Linien $l(12)$, $l(13)$ schneiden, und welchen wir durch $p(123)$ bezeichnen wollen, hat, vermöge der ersten Linie $l(12)$, zu den beiden Kreisen M_1, M_2, und vermöge der andern Linie $l(13)$, zu den beiden Kreisen M_1, M_3 gleiche Potenzen; mithin hat er zu allen drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3 gleiche Potenzen, und folglich geht auch die dritte Linie $l(23)$ durch den genannten Punct $p(123)$. Daraus folgt nachstehender Satz:

„Die drei Linien der gleichen Potenzen, welche zu drei gegebenen Kreisen, paarweise genommen, gehören, schneiden einander in einem und demselben Punct $p(123)$." Wir wollen diesen Punct $p(123)$ hinfort

„Punct der gleichen Potenzen der drei Kreise M_1, M_2, M_3" nennen.

Liegt der Punct $p(123)$ aufserhalb der drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3, so folgt aus (3.), dafs die aus ihm an die Kreise gelegten Tangenten einander gleich sind, und dafs er in diesem Fall der Mittelpunct eines Kreises ist, welcher die drei gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet.

Da nach (3.) die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise zugleich die Linie der gleichen Potenzen derselben ist, so folgt ferner:

„Dafs wenn drei beliebige Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 12.) einander schneiden, dafs dann die drei Sehnen AB, CD, EF, welche dieselben paarweise mit einander gemein haben, sich in einem und demselben Puncte $p(123)$, nemlich im Puncte der gleichen Potenzen der drei Kreise schneiden." Und:

„dafs wenn drei beliebige Kreise einander berühren, dafs alsdann die, in den drei Berührungspuncten an die Kreise gelegten Tangenten, in einem und demselben Punct zusammentreffen."

Hieraus folgen ferner nachstehende Sätze:

„Werden zwei, der Gröfse und Lage nach gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 13.) von irgend einem willkürlichen Kreise M_3 geschnitten, so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts P der beiden Sehnen EF, CD, welche der letztere Kreis mit jenen beiden gemein hat, eine gerade Linie, welche auf der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise senkrecht steht."

Nemlich der Ort des genannten Durchschnittspuncts P ist die Linie der gleichen Potenzen $l(12)$ der beiden gegebenen Kreise. Man sieht leicht, wie sich hieraus die Linie der gleichen Potenzen $l(12)$ zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 finden läfst. Ferner:

„Werden zwei der Lage und Gröfse nach gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 14.) von irgend einem willkürlichen Kreise M_3 berührt, und man legt in den beiden Berührungspuncten A, B Tangenten AP, BP an die Kreise: so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts P der beiden Tangenten, eine auf der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise senkrecht stehende grade Linie PG, nemlich die Linie der gleichen Potenzen $l(1\overset{2}{4})$ der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2."

Durch Umkehrung dieses letzten Satzes folgen nachstehende Sätze:

„Legt man aus einem, in der Linie der gleichen Potenzen (PG.) zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 (Fig. 14.) willkürlich angenommenen Puncte P, an jeden Kreis eine Tangente: so berühren diese Tangenten die Kreise in zwei Puncten, in welchen sie auch von einem bestimmten Kreise berührt werden können." Legt man also aus dem Puncte P die vier Tangenten PA, PB, PC, PD, welche die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 in den Puncten A, B, C, D berühren: so können die Kreise M_1, M_2 von einem bestimmten Kreise (M_3) in den Puncten A, B, von einem andern Kreise in den Puncten C, D, von einem dritten Kreise in den Puncten A, C, und endlich von einem vierten Kreise in den Puncten B, D berührt werden. Oder was dasselbe ist:

„Jeder Kreis P (z. B. $ABCD$), welcher zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklich schneidet, schneidet sie in vier solchen Puncten A, B, C, D in welchen dieselben von vier bestimmten Kreisen berührt werden können; d.h. jeder der vier Kreise berührt die gegebenen in zwei der genannten vier Durchschnittspuncte."

5.

Stellt man sich alle möglichen Kreise, P_1, P_2, P_3 .... vor, von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 15.) rechtwinklich schneidet: so folgt nach (3), dafs jede zwei derselben die Axe M_1, M_2 der letztern zur Linie der gleichen Potenzen haben, und folglich haben alle Kreise P_1, P_2, P_3 .... zusammen die Axe M_1 M_2 zur Linie der gleichen Potenzen. Das heifst (3): der geometrische Ort des Mittelpunctes eines Kreises (M_1, M_2, M_3 ....), welcher alle Kreise P_1, P_2, P_3 .... rechtwinklig schneidet, ist die Axe M_1 M_2 der gegebenen Kreise M_1, M_2.

Die beiden Gruppen von Kreisen P_1, P_2, P_3 ..... und M_1, M_2, M_3 ..... stehen demnach in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dafs jeder Kreis der einen Schaar, jeden Kreis der andern Schaar rechtwinklig schneidet, und dafs also die Kreise der einen Schaar die Axe der andern zur Linie der gleichen Potenzen haben.

Da die Kreise P_1, P_2, P_3 ..... die Axe M_1, M_2, M_3 ..... zur Linie der gleichen Potenzen haben, so folgt, dafs wenn irgend zwei derselben einander schneiden, dafs dann alle zusammen einander in denselben zwei Puncten A, B schneiden, und dafs ihre gemeinschaftliche Sehne AB die genannte Axe M_1, M_2, M_3 .... ist. Wenn aber die Kreise der einen Schaar P_1, P_2, P_3 ..... einander schneiden, so kann von den Kreisen der andern Schaar M_1 M_2 M_3 ...... keiner den andern schneiden. Also:

„Alle Kreise P_1, P_2, P_3 ......, von denen jeder, zwei gegebene aufser oder ineinander liegende Kreise M_1, M_2 oder M_1, M_3 rechtwinklig schneidet: schneiden sich in zwei bestimmten Puncten A, B." Und:

„Von allen Kreisen M_1, M_2 M_3 .... welche zwei gegebene, sich schneidende Kreise P_1, P_2 rechtwinklig schneiden: kann keiner den andern schneiden."

