Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme.

Von

W. Wirtinger in Innsbruck.

In den Artikeln 8 und 9 der Abhandlung „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" (1860, p. 156—175 der Ges. Werke, II. Aufl.) giebt Riemann ein Verfahren zur Integration hyperbolischer Differentialgleichungen, welches für die Zwecke der mathematischen Physik hervorragend geeignet ist, da es nicht nur erlaubt sehr allgemeine Anfangsbedingungen explicite einzuführen, sondern auch das Gebiet ihrer Wirksamkeit sofort zu übersehen.

Es liegt diesem Verfahren der Gedanke zu Grunde, die Differentialgleichung als ein System linearer Gleichungen zwischen den Werthen der gesuchten Function an benachbarten Stellen aufzufassen, so dass die Anfangswerthe mit den späteren durch Ketten solcher Gleichungen zusammenhängen. Auf dieses System linearer Gleichungen lässt sich dann die Bézout'sche Methode in der Weise übertragen, dass an Stelle des unbestimmten Multiplicators der einzelnen Gleichung eine Function der Stelle tritt, für welche die Differentialgleichung gebildet ist, und an Stelle der Summation eine Integration ausgeführt wird. Diese Hülfsfunction lässt sich dann so bestimmen, dass die Integration direct das Integral der Differentialgleichung liefert.

Das einzelne dieses Verfahrens ist seither wiederholt auseinandergesetzt worden*), insbesondere hat Darboux einen Existenzbeweis für die Hilfsfunction skizzirt, unter der Voraussetzung analytischer Coefficienten der Differentialgleichung und Picard hat einen solchen für allgemeinere

---

*) P. Du Bois-Reymond, Studien zur Interpret. der linearen part. Diffgl. k^{ter} Ordnung, ferner Crelle 104. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, pag. 71 ff.

Coefficienten in der Umgebung einer Stelle gegeben. Les Roux*) hat neuerdings die Singularitäten der Integrale einer solchen Differentialgleichung untersucht, Delassus**) die Riemann'sche Methode auf mehrere Variable ausgedehnt. Die folgenden Zeilen beschäftigen sich nur mit dem speciellen Fall der sogenannten harmonischen Gleichungen. Zuerst werden zur bessern Uebersicht kurz die Formeln für die hier benutzte Form der Differentialgleichung abgeleitet. Es kann dann der Existenzbeweis Picard's unmittelbar unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auf den ganzen Bereich ausgedehnt werden. Hieran schliessen sich einige Anwendungen — insbesondere auf die schwingende Saite von variabler Dichte — und eine genauere Discussion des Riemann'schen Integralausdrucks. Dann folgt eine Erörterung der Beziehung der hier geübten Integrationsmethode zu den Reihenentwicklungen von Sturm und Liouville. Die Frage ob ein Grenzübergang zu unendlicher Erstreckung des Gebietes von diesen Reihen zu Integralausdrücken führt, giebt Anlass zur Untersuchung der Normalfunctionen in einem solchen Fall. Es zeigt sich, dass ein solcher Integralausdruck im allgemeinen nicht zu erwarten ist, da die entsprechende Schwingungsform bei Auflösung in einfache harmonische Schwingungen einem „Bandenspectrum" entsprechen würde.

§ 1.

Die Differentialgleichung.

Wir setzen die Differentialgleichung in der Form voraus

$$g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Die Charakteristiken derselben sind dann

$$\begin{aligned} \xi &= \int\sqrt{h(x)}\,dx + \int\sqrt{g(t)}\,dt, \\ \eta &= -\int\sqrt{h(x)}\,dx + \int\sqrt{g(t)}\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei sind $g(t)$, $h(x)$ eindeutige, endliche, stetige Functionen, welche in dem betrachteten Gebiet durchaus positiv sind. Des folgenden wegen nehmen wir hier gleich an, dass sie auch erste und zweite Derivirte haben, welche durchaus endlich, und eine endliche Anzahl von Stellen ausgenommen, auch stetige Functionen sein sollen.

Bei Einführung von ξ und η als neuen Variablen erhält man zunächst

*) Annales de l'école normale, ser. III, tom XII.