Da sich nach (4) die Sehnen, welche der Kreis M_1 mit irgend zwei Kreisen der Schaar P_1, P_2, P_3 ..... gemein hat, mit der Axe M_1 M_2 (als Linie der gleichen Potenzen der letztern Kreise P_1, P_2....) in einem Punct schneiden: so folgt, dafs sich alle Sehnen, DC, EF ......, welche der Kreis M_1 mit den Kreisen P_1, P_2, P_3 ...... einzeln gemein hat, in einem bestimmten Punct M der Axe M_1 M_2 schneiden. Aus gleichen Gründen folgt, dafs sich alle Sehnen DC, HI, ..., welche der Kreis P_1 mit den Kreisen M_1, M_2, M_3 ...., einzeln genommen, gemein hat, in einem bestimmten Punct P der Axe P_1 P_2 schneiden. Bemerkt man noch, dafs, da die Kreise P_1, P_2, P_3 ...... den Kreis M_1 rechtwinklig schneiden, die nach den Durchschnittspuncten gezogenen Radien

P_1C,

$P_1 C$, $P_1 D$, $P_1 E$, ... den Kreis M_1 berühren; und dafs eben so die Radien $M_1 C$, $M_1 D$; MH, ... den Kreis P_1 berühren: so folgen aus dem Obigen nachstehende bekannte Sätze:

„Legt man aus beliebigen Puncten M_1, M_2 .... (Fig. 16.) einer gegebenen graden Linie $M_1 M_2$, welche einen gegebenen Kreis P_1 schneidet, Tangenten an diesen Kreis: so gehen die Sehnen CD, EF ....., welche die Berührungspuncte der zusammen gehörigen Tangenten verbinden, durch einen und denselben aufserhalb des Kreises liegenden Punct P." Und:

„Legt man aus beliebigen Puncten P_1, P_2 .... (Fig. 17.) einer geraden Linie $P_1 P_2$, aus jedem zwei Tangenten an einen gegebenen Kreis M_1, welcher die genannte Linie nicht schneidet: so gehen die Sehnen CD, EF ...., welche die Berührungspuncte der zusammen gehörigen Tangenten verbinden, durch einen bestimmten, innerhalb des Kreises liegenden Punct M."

Und umgekehrt:

„Zieht man aus einem in der Ebene eines gegebenen Kreises (P_1 Fig. 16. oder M_1 Fig. 17.) beliebig angenommenen Punct P oder M eine willkürliche gerade Linie (PDC oder CMD), die den Kreis schneidet, und legt in den Durchschnittspuncten (C, D) Tangenten an den Kreis: so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts (M_1 oder P_1) dieser beiden Tangenten, eine gerade Linie ($M_1 M_2$ .... oder $P_1 P_2$ ....), welche auf dem, durch den angenommenen Punct (P oder M) gehenden Durchmesser (PP_1 oder MM_1) senkrecht steht."

Die gegenseitige Lage und Bestimmung des angenommenen Puncts P oder M und der Ortslinie $M_1 M_2$ oder $P_1 P_2$, in Bezug auf den gegebenen Kreis (P_1 oder M_1) ist leicht zu sehen. Nemlich die aus den gegebenen Punct P, (Fig. 16.), an den gegebenen Kreis P_1 gelegten Tangenten PA, PB berühren den Kreis nothwendig in denjenigen Puncten A, B, in welchen er von der Ortslinie $M_1 M_2$ geschnitten wird, u. s. w.

Bekanntlich finden diese Sätze auf ähnliche Weise bei jeder Curve zweiten Grades Statt. Auch finden analoge Sätze bei allen Flächen zweiten Grades Statt.

§. II. Von den Aehnlichkeitspuncten und Aehnlichkeitslinien bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

6.

Sind irgend drei Puncte M, m, A, (Fig. 18.), die in einer geraden Linie liegen, gegeben, und man zieht durch den Punct A eine willkürliche gerade

Linie AnN, und aus den Puncten M, m zwei beliebige Parallelen MN, mn nach jener Linie AnN, so ist:

$$MN : mn = MA : mA.$$

„Zieht man umgekehrt aus den Puncten M, m irgend zwei Parallelen MN_1, mn_1, von der Gröfse, dafs $MN_1 : mn_1 = MA : mA$: so liegen ihre Endpuncte N_1, n_1 mit dem Puncte A in einer geraden Linie."

Aehnliches findet Statt, wenn man statt des Puncts A einen Punct I nimmt, welcher zwischen den beiden Puncten M, m (Fig. 19.) liegt; nur liegen dann die Parallelen MN, mn oder MN_1, mn_1 auf verschiedenen Seiten der gegebenen graden Linie MIm.

7.

Beschreibt man um die gegebenen Puncte M, m (Fig. 18, 19.), mit zwei bestimmten Halbmessern MN, mn zwei Kreise M, m: so folgen aus (6.) unmittelbar nachstehende Sätze:

„In zwei beliebigen Kreisen M, m, (Fig. 18.), liegen die Endpuncte N, n zweier beliebigen parallelen Radien MN, mn, die sich an einerlei Seite der Axe Mm befinden, mit einem und demselben bestimmten Punct A in einer geraden Linie." Und:

„In zwei beliebigen Kreisen M, m (Fig. 19.), liegen die Endpuncte N, n zweier beliebigen parallelen Radien MN, mn, welche sich auf entgegengesetzten Seiten der Axe befinden, mit einem und demselben bestimmten Punct I in gerader Linie." Ferner:

„Zieht man nach irgend einer geraden Linie An_1N_1 oder N_1In_1 (Fig. 20.), welche durch einen jener bestimmten Puncte A oder I geht, aus den Mittelpuncten M, m zwei beliebige Parallelen MN_1, mn_1: so verhalten sich dieselben wie die Radien der Kreise, d. h.: es ist $MN_1 : mn_1 = MN : mn$." Und umgekehrt:

„Zieht man aus den Mittelpuncten Mm der gegebenen Kreise zwei beliebige Parallelen MN_1, mn_1, welche sich verhalten wie die Radien der Kreise: so liegen die Endpuncte N_1, n_1 derselben entweder mit A oder mit I in gerader Linie, je nachdem die Parallelen auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten der Axe Mm gezogen sind."