**) Ibid. Supplement.

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \sqrt{h(x)}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),\\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \sqrt{g(t)}\ \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\end{aligned}$$

und

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} &- \frac{1}{8} h'(x) h(x)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\\ &+ \frac{1}{8} g'(t) g(t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0.\end{aligned}$$

Setzt man hier

$$(4a)\qquad z = \zeta\, h(x)^{-\frac{1}{4}}\, g(t)^{-\frac{1}{4}}$$

so erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes, dass x und t als Functionen von ξ und η aufzufassen sind, wo x nur von $\xi - \eta$, t nur von $\xi + \eta$ abhängt, eine Gleichung von der Form

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = [\mu(\xi - \eta) + \nu(\xi + \eta)] \cdot \zeta.$$

Dabei gehen in die Ausdrücke der μ und ν durch $g(t)$ nnd $h(x)$ auch die zweiten Derivirten dieser Functionen ein, und dies ist der Grund für die obigen Voraussetzungen über dieselben. Die obigen Transformationen sind bereits von Darboux angegeben (l. c. p. 193). Dort ist auch die Transformation der allgemeineren Gleichung

$$P\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q\frac{\partial z}{\partial x} + Rz = P_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Q_1\frac{\partial z}{\partial y} + R_1 z$$

wo P, Q, R nur von x, P_1, Q_1, R_1 nur von y abhängen, in die Form (5) gegeben.

§ 2.

Auseinandersetzung des Riemann'schen Verfahrens.

Wir knüpfen die weitere Auseinandersetzung zunächst an die Form (5) der Differentialgleichung, wobei wir zur Abkürzung

$$\mu(\xi - \eta) + \nu(\xi + \eta) = \varphi(\xi, \eta)$$

setzen.

Interpretiren wir in der ursprünglichen Differentialgleichung (1) x als Abscisse und t als Ordinate eines rechtwinkligen Systems, so sind durch die Gleichungen $\xi = C_1$, $\eta = C_2$ zwei Curvensysteme gegeben, wobei unter den gemachten Voraussetzungen jede Curve des einen Systems nur einmal jede des andern Systems trifft. Einem bestimmten Werthsystem ξ, η möge so ein Punkt A der Ebene entsprechen. Die beiden von A ausgehenden Charakteristiken theilen die Ebene dann in 4 Quadranten. Es sei ferner in der Ebene eine Curve BC derart gegeben, dass sie jede Charakteristik nur einmal schneidet. Längs dieser Curve seien nun die Werthe von z und seiner ersten Derivirten vorgeschrieben. Die Curve soll ferner so beschaffen sein, dass sie überall eine bestimmte Tangente hat.

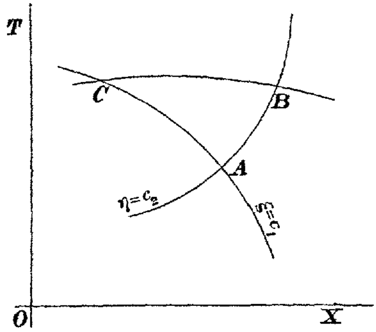

Fig. 1.

Wir stellen uns nun die Aufgabe aus den Werthen von z, resp. ζ und seiner Derivirten längs BC den Werth von z in A zu ermitteln.

Sei nun $v(\xi, \eta;\ \xi', \eta')$ eine Function von 4 Argumenten, so ist unter den bekannten Stetigkeitsbedingungen für v und ζ', wo ζ' den Werth von ζ an der Stelle $\xi'\eta'$ bedeutet,

$$(6)\qquad 2\iint\left(v\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi'\partial\eta'} - \zeta\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi'\partial\eta'}\right)d\xi'\,d\eta'$$
$$= \int\left(v\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'} - \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)\cdot d\xi' - \left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'} - \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)d\eta',$$

wobei links über das Innere der Fläche ABC, rechts über die Begrenzung im positiven Sinne integrirt ist.

Genügt nun v ebenso wie ζ' der Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi'\partial\eta'} = \varphi(\xi'\eta')\,v,$$

so verschwindet das Integral links, während das Integral rechts aus drei Bestandtheilen, je über AB, BC, CA zusammengesetzt ist.

Die Integration über BC enthält, wenn v bekannt ist, nur mehr bekannte Elemente, die Integrale über AB und CA müssen noch weiter umgeformt werden.