Die beiden Puncte A, I, welche zu zwei gegebenen Kreisen M, m gehören, wollen wir

„Aehnlichkeitspuncte der beiden Kreise M, m" nennen;

und zwar A äufsern und I innern Aehnlichkeitspunct. Ferner soll jede solche gerade Linie An_1N_1, n_1IN_1, welche durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte A oder I geht:

„Aehnlichkeitslinie der beiden Kreise M, m,"

und zwar ebenfalls „äufsere oder innere" heifsen, je nachdem sie durch den äufseren oder inneren Aehnlichkeitspunct geht.

Bezeichnet man die Radien MN, mn der Kreise M, m durch R, r: so hat man nach (6) für die Lage der beiden Aehnlichkeitspuncte A, I folgende Gleichungen:

$$R : r = MA : mA = MI : mI.$$

Hieraus folgt, dafs wenn z. B. $R = MA$, dafs alsdann zugleich $r = mA$ ist, und folglich die beiden Kreise einander in dem Punct A innerlich berühren; oder wenn $R = MI$ ist, dafs dann zugleich auch $r = mI$ ist, und dafs die gegebenen Kreise einander nothwendig in dem Punct I äufserlich berühren. Durch Umkehrung folgt:

„Dafs wenn zwei beliebige Kreise M, m einander äufserlich berühren: so ist der Berührungspunct zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunct (I)." Und:

„Wenn zwei beliebige Kreise (M, m) einander innerlich berühren: so ist der Berührungspunct zugleich ihr äufserer Aehnlichkeitspunct (A)."

Da die Endpuncte paralleler Radien der beiden Kreise M, m mit einem der beiden Aehnlichkeitspuncte A oder I in gerader Linie liegen: so folgt ferner, durch Umkehrung, dafs jede gerade Linie, welche durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte geht und den einen Kreis schneidet, nothwendiger Weise auch den andern Kreis schneidet, und dafs die nach den Durchschnittspuncten gezogenen Radien der beiden Kreise paarweise parallel sind. Berührt demnach die genannte Linie den einen Kreis, so berührt sie zugleich auch den andern. Daher folgt ferner:

„Liegen zwei gegebene Kreise M, m (Fig. 21.) aufser einander: so schneiden sich die beiden äufseren gemeinschaftlichen Tangenten Bb und $B_1\ b_1$ in dem äufsern, A, und die beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten Cc und $C_1\ c_1$ in dem innern Aehnlichkeitspunct I."

Hierdurch kann man leicht an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente ziehen.

Endlich ist zu bemerken, dafs, wie aus der obigen Gleichung folgt, bei zwei in einander liegenden Kreisen, die Aehnlichkeitspuncte innerhalb beider Kreise liegen.

8.

Es seien M_1, M_2, M_3 (Fig. 22.) die Mittelpuncte dreier beliebigen, der Gröfse und Lage nach gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3. Nach (7) gehören zu je zweien dieser drei Kreise zwei Aehnlichkeitspuncte. Es seien A_3 und I_3, A_2 und I_2 A_1 und I_1 die Aehnlichkeitspuncte der Kreispaare $M_1\ M_2$, $M_1\ M_3$, $M_2\ M_3$.

Da die gerade Linie $A_3\,A_2$, welche durch die Aehnlichkeitspuncte A_3 und A_2 geht, vermöge des erstern, zu den Kreisen M_1, M_2, und vermöge des letztern, zu den Kreisen M_1, M_3 eine äufsere Aehnlichkeitslinie ist (7.): so ist sie folglich auch eine äufsere Aehnlichkeitslinie zu den Kreisen M_2, M_3, und geht daher durch den äufsern Aehnlichkeitspunct A_1 derselben, d. h. die drei Aehnlichkeitspuncte A_3, A_2, A_1 liegen in einer geraden Linie. Auf ganz ähnliche Weise schliefst man, dafs sowohl die drei Aehnlichkeitspuncte A_3,I_1,I_2, als auch A_2,I_1,I_3, so wie auch A_1,I_2,I_3 in geraden Linien liegen. Wir finden daher folgenden Satz:

„Von den sechs Aehnlichkeitspuncten, welche zu drei beliebigen gegebenen Kreisen, paarweise genommen, gehören, liegen vier mal drei in einer geraden Linie, nämlich es liegen die drei äufseren, und jeder äufsere mit den beiden nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspuncten in einer geraden Linie."

Diese genannten vier geraden Linien, von welchen jede durch drei Aehnlichkeitspuncte der gegebenen Kreise geht, und mithin zu allen drei Kreisen ähnliche Lage hat, wollen wir

„Aehnlichkeitslinien der drei Kreise M_1, M_2, M_3," nennen,

und zwar die Linie $A_3\ A_2\ A_1$ äufsere, und die drei Linien $A_3\ I_1\ I_2$, $A_2\ I_1\ I_3$, $A_1\ I_2\ I_3$ innere Aehnlichkeitslinien.

Da die beiden äufseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier aufser einander liegender Kreise, sich im äufseren, dagegen die beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten sich im inneren Aehnlichkeitspunct der Kreise schneiden (7, Fig. 21): so folgt aus dem vorigen Satz unmittelbar der nachstehende:

„Legt man an je zwei von drei, der Gröfse und Lage nach gegebenen, aufser einander liegenden Kreisen M_1, M_2, M_3 (Fig. 23), die beiden Paare gemeinschaftliche Tangenten (d. h. die beiden äufseren und die beiden innern): so liegen sowohl die drei Durchschnittspuncte (A_3, A_2, A_1) der drei Paare äufsere Tangenten *), als auch der Durchschnittspunct jedes Paars äufsere Tangenten mit den zwei Durchschnittspuncten der beiden nicht zugehörigen Paare innere Tangenten (d. i. $A_3\ I_1\ I_2$, $A_2\ I_1\ I_3$, $A_1\ I_2\ I_3$) in einer geraden Linie."

Da nach (7) der Berührungspunct zweier Kreise zugleich ein Aehnlichkeitspunct derselben ist, so folgt daraus und aus dem obigen Satz ferner:

---

*) Diesen ersten Fall beweist M. Hirsch im zweiten Bande, Seite 368 seiner „Sammlung geometrischer Sätze etc."

„Wenn irgend ein beliebiger Kreis M_3 zwei gegebene Kreise M_1, M_2 berührt, so liegen die beiden Berührungspuncte mit einem der beiden Aehnlichkeitspuncte der gegebenen Kreise in einer geraden Linie."

Denn da die Puncte, in welchen der Kreis M_3 die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, zugleich zwei von den vier Aehnlichkeitspuncten A_1, I_1, A_2, I_2 sind, welche jener Kreis mit diesen beiden gemein hat: so sind die genannten Berührungspuncte zugleich entweder

1) die beiden Aehnlichkeitspuncte A_1 und A_2,
oder 2) - - - - I_1 - I_2,
oder 3) - - - - A_1 - I_2,
oder 4) - - - - I_1 - A_2,

und liegen folglich in den beiden ersten Fällen (1, 2.) mit dem äufsern A_3, und in den beiden letzten Fällen (3, 4.) mit dem innern Aehnlichkeitspunct I_3 der gegebenen Kreise M_1, M_2 in einer geraden Linie. Man kann daher den vorliegenden Satz auch bestimmter, wie folgt, aussprechen:

„Berührt irgend ein Kreis M_3 zwei der Gröfse und Lage nach gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig (d. h. entweder beide innerlich (1.) oder beide äufserlich (2.)): so liegen die beiden Berührungspuncte mit dem äufseren A_3, berührt er aber dieselben ungleichartig (d. h. den einen äufserlich und den andern innerlich (3, 4.)): so liegen die beiden Berührungspuncte mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) der gegebenen Kreise in einer geraden Linie."

§. III. Von der gemeinschaftlichen Potenz bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

9.

Nach (§. I. Nr. 4.) können zwei gegebene Kreise M_1, M_2 in denselben Puncten A, B, C, D, in welchen sie von irgend einem Kreise P rechtwinklig geschnitten werden, zugleich von vier bestimmten Kreisen berührt werden. Nemlich, schneidet z. B. der Kreis P (Fig. 24.) die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 in den Puncten A, D, C, B rechtwinklig: so können dieselben von einem bestimmten Kreise in den Puncten A, B, und von einem zweiten Kreise in den Puncten D, C gleichartig, dagegen von einem dritten Kreise in den Puncten A, C, und endlich von einem vierten Kreise in den Puncten D, B ungleichartig berührt werden.

Nach (§. II. Nr. 8.) liegen aber die beiden Berührungspuncte, in welchen irgend ein Kreis zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, mit dem äuſsern A_3, und dagegen die Berührungspuncte, in welchen irgend ein Kreis die gegebenen ungleichartig berührt, mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) derselben in einer geraden Linie. Folglich liegen die vier genannten Puncte A, D, C, B, in welchen irgend ein Kreis P zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig schneidet, sowohl paarweise mit dem äuſsern (A_3) als auch mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) der letztern Kreise in geraden Linien. Das heiſst: jede drei Puncte A_3AB, A_3DC, AI_3C, DI_3B liegen in einer geraden Linie. Wir finden also den folgenden Satz:

„Schneidet irgend ein Kreis P zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig: so liegen die vier Durchschnittspuncte A, D, C, B, paarweise, sowohl mit dem äuſsern A_3 als auch mit dem innern Aehnlichkeitspunct I_3 der gegebenen Kreise in geraden Linien." Oder, was dasselbe ist:

„Legt man aus irgend einem Punct P der Linie der gleichen Potenzen (PG) zweier gegebenen Kreise M_1, M_2, vier Tangenten PA, PD, PC, PB an die letztern, verbindet die vier Berührungspuncte A, B, C, D derselben paarweise durch sechs gerade Linien: so schneiden sich zwei dieser Linien BA und CD in einem constanten Punct A_3 (äuſserem Aehnlichkeitspunct), zwei andere AC und BD in einem constanten Punct I_3 (innerem Aehnlichkeitspunct), dagegen ist der Ort des Durchschnittspuncts P_1 des dritten Linienpaars DA und CB die genannte Linie PG selbst (§. I. Nr. 4.), und endlich geht jede der beiden letztern Linien DA, CB durch einen constanten Punct (Q_1, Q_2) (§. I. Nr. 5.)" *).

10.

Da alle möglichen Kreise P, welche zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig schneiden, die Axe $A_3\ M_1\ I_3\ M_2$ der letztern Kreise zusammen zur Linie der gleichen Potenzen haben (§. I. Nr. 5.); und da ferner, wie so eben erwiesen (9.), die vier Puncte, in welchen ein solcher Kreis P die beiden gegebenen Kreise schneidet, paarweise, sowohl mit dem äuſsern als mit dem innern Aehnlichkeitspunct der letztern in geraden Linien liegen: so folgt, daſs sowohl $A_3A \times A_3B = A_3D \times A_3C$, als $I_3A \times I_3C = I_3D \times I_3B$ constante Producte sind, wie auch der schneidende Kreis, unter der gegebenen Bedingung, seine Gröſse und Lage ändern mag. Denn das erste Product ist gleich

*) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des allgemeinen Satzes Seite 46. Nr. VII. des ersten Hefts dieses Journals. Die gegenwärtige Linie PG entspricht der dortigen Linie L, und die dortige Linie l ist im gegenwärtigen Falle unendlich entfernt.

der Potenz des Puncts A_3 in Bezug auf den Kreis P, und das letztere Product ist gleich der Potenz des Puncts I_3, in Bezug auf denselben Kreis P; folglich sind beide Producte constant, weil, wie schon bemerkt, alle Kreise P die Linie $A_3 I_3$ zur Linie der gleichen Potenzen haben.