Da

$$\int_A^B v\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\,d\xi' = -(\zeta' v)_A + (\zeta' v)_B - \int_A^B \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\xi'}\,d\xi',$$

$$-\int_C^A v\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\,d\eta' = -(\zeta' v)_A + (\zeta' v)_C + \int_C^A \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\eta'}\,d\eta'$$

so wird schliesslich

$$(8)\qquad 2(v\zeta')_A = (v\zeta')_B + (v\zeta')_C$$
$$+\int_B^C\left(v\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'} - \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)d\xi' - \left(v\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'} - \zeta'\,\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)d\eta'$$

wenn noch die Function v folgenden Begingungen unterworfen wird:

1) Sie genügt der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi' \partial \eta'} = \varphi(\xi' \eta') v$,

2) für $\eta = \eta'$ ist $\frac{\partial v}{\partial \xi'} = 0$ und $\xi = \xi'$ ist $\frac{\partial v}{\partial \eta'} = 0$.

Fügt man noch die Bedingung hinzu, dass $v(\xi, \eta, \xi', \eta')$ für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ den Werth 1 haben soll, und beachtet, dass damit auch $v_B = v_C = 1$ wird, so folgt endlich

$$\zeta(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\zeta'_B + \zeta'_C) \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_B^C \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial \xi'} \right) d\xi' - \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial \eta'} \right) d\eta'.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Formel keine Aenderung erleidet, wenn die Curve BC in einem anderen Quadranten verläuft, sobald nur immer das Integral in dem Sinne genommen wird, welcher durch die positive Umlaufung der Dreiecke ABC vorgeschrieben ist.

Führt man hier wieder die Variablen x, t resp. x', t' ein, so erhält man

$$\zeta(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\zeta'_B + \zeta'_C) + \frac{1}{2} \int_B^C \sqrt{h(x')\, g(t')} \left[dx' . g(t')^{-1} \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial t'} \right) \right. \tag{10}$$

$$\left. + dt'\, h(x')^{-1} \left(v \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} - \zeta' \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \right]$$

aus welcher man nach (4a) auch z bestimmt.

§ 3.

Vervollständigung der vorhergehenden Betrachtung.

Die vorige Ableitung der Formeln (8), (10) unterliegt jedoch noch zwei Bedenken. Erstens nämlich steht die Existenz einer Function wie v nicht von vornherein fest, und zweitens bleibt es fraglich ob v und z diejenigen Stetigkeitsbedingungen erfüllen, welche zur Umwandlung des Doppelintegrals in ein Begrenzungsintegral hinreichend sind.

Wir beseitigen diese Bedenken dadurch, dass wir einen directen Beweis für die Existenz einer Function v führen und sodann die Formel (9) unmittelbar verificiren.

Der Existenzbeweis beruht auf einer Methode Picard's*), die hier etwas allgemeiner und einfacher zum Ziele führt, als dessen eigne Ent-

*) Picard: Bulletin de la société mathématique de France. t. XXII. 1894.

wicklungen, welche sich jedoch ihrerseits auf allgemeinere Differentialgleichungen beziehen.

Es genügt nämlich in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \varphi(\xi, \eta)\zeta \tag{7}$$

φ als endlich und integrirbar vorauszusetzen.

In der That, bilden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} u_0 = 1, \quad u_1(\xi, \eta; \xi', \eta') &= \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_1\, \varphi(\xi_1, \eta_1), \\ u_2 &= \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_2\, u_1(\xi_2, \eta_2; \xi', \eta')\, \varphi(\xi_2, \eta_2), \\ u_n &= \int_{\xi'}^{\xi} d\xi_n \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_n\, \varphi(\xi_n, \eta_n)\, u_{n-1}(\xi_n, \eta_n; \xi', \eta'), \end{aligned} \tag{11}$$

so erkennt man sogleich, dass die Summe

$$v(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_0^\infty u_n \tag{12}$$

formell der Differentialgleichung (7) genügt, und auch, dass

$$\frac{\partial v(\xi, \eta; \xi, \eta')}{\partial \eta} = \frac{\partial v(\xi, \eta; \xi', \eta)}{\partial \xi} = 0,$$

sowie

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1,$$

wenn gliedweise Differentiation der Reihe (12) und ihrer ersten und zweiten Derivirten gestattet ist.