Bezieht man diese Eigenschaft auf die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2, so entspringt daraus folgender Satz:

„Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunct A_3 oder I_3 zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 irgend eine gerade Linie $A_3 AB$ oder $AI_3 C$, welche die Kreise schneidet: so ist das Product $A_3 A \times A_3 B$ oder $AI_3 \times CI_3$ aus den Abständen des Aehnlichkeitspuncts von zwei Durchschnittspuncten A und B oder A und C der genannten Linie und der beiden Kreise, deren zugehörigen Radien $M_1 A$ und $M_2 B$ oder $M_1 A$ und $M_2 C$ nicht parallel sind, von constanter Gröſse."

Dieses constante Product wollen wir

„gemeinschaftliche Potenz der beiden gegebenen Kreise $M_1 M_2$, in Bezug auf ihren Aehnlichkeitspunct A_3 oder I_3,"

nennen.

11.

Es ist aber die Potenz des Puncts A_3, in Bezug auf den Kreis P, wenn die gegebenen Kreise M_1, M_2 auſser einander liegen, wie (Fig. 24.), gleich dem Quadrat der aus dem Punct an den Kreis P gelegten Tangenten $A_3 E$, folglich ist diese Tangente, für jeden Kreis P, von unveränderlicher Gröſse. Beschreibt man also mit derselben um den Punct A_3 einen Kreis A_3, so schneidet derselbe jeden Kreis P rechtwinklig. Dagegen ist die Potenz des Puncts I_3, welcher innerhalb des Kreises P liegt, gleich dem Quadrat der halben durch denselben gehenden kleinsten Sehne des Kreises P (§. I. Nr. 2.), und mithin hat diese halbe Sehne für jeden Kreis P einerlei Gröſse, oder, ein mit derselben um den Punct I_3 beschriebener Kreis I_3, wird von jedem Kreise P im Durchmesser geschnitten, d. h. die Puncte, in welchen irgend ein Kreis P den Kreis I_3 schneidet, sind zugleich die Endpuncte eines Durchmessers des letztern Kreises.

Diese beiden genannten, um die Aehnlichkeitspuncte A_3 und I_3 beschriebenen Kreise A_3, I_3, deren Radien, in's Quadrat erhoben, gleich sind den gemeinschaftlichen Potenzen der gegebenen Kreise M_1, M_2, in Bezug auf die Puncte A_3, I_3, sollen

„Potenzkreise der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2" heiſsen, und zwar der Kreis A_3 äuſserer und der Kreis I_3 innerer Potenzkreis.

Es ist noch zu bemerken, dafs im Fall die gegebenen Kreise in einander liegen (wie Fig. 14.), alsdann das Umgekehrte Statt findet, nemlich, dafs in diesem Fall der innere Potenzkreis I_3 jeden Kreis P rechtwinklig schneidet, der äufsere Potenzkreis A_3 aber von jedem Kreise P im Durchmesser geschnitten wird. Und wenn ferner die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 einander schneiden, so schneidet sowohl der äufsere als der innere Potenzkreis jeden Kreis P rechtwinklig.

12.

Da die beiden Puncte A und B oder D und C, Fig. 24., für welche nach (10.) das Product $A_3A \times A_3B = A_3D \times A_3C$ constant ist, oder welche in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_3 die Potenz bestimmen, auf einerlei Seite des letztern Puncts (A_3) liegen: so soll dieses heifsen: „die dem Aehnlichkeitspunct A_3 zugehörige Potenz sei äufserlich; und wenn die Puncte A und C oder D und B, welche in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_3 die gemeinschaftliche Potenz der gegebenen Kreise $M_1 M_2$ bestimmen, auf verschiedenen Seiten des Puncts I_3 liegen, so wollen wir sagen: die zum Aehnlichkeitspunct I_3 gehörige gemeinschaftliche Potenz der gegebenen Kreise sei innerlich."

Ueberhaupt wollen wir von irgend zwei Puncten X und Y, welche mit dem Punct A_3 in gerader Linie und auf einerlei Seite desselben liegen und zwar in solchen Abständen von demselben, dafs das Product $A_3X \times A_3Y$ gleich ist der zugehörigen (zu A_3) gemeinschaftlichen Potenz der gegebenen Kreise, sagen: „sie seien potenzhaltend in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_3." Eben so sollen zwei beliebige Puncte X und Y, welche mit den Punct I_3 in gerader Linie, aber auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen, und zwar in solchen Abständen von demselben, dafs das Product $I_3X \times I_3Y$ gleich ist der zugehörigen gemeinschaftlichen Potenz: „potenzhaltende Puncte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_3," heifsen.

Endlich wollen wir von jedem beliebigen Kreise K, dessen Potenz in Bezug auf einen der beiden Aehnlichkeitspuncte A_3 oder I_3 gleichartig (äufserlich oder innerlich) und gleich ist der zu demselben Punct gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der gegebenen Kreise M_1, M_2, sagen: „er sei potenzhaltend in Bezug auf den jedesmaligen Aehnlichkeitspunct."

Alsdann ist klar, dafs jeder Kreis, welcher durch irgend zwei potenzhaltende Puncte geht, ebenfalls potenzhaltend ist; ferner: dafs jeder Kreis K, welcher in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_3 potenzhaltend ist, den Potenztenzkreis A_3 rechtwinklig, und dafs jeder Kreis K, welcher in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_3 potenzhaltend ist, den Potenzkreis I_3 im Durchmesser schneidet.