Dieses letztere ist aber leicht nachzuweisen. Bleiben nämlich, ξ, ξ', η, η' in einem Gebiet, in welchem $\varphi(\xi, \eta) < M$ und $|\xi - \xi'| < A$, $|\eta - \eta'| < B$, so ist, wie man bei successiver Substitution der Ausdrücke für $u_{n-1}, u_{n-2} \ldots$ etc. in die Formel für u_n unmittelbar sieht:

$$\begin{aligned} |u_n| &< \frac{M^n A^n B^n}{(n!)^2}, \\ \left|\frac{\partial u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \xi}\right| &< \frac{M^n A^{n-1} B^n}{n!\,(n-1)!}, \\ \left|\frac{\partial u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \eta}\right| &< \frac{M^n A^n B^{n-1}}{n!\,(n-1)!}, \\ \left|\frac{\partial^2 u_n(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \xi \partial \eta}\right| &< \frac{M^n A^{n-1} B^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus erhellt unmittelbar die gleichmässige Convergenz aller in Betracht kommenden Reihen und damit auch die Berechtigung der vorgenommenen Operationen.

Aus der Reihenform von v erhellt auch die Richtigkeit der Gleichung

$$v(\xi, \eta;\ \xi', \eta') = v(\xi', \eta';\ \xi, \eta),$$

so dass also v von beiden Punkten symmetrisch abhängt.

Aus der Reihe (12) für v ergiebt sich endlich noch leicht

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial^2 v(\xi,\eta;\ \xi',\eta')}{\partial\eta\,\partial\xi'}\right)_{\xi=\xi'} = \left(\frac{\partial^2 v(\xi,\eta;\ \xi',\eta')}{\partial\xi\,\partial\eta'}\right)_{\eta=\eta'} = -\,\varphi(\xi, \eta).$$

Hievon werden wir sogleich Gebrauch machen.

Nachdem so die Existenz von v festgestellt ist, verificiren wir die Formel (9) direct unter der Annahme, dass sowohl die Curve BC als auch die längs derselben vorgeschriebenen Werthe von ζ' und seinen ersten Derivirten so beschaffen sind, dass Differentiation unter dem Integral in (9) gestattet ist. Dabei ist zu beachten, dass B nur von η, C hingegen nur von ξ abhängig ist.

Bezeichnen wir noch mit ds das Bogenelement der Curve BC, so erhalten wir

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta'}{ds}\cdot\frac{ds}{d\xi'}\right)_C + \frac{1}{2}\Big[v\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right)$$
$$- \zeta'\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial v}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right)\Big]_C\left(\frac{ds}{d\xi'}\right)_C$$
$$+ \frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial v}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\,d\xi' - \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\,d\eta'\right) - \zeta'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\xi'}\cdot d\xi' - \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta'}\cdot d\eta'\right)_C.$$

Nun ist an der Stelle C: $v = 1$, $\left(\frac{\partial v}{\partial\eta'}\right)_C = 0$, ferner überhaupt

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} + \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds} = \frac{d\zeta'}{ds}.$$

Damit erhält man schliesslich

$$(15)\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\right)_C - \frac{1}{2}\zeta_C\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)_C + \frac{1}{2}\int_B^C \frac{\partial v}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial\xi'}\,d\xi' - \frac{\partial\zeta'}{\partial\eta'}\,d\eta'\right)$$
$$- \zeta'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\xi'}\,d\xi' - \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta'}\,d\eta'\right).$$

Eine analoge Formel würde man für $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ erhalten.

Rückt nun der Punkt ξ, η auf die gegebene Curve, so fällt B mit C zusammen, das Integral fällt weg und da für $\eta = \eta'$ auch $\left(\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right)_C = 0$ ist, so nehmen sowohl ζ als $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$ und damit auch $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ auf der Curve die vorgeschriebenen Werthe an.

Durch Differentiation nach η erhält man aus (15)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2}\zeta_C\left(\frac{\partial v}{\partial \eta\, \partial \xi'}\right)_C - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right)\right.$$
$$\left. + \zeta'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'}\cdot\frac{d\xi'}{ds} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta'}\cdot\frac{d\eta'}{ds}\right)\right]_{\eta=\eta'}\left(\frac{ds}{d\eta'}\right)_B$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_B^C \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\, d\xi' - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\, d\eta'\right) - \zeta'\left(\frac{\partial^3 v}{\partial \xi\, \partial \xi'\, \partial \eta}\, d\xi' - \frac{\partial^3 v}{\partial \xi\, \partial \eta\, \partial \eta'}\, d\eta'\right).$$

Mit Rücksicht darauf, dass für $\eta = \eta'$, $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'} = 0$, ferner dass

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta) v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \xi'\, \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta\, \partial \eta'} = \varphi(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta'}$$

und endlich unter Beachtung der Gleichung (14) erhält man so

$$(16)\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \varphi(\xi,\eta)\left[\frac{1}{2}(\zeta_B + \zeta_C) + \frac{1}{2}\int\limits_B^C v\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}\, d\xi' - \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}\, d\eta'\right)\right.$$
$$\left. - \zeta'\left(\frac{\partial v}{\partial \xi'}\, d\xi' - \frac{\partial v}{\partial \eta'}\, d\eta'\right)\right] = \varphi(\xi,\eta)\,\zeta.$$

Die Formel (9) liefert also in der That unter den gemachten Voraussetzungen ein Integral der Differentialgleichung, welches den gestellten Bedingungen genügt.