Da nun derjenige Kreis, welcher die beiden gegebenen Kreise in den Puncten A und B (oder D und C) gleichartig berührt (9.), vermöge dieser Puncte, in Bezug auf den äufseren Aehnlichkeitspunct A_3, potenzhaltend ist; und da eben so derjenige Kreis, welcher die gegebenen Kreise in den Puncten A und C ungleichartig berührt, vermöge dieser Puncte, in Bezug auf den innern Aehnlichkeitspunct I_3, potenzhaltend ist, so folgt nachstehender Satz:

„Jeder Kreis K, welcher zwei gegebene aufser einander liegende Kreise M_1, M_2 gleichartig (d. i. entweder beide äufserlich oder beide einschliefsend) berührt: ist in Bezug auf den äufsern Aehnlichkeitspunct A_3 derselben, potenzhaltend, und schneidet den äufsern Potenzkreis A_3 derselben rechtwinklig." Und:

„Jeder Kreis K, welcher zwei gegebene, aufser einander liegende Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt: ist in Bezug auf den innern Aehnlichkeitspunct I_3 derselben potenzhaltend, und schneidet den innern Potenzkreis I_3 derselben im Durchmesser."

Aehnliches findet Statt, wenn die gegebenen Kreise, anstatt aufser einander, entweder in einander liegen oder einander schneiden.

13.

Da nach (12.) jeder Kreis K, welcher zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, in Bezug auf den äufseren Aehnlichkeitspunct A_3, und jeder Kreis K, welcher dieselben ungleichartig berührt, in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunct I_3 derselben potenzhaltend ist, so folgen nachstehende Sätze:

„Alle Kreise, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, haben den äufseren Aehnlichkeitspunct A_3 der letztern Kreise gemeinschaftlich zum Punct der gleichen Potenzen." Und:

„Alle Kreise, von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt, haben den inneren Aehnlichkeitspunct der letzteren gemeinschaftlich zum Punct der gleichen Potenzen." Oder auch:

„Wenn von irgend zwei beliebigen Kreisen N_1, N_2 jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen des erstern Kreispaars durch den äufseren Aehnlichkeitspunct A_3 des letzteren." Und:

„Wenn von irgend zwei Kreisen, N_1, N_2, jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen des erstern Kreispaars durch den inneren Aehnlichkeitspunct des letzteren." Es folgt ferner:

„Wenn jeder der beiden Kreise M_1, M_2 mehrere Kreise N_1, N_2, N_3 ..... gleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen jener beiden Kreise durch den äufseren Aehnlichkeitspunct je zweier der letzteren, oder die Schaar Kreise N_1, N_2, N_3 ..... haben die genannte Linie zur gemeinschaftlichen Aehnlichkeitslinie." Oder überhaupt:

„Alle Kreise N_1, N_2, N_3 ..., von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, haben die Linie der gleichen Potenzen $l(_{12})$ der letzteren zur gemeinsamen Aehnlichkeitslinie." Und:

„Alle Kreise N_1, N_2, N_3 ..., von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt, haben die Linie der gleichen Potenzen der letzteren zur gemeinsamen Aehnlichkeitslinie."

Die weitere Entwickelung dieses Paragraphen, und einige Anwendungen der letztern Sätze, bleibt dieses Mal, aus Mangel an Raum, weg; wir werden sie im nächsten Hefte nachfolgen lassen.

---

§. IV. Verallgemeinerung und geometrische Lösung der Malfatti'schen Aufgabe.

Um die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I, II, III) aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe *), jedoch ohne Beweis, hinzu:

14.

Aufgabe.

„In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 25.), drei Kreise a, b, c zu beschreiben, die einander, und jeder zwei Seiten des Dreiecks berühren, d. h., so: dafs der Kreis a die Seiten AB und AC, der Kreis b die Seiten BA und BC, und der Kreis c die Seiten CA und CB berührt."

Auflösung.

1) Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks durch die drei Linien AM, BM, CM; so treffen sich diese drei Linien bekanntlich in einem und demselben Puncte M.

---

*) Man sehe „Sammlung mathematischer Aufsätze von Crelle, erster Band, S. 133." Lehmus Lehrbuch der Geometrie, 2ter Band, und Gergonne *annales des mathématiques*, Tom. I. II.

2) In das Dreieck AMB beschreibe man den Kreis c_1, welcher die Seite AB in dem Puncte C_1 berührt, und in das Dreieck BMC beschreibe man den Kreis a_1

3) Aus dem Puncte C_1 lege man an den Kreis a_1 die Tangente $C_1 A_2$, und beschreibe

4) in das Dreieck $C_1 A_2 B$ den Kreis b, so ist dieser einer der verlangten drei Kreise.

Die beiden übrigen gesuchten Kreise a, c werden auf ganz ähnliche Weise gefunden. Nemlich die genannte Tangente $C_1 A_2 B_2$ berührt nicht allein den Kreis a_1, sondern zugleich auch den in das Dreieck AMC beschriebenen Kreis b_1, so dafs also der in das Dreieck $C_1 B_2 A$ beschriebene Kreis a ebenfalls einer der gesuchten drei Kreise ist. Auf gleiche Weise kann ferner aus dem Puncte B_1, in welchem der Kreis b_1 die Seite AC berührt, eine Linie gezogen werden, welche nicht allein die beiden Kreise a_1 und c_1, sondern auch die beiden gesuchten Kreise a und c berührt; und eben so geht eine Linie durch den Punct A_1, in welchem der Kreis a_1 die Seite BC berührt, welche jeden der vier Kreise b_1, c_1, b, c berührt.

Da die beiden Kreise a und b einander berühren, und jeder derselben die Linie $C_1 A_2 B_2$ berührt: so ist leicht zu sehen, dafs sie dieselbe in einem und demselben Puncte berühren. Eben so berühren die beiden Kreise a und c die durch den Punct B_1 gehende genannte Linie in einem und demselben Puncte; und gleichermaafsen berühren die beiden Kreise b und c die durch den Punct A_1 gehende genannte Linie in einem und demselben Puncte. Daher treffen die drei genannten geraden Linien, welche durch die Puncte C_1, B_1, A_1 gehen, in einem und demselben bestimmten Punct zusammen (§. I. Nr. 4.).

Die Aufgabe läfst keinesweges blos eine Auflösung zu. Es können vielmehr die drei gesuchten Kreise auch aufserhalb des gegebenen Dreiecks liegen, und dessen verlängerte Seiten berühren, also z. B. über der Seite BC im Raume M_1, oder über der Seite CA im Raume M_2, oder über der Seite AB im Raume M_3. Halbirt man nemlich jeden der sechs Winkel (die inneren und die äufseren) des gegebenen Dreiecks, so schneiden sich von den Theilungslinien vier mal drei in einem und demselben Puncte. Dieses sind die vier Puncte M, M_1, M_2, M_3. Jeder dieser vier Puncte, z. B. der Punct M bildet mit den Eckpuncten des gegebenen Dreiecks ABC die drei Dreiecke AMB, BMC, CMA. Die drei Seiten eines jeden dieser Dreiecke können von vier bestimmten Kreisen berührt werden, so dafs also zu diesen drei Dreiecken zwölf bestimmte Kreise gehören, unter welchen die oben genannten drei Kreise a_1, b_1, c_1 mit inbegriffen sind. Es scheinen, mittelst der genannten zwölf Kreise, nach Art der vorstehenden Auflösung, wenigstens acht verschiedene Auflösungen möglich zu sein. Und da ein Gleiches in Bezug auf jeden der drei übrigen Puncte M_1, M_2, M_3 Statt findet: so läfst die Aufgabe wenigstens 32 verschiedene Auflösungen zu, welche alle der obigen Auflösung ähnlich sind.

Unter diesen 32 Auflösungen sind die speziellen Fälle, wo zwei der drei gesuchten Kreise eine Seite des gegebenen Dreiecks in einem und demselben Punct berühren, nicht mitgerechnet; sondern es giebt solcher spezieller Fälle aufserdem noch 48. So sind z. B. unter den 32 Auflösungen, welche im I. Bande S. 348. der Annalen der Mathematik von Gergonne, von der obigen Aufgabe aufgezählt werden, vier und zwanzig, welche zu den hier ausgeschlossenen 48 Fällen gehören.

Die vorliegende Aufgabe kann übrigens auch als ein spezieller Fall von der folgenden, allgemeineren Aufgabe angesehen werden.

15.

Aufgabe.

„Drei beliebige Kreise, die in einerlei Ebene liegen, sind der Gröfse und Lage nach gegeben, man soll drei andere Kreise beschreiben, die einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dafs auch jeder der drei gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden Kreisen berührt."

Zum Beispiel: Wenn die drei Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 26.) gegeben sind, so soll man die drei Kreise m_1, m_2, m_3 finden, welche einander in den Puncten b_1, b_3, b_3 berühren, und von welchen zugleich der Kreis m_1 die Kreise M_2 und M_3, der Kreis m_2 die Kreise M_1 und M_3, und der Kreis m_3 die Kreise M_1 und M_2 berührt.

Auflösung.

1) Man suche die drei äufseren Achlichkeitspuncte A_3, A_2, A_1, welche zu den drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3, paarweise genommen, gehören (§. II. Nr. 7.), und construire die zu diesen Aehnlichkeitspuncten gehörigen Potenzkreise A_3, A_2, A_1 (§. III. Nr. 11.), deren Radien respective A_3C_3, A_2C_2, A_1C_1 sind, und welche Kreise sich in einem bestimmten Punct D schneiden werden.

2) Hierauf beschreibe man die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die drei Kreise M_1, A_2, A_3, der zweite die drei Kreise M_2, A_3, A_1, und der dritte die drei Kreise M_3, A_2, A_1 berührt.

3) Ferner beschreibe man einen Kreis, dessen Peripherie $b_1 B_1 \beta_1$ durch den Berührungspunct B_1 der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_2, μ_3 berührt, jedoch so, daſs er den Kreis μ_3, welcher von dem kleineren (M_3) der beiden Kreise M_2, M_3 abhängig ist, einschlieſsend berührt:

4) So ist endlich derjenige Kreis m_2, welchen man so beschreibt, daſs er die Kreise M_1, M_3 und den Kreis ($b_1 B_1 \beta_1$) berührt, einer der drei gesuchten Kreise.

Die beiden übrigen gesuchten Kreise m_1, m_3 findet man auf ähnliche Weise. Z. B. der Kreis m_3 kann aus der vorstehenden Construction unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises m_2 (4.) einen Kreis m_3 beschreibt, welcher die Kreise M_1, M_2 und den Kreis ($b_1 B_1 \beta_1$) berührt. Es ist zu bemerken, daſs die beiden Kreise m_2 und m_3 den Hülfskreis ($b_1 B_1 \beta_1$) in einem und demselben Punct b_1 berühren.

Die vielen verschiedenen Auflösungen, welche diese Aufgabe zuläſst, sind in der Hauptsache der vorstehenden ähnlich; selbst wenn die gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3, anstatt auſser einander zu liegen, wie in (Fig. 26), einander schneiden oder in einander liegen, bleiben die Auflösungen sich völlig ähnlich.

Nimmt man an, die drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 schnitten einander, und zwar so, daſs sie mehrere krummlinige Dreiecke bildeten, hält alsdann die Eckpuncte A, B, C eines solchen Dreiecks fest, und läſst die Kreise, durch unendliche Zunahme, in gerade Linien übergehen: so erhält man aus der vorliegenden Aufgabe und Auflösung, die Aufgabe und Auflösung (14.); nemlich die gegenwärtigen Potenzkreise A_1, A_2, A_3 gehen dann in die dortigen geraden Linien AM, BM, CM über, u. s. w., so daſs in dieser Hinsicht die Aufgabe (14.), wie oben gesagt, als ein spezieller Fall der gegenwärtigen Aufgabe angesehen werden kann.

Die vorstehende Aufgabe kann aber selbst wieder als ein spezieller Fall der folgenden angesehen werden.

16.

A u f g a b e.

„Auf einer Kugelfläche sind drei beliebige Kreise M_1, M_2, M_3 der Gröſse und Lage nach gegebenen; man soll auf derselben Kugelfläche drei andere Kreise

m_3, m_2, m_1 finden, welche einander berühren, und von welchen zugleich der Kreis m_3 die Kreise M_1 und M_2, der Kreis m_2 die Kreise M_1 und M_3, und der Kreis m_1 die Kreise M_2 und M_3 berührt." Oder was dasselbe ist:

„Wenn drei beliebige gerade Kegel, welche einerlei Scheitelpunct haben, der Gröfse und Lage nach gegeben sind: so soll man aus dem nemlichen Scheitel drei andere gerade Kegel beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kegel berührt."