Es möge noch bemerkt werden, dass für $\varphi(\xi, \eta) = c$ die Reihe (12) unmittelbar v als die Bessel'sche Function des Argumentes $\sqrt{i(\xi - \xi')(\eta - \eta')}$ erkennen lässt.

§ 4.

Einige Anwendungen.

Die Formel (9) und die aus ihr durch Transformation hervorgegangene (10) gestatten bereits eine bemerkenswerthe Anwendung auch dann, wenn die Function v nicht bereits berechnet ist. Da nämlich die Formel zeigt, dass der Werth des Integrals in A nur von den Werthen von z und seinen ersten Derivirten zwischen B und C abhängt, so folgt hieraus, dass wenn längs einer beliebigen, die Charakteristiken nur einmal schneidenden Curve z und $\frac{\partial z}{\partial x}$ Null sind, mit Ausnahme eines endlichen Stückes von B' bis C', dass dann auch z nur in dem in der Figur schraffirten, von den Charakteristiken durch B' und C' begrenzten Bereich z von Null verschieden sein kann, weil nur in diesen Gebieten Charakteristiken

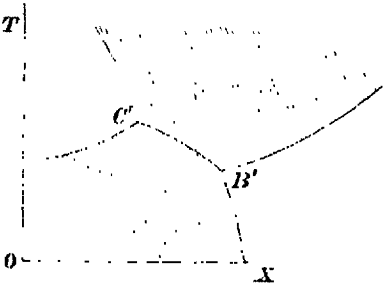

Fig. 2.

verlaufen, welche $B'C'$ treffen. Dieses genügt z. B. um bei einer Saite von veränderlicher Dichte mit dem Dichtigkeitsgesetz $\varrho(x)$ und der Spannung S zu erkennen, dass eine anfänglich auf ein kurzes Stück beschränkte Störung der Gleichgewichtslage sich nach und nach rechts und links über eine Strecke ausbreitet, deren Endpunkte nach rechts und links mit der Geschwindigkeit $\sqrt{S\varrho^{-1}(x)}$ fortschreiten. Dieses Resultat war hier übrigens vorauszusehen.

Um einen etwas complicirteren Fall zu behandeln, betrachten wir die kleinen Transversalschwingungen eines biegsamen, schweren, homogenen Fadens, der an einem Punkte aufgehängt und mit einem Gewichte am anderen Ende belastet ist.

Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\left(Mg + mg(l-x)\right)\frac{\partial z^2}{\partial x^2} - g\frac{\partial z}{\partial x} \tag{17}$$

(vgl. etwa Kraft, Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik, II, pag. 600 ff.).

Hier bedeutet M die angehängte Masse, m die Längendichte, l die Länge des Fadens und g die Beschleunigung der Schwere.

Setzt man

$$z = \zeta\left(Mg + mg(l-x)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\left(Mg + mg(l-x)\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}: \tag{18}$$

Die Gleichungen der Charakteristiken werden

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{m}{Mg+mg(l-x)}}\cdot dx + t, \\ \eta &= -\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{m}{Mg+mg(l-x)}} + t. \end{aligned} \tag{19}$$

Da nun der Zustand des Fadens zur Zeit t durch das Verhalten von ζ auf einer im Abstand t zur Abscissenaxe gezogenen Parallelen angegeben wird, so ist unmittelbar zu sehen, dass sich eine anfänglich auf ein kleines Gebiet beschränkte Störung mit der Zeit auf ein grösseres Gebiet ausbreiten wird, dessen Grenzen mit einer Geschwindigkeit c fortschreiten werden, welche nach oben durch die Gleichung

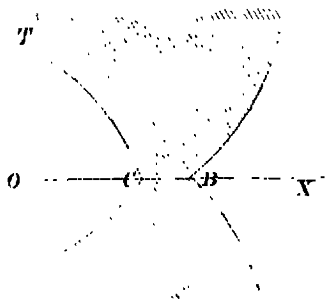

Fig. 3.

$\partial\xi \quad , \quad \partial\xi$

gegeben ist. Hieraus folgt

$$c = -\sqrt{\frac{Mg + mg(l-x)}{m}};$$

ist $M = 0$, so ist

$$c = -\sqrt{g(l-x)},$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \cdot c = -\frac{g}{2}. \tag{20}$$

Die Ausbreitung geschieht also nach oben gleichförmig beschleunigt, und analog nach unten gleichförmig verzögert. Die Beschleunigung ist gleich der halben Fallbeschleunigung.

Dieses Resultat wurde aus den fertigen Integralen auf complicirtem Wege bereits von Poisson im Journal de l'école polytechnique tome VII gefunden.

Die Formeln (9) und (10) können überhaupt als Verallgemeinerungen des Alembert'schen Integrals für die homogene, schwingende Saite angesehen werden. Es wird für diesen Fall in (10) $g(t) = a^2$, $h(x) = 1$, $v = 1$ und man erhält für die Anfangsbedingungen $z = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ für $t = 0$ aus (10) genau die bekannte*) Formel

$$z = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

§ 5.

Anwendung auf die schwingende Saite von variabler Dichte und begrenzter Länge.

Die Formel (10) gestattet auch die Behandlung solcher Aufgaben, welche bisher mit Vorliebe durch Reihenentwicklungen erledigt wurden. Da uns nun die Reihe (12) die Function v unter sehr weiten Voraussetzungen liefert, und diese Reihe etwa so stark convergirt, wie diejenige für die Bessel'sche Transcendente $J_0(x)$, so kann dies unter Umständen auch practischen Werth haben, namentlich da auch die gewöhnlichen Reihenentwicklungen meist langwierige Rechnungen erfordern.

Wir führen dies an dem Beispiel der Differentialgleichung der Transversalschwingungen einer Saite von variabler Dichte durch, unter den Bedingungen, dass der Anfangs- und Endpunkt fest ist und die Dichte eine solche Function $\varrho(x)$ der Abscisse ist, dass die Voraus-

*) Vgl. Riemann, partielle Differentialgleichungen herausgeg. von Hattendorf. pag. 113, III.

setzungen des § 1 über die Beschaffenheit von $h(x)$ erfüllt werden. Ist die Spannung der Saite S, so lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\varrho(x)}{S} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{21}$$

Es soll ferner für $t = 0$ und $0 < x < l$ $z = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ vorgegeben sein. Die Formel (10) liefert dann für x als Function von x und t:

$$z\sqrt[4]{\frac{\varrho(x)}{S}} = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_1)\sqrt[4]{\frac{\varrho(x_1)}{S}} + \varphi(x_2)\sqrt[4]{\frac{\varrho(x_2)}{S}}\right) \tag{22}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt[4]{\frac{\varrho(x')^3}{S^3}}\left((v)_{t'=0}\psi(x') - \varphi(x')\left(\frac{\partial v}{\partial t'}\right)_{t'=0}\right) dx'.$$

Dabei sind x_1 und x_2 durch die Gleichungen bestimmt

$$-\int_x^{x_1}\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t, \quad \int_x^{x_2}\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t. \tag{23}$$

Die Bestimmung von v, sowie überhaupt die Anwendung dieser Formel begegnet jedoch der Schwierigkeit, dass Anfangszustand und Dichte nur innerhalb eines begrenzten Intervalles gegeben sind. Man genügt jedoch allen Bedingungen der Aufgabe, wenn man die Functionen $\varrho(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in der Weise über das Intervall $0, l$ hinaus fortsetzt, dass $\varrho(x)$ eine gerade, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aber ungerade Functionen mit der Periode $2l$ werden. Wenn man nämlich v als Function der Coordinaten x, t, x', t' mit $v(x, t;\, x', t')$ bezeichnet, so folgt aus den Voraussetzungen über die Fortsetzungen von $\varrho(x)$

$$v(x, t;\, x', t') = v(-x, t;\, -x', t'),$$
$$v(x+2l, t;\, x'+2l, t') = v(x, t;\, x', t')$$

und damit auch

$$v(x+l, t;\, x'+l, t') = v(x-l, t;\, x'-l, t') = v(l-x, t;\, l-x', t').$$

Nun ist zu zeigen, dass bei den gemachten Annahmen über die Fortsetzung von ϱ, φ, ψ für $x = 0$ und $x = l$ immer $z = 0$ ist.