Die Auflösung dieser Aufgabe ist derjenigen in (15.) völlig ähnlich. Nemlich die in den Paragraphen (I, II, III.), entwickelten Lehrsätze von Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, finden auf ähnliche Weise bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, Statt, welches an einem anderen Orte bewiesen werden soll. Wir erwähnen z. B. nur: dafs, so wie zu zwei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, zwei Aehnlichkeitspunkte gehören, von denen jeder der Mittelpunct eines Potenzkreises ist: eben so gehören auch zu irgend zwei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, zwei Aehnlichkeitspuncte (eigentlich vier, denn jeder ist doppelt vorhanden), von denen jeder der Pol eines bestimmten Kreises ist, welcher in gewisser Hinsicht die Stelle des Potenzkreises vertritt. Und, wie nun alle jene Hülfssätze von Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, welche bei der Auflösung in (15.) erforderlich waren, auf analoge Weise bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, Statt finden: so ist auch die Auflösung der vorliegenden Aufgabe derjenigen in (15.) vollkommen ähnlich, so dafs letztere in der gegenwärtigen enthalten ist.

Läfst man die Kugelfläche, durch unendliche Entfernung ihres Mittelpuncts, in eine Ebene übergehen, so geht zugleich die gegenwärtige Aufgabe in die Aufgabe (15.) über, in welcher Hinsicht die letztere, wie in (15.) gesagt, als ein spezieller Fall der ersteren angesehen werden kann.

Ein anderer spezieller Fall der vorliegenden Aufgabe ist derjenige, wo die drei gegebenen Kreise auf der Kugelfläche in gröfste Kreise übergehen, d. h. nachstehende Aufgabe.

17.

Aufgabe.

„In ein gegebenes sphärisches Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks berührt." Oder, was dasselbe ist:

„In einen gegebenen dreikantigen Körperwinkel drei gerade Kegel zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei Seitenflächen des Körperwinkels berührt."

Die Auflösung dieser speziellen Aufgabe ist derjenigen in (14.) ähnlich. Statt der dortigen Hülfslinien AM, BM, CM, welche die Winkel des gegebenen Dreiecks halbiren, kommen Bogen gröſster Kreise vor, welche die Winkel des gegebenen ſphärischen Dreiecks halbiren, u. s. w.

Eine noch allgemeinere Aufgabe als (16.) ist folgende, welche in gewisser Art alle bisherigen Aufgaben als spezielle Fälle in sich schlieſst.

18.

Aufgabe.

„Wenn auf irgend einer Oberfläche vom zweiten Grade drei beliebige ebene Curven (zweiten Grades) der Gröſse und Lage nach gegeben sind: so soll man auf derselben Oberfläche drei andere ebene Curven finden, welche einander berühren, und von denen jede zwei der gegebenen Curven berührt."

Die Auflösung dieser Aufgabe ist der Form nach den Auflösungen der bisherigen Aufgaben, besonders (16.) ganz ähnlich. Es finden nemlich die Hülfsmittel für die bisherigen Auflösungen, auf ähnliche Weise auch bei ebenen Curven, die in einerlei Fläche zweiten Grades liegen, Statt, welches an einem anderen Orte nachgewiesen werden soll. Z. B. zu irgend zwei ebenen Curven, die in einer solchen Fläche liegen, gehören (wie zu zwei Kreisen, die in einer Kugelfläche liegen (16)), zwei (eigentlich vier) Aehnlichkeitspuncte, und diese sind Pole zweier bestimmten ebenen Curven, (welche in derselben Fläche liegen und) welche in gewisser Art, in Bezug auf die beiden gegebenen Curven, die Stelle der Potenzkreise bei zwei Kreisen auf der Kugelfläche vertreten. Und so ist nun auch die Auflösung der vorliegenden Aufgabe derjenigen in (16.) oder in (15.) vollkommen ähnlich, so daſs letztere in der gegenwärtigen enthalten ist.

19.

Endlich ist noch zu bemerken, daſs die in den Annalen der Mathematik von Gergonne, im I. Bande S. 196. in der Note aufgestellte, dann im II. Bande S. 287. wiederholte, und endlich im X. Bande S. 298. in der Note wiederum in Erinnerung gebrachte Aufgabe:

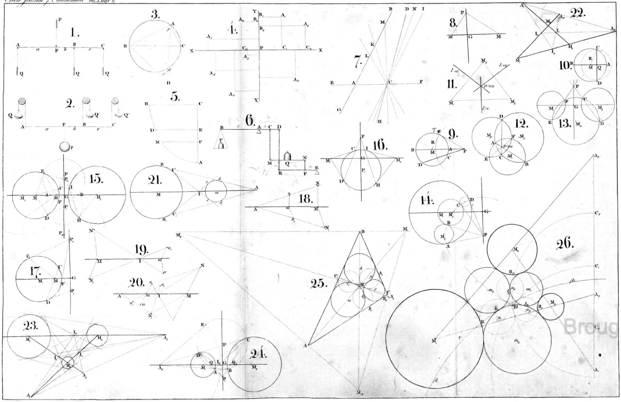
„In einen gegebenen vierflächigen Körper vier Kugeln zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jede aufserdem drei Seitenflächen des gegebenen Körpers berührt," mehr als bestimmt ist, wie leicht zu sehen.

Statt dieser Aufgabe, deren Lösung nur in beschränkten speziellen Fällen möglich ist, kann man folgende Aufgabe aufstellen:

„In einen, von vier ebenen Flächen begrenzten, gegebenen Körper, drei Kugeln zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jede aufserdem drei Seitenflächen des Körpers berührt."

Diese Aufgabe ist gerade nur bestimmt. Sie ist immer zu lösen möglich.

Berlin, im März 1826.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.