Da aber $\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}$ immer positiv ist, so kann man das Integral $\int_0^x \sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx$ eindeutig umkehren. Für $x = 0$ folgt damit aus

$$\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = t, \quad \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{\varrho(x)}{S}}\, dx = -t$$

$x_1 = -x_2$.

Damit aber zeigt Formel (22) sofort, dass $z(0, t) = 0$, da φ ungerade ist und das Integral über eine ungerade Function zwischen entgegengesetzten Grenzen genommen ist.

Für $x = l$ folgt ebenso

$$x_1 = 2l - x_2$$

und nach Einführung der neuen Integrationsvariablen $u = x' - l$ hat man wieder unter Berücksichtigung der Periodicität von φ, ψ, ϱ die nämlichen Verhältnisse wie für $x = 0$.

In derselben Weise kann auch das Problem der Transversalschwingungen einer homogenen Saite in einem widerstehenden Mittel behandelt werden. Die Differentialgleichung, welche übrigens von der sogenannten Telegraphistengleichung*) nicht wesentlich verschieden ist, lautet hier

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Nach Einführung der neuen Variablen $\tau = e^{-2\gamma t}$ kommt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{a^2}{4\gamma^2 \tau^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Setzt man nach Vorschrift des § 1

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{a}{2\gamma} l(\tau) = x - at, \\ \eta &= -x + \frac{a}{2\gamma} l(\tau) = -x - at, \\ \zeta &= z\sqrt{\frac{a}{2\gamma\tau}}, \end{aligned}$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\gamma^2}{4a^2} \zeta.$$

In der Reihe (12) wird hier

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{\gamma^2}{2^2 a^2} (\xi - \xi')(\eta - \eta'), \quad u_2 = \frac{\gamma^4}{2^4 a^4} \frac{(\xi - \xi')^2}{2} \cdot \frac{(\eta - \eta')^2}{2},$$

$$u_n = \frac{\gamma^{2n}}{2^{2n} a^{2n}} \frac{(\xi - \xi')^n (\eta - \eta')^n}{n!\, n!}$$

und daher

$$v = \sum_0^\infty \frac{\gamma^{2n}}{2^{2n} a^{2n}} \frac{(\xi - \xi')^n (\eta - \eta')^n}{n!\, n!} = J\left(\frac{\gamma}{a} \sqrt{(\xi' - \xi)(\eta - \eta')}\right)$$

wenn J die Bessel'sche Transcendente J_0 bezeichnet. Führt man wieder die ursprünglichen Variabeln x und t ein, so erhält man

*) Vgl. Poincaré, Comptes Rendus 1893, II, vom 26. Dec. Picard ebenda 1894 vom 2. Jan.

unter den Bedingungen $z = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ für $t = 0$ schliesslich die fertige Formel:

$$z = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \Bigg[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)$$

$$+ \frac{1}{a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Bigg[\big(\psi(x') + \gamma \varphi(x')\big) J\left(\frac{\gamma}{a} \sqrt{(x - x' + at)(x - x' - at)}\right)$$

$$+ \gamma a t \varphi(x') \cdot \frac{J'\left(\frac{\gamma}{a} \sqrt{(x - x' + at)(x - x' - at)}\right)}{\sqrt{(x - x' - at)(x - x' + at)}} \Bigg] dx' \Bigg].$$

Für den Fall einer begrenzten Saite hat man ebenso wie oben φ und ψ als ungerade periodische Functionen mit der Periode $2l$ fortzusetzen.

Für $\gamma = 0$ geht diese Formel in diejenige Form des d'Alembert'schen Integrales über, welche am Ende des vorigen Paragraphen angeführt wurden.

§ 6.

Ueber Riemann's bestimmtes Integral für v.

Im Artikel 9 der Eingangs erwähnten Abhandlung giebt Riemann*) für die von ihm behandelte Differentialgleichung auch eine Formel, in welcher v durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt wird. Da seine Gleichung aus der Gleichung (21) durch Transformation erhalten wird, so wollen wir zunächst die Formel entwickeln und dann einer eingehenderen Discussion unterziehen.

Setzen wir in der Differentialgleichung

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = h(x) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

$$z = y(x, \lambda) e^{2\pi i \lambda t},$$

so folgt, dass y der gewöhnlichen Differentialgleichung genügen muss:

$$(24) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + 4\pi^2 \lambda^2 h(x) y = 0$$

wenn z ein Integral von (21) sein soll. Wir versuchen nun die Differentialgleichung (21) zu integriren unter den Bedingungen, dass für $x = x'$ und jeden Werth von t sein soll $z = 0$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \psi(t)$.

Verstehen wir nun unter $y(x, x', \lambda)$ dasjenige Integral von (24)

*) Man sehe hierzu auch die Anmerkung in der zweiten Ausgabe von Riemann's Werken pag. 179—181.

welches für $x = x'$ verschwindet, während $\frac{dy}{dx}$ den Werth 1 annimmt, so können wir für z den Ansatz machen

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) y(x, x', \lambda) e^{2\pi i\lambda t} d\lambda,$$

wo $F(\lambda)$ eine noch zu bestimmende Function ist. Nach den Voraussetzungen über y und den zu erfüllenden Grenzbedingungen ergiebt sich zur Bestimmung von $F(\lambda)$ die Gleichung

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{2\pi i\lambda t} d\lambda.$$

Nach dem Cauchy'schen Reciprocitätsgesetz der Fourier'schen Integrale*) folgt hieraus

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t') e^{-2\pi i\lambda t'} dt'$$

und damit wird endlich

(25) $$z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \psi(t') \, y(x, x', \lambda) e^{2\pi i\lambda(t-t')}.$$

Nun liefert aber Formel (10) unter den gemachten Annahmen

(26) $$z = \frac{1}{2\sqrt[4]{h(x)\, h(x_1)}} \int_{t_1}^{t_2} \psi(t') \cdot v(x, t; x', t') \, dt'.$$

Dabei sind t_1, t_2 bestimmt durch die Formeln

(27) $$t_1 = t - \int_x^{x'} \sqrt{h(x)}\, dx,$$
$$t_2 = t + \int_x^{x'} \sqrt{h(x)}\, dx.$$

Um nun durch Vergleich von (25) und (26) v zu ermitteln, ist es nothwendig, die verschiedenen Lagen der Stelle x', t' in Bezug auf die beiden Charakteristiken durch x, t zu unterscheiden.

*) Vgl. Kronecker, Vorlesungen über Integrale hrsg. v. Netto, pag. 83.

Ist nämlich $x' > x$, so kann man $\psi(t')$ überall gleich Null annehmen ausser ein beliebig kleines Stück zwischen t_1 und t_2, wo es constant genommen werden mag. Der Vergleich von (26) und (27) giebt dann für $x' > x$, $t_1 < t' < t_2$

$$(28)\qquad v(x, t;\, x', t') = 2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')}.$$

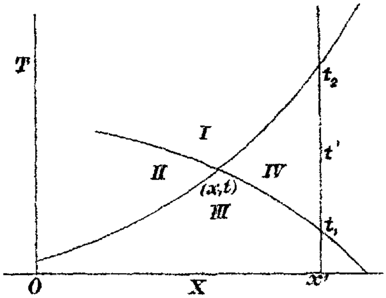

Fig. 4.

Ist dagegen $x' < x$, so ist auch $t_2 < t_1$, die Integration nach t' in (26) ist dann dem Sinne nach entgegengesetzt zur Integration nach t' in (25) und man findet für $t_2 < t' < t_1$ und $x' < x$

$$(29)\qquad v(x, t;\, x', t') = -2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')}.$$

Nimmt man endlich $\psi(t')$ gleich Null an zwischen t_1 und t_2, so ergiebt sich aus der Gleichstellung von (25) und (26) für $x < x'$

$$(30\text{a})\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{t_1} dt'\, \psi(t')\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{t_2}^{\infty} dt'\, \psi(t')\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')} = 0$$

während für $x > x'$ in dieser Formel t_1 und t_2 zu vertauschen sind. Setzt man hier wieder $\psi(t')$ ausserhalb eines beliebig klein zu nehmenden Intervalles gleich Null, innerhalb desselben aber constant, so erhält man schliesslich für $x' > x$, $t' > t_2$ oder $< t_1$, ebenso wie für $x' < x$, $t' < t_1$, oder $< t_2$ die Gleichung

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, y(x, x', \lambda)\, e^{2\pi i\lambda(t-t')} = 0.$$

Bezeichnet man also die Quadranten, in welche die Ebene durch die beiden Charakteristiken zerfällt, welche sich in x, t schneiden wie in Figur 4 als ersten, zweiten, dritten und vierten, so kann man das Ergebniss zusammenfassen in folgender Weise:

Liegt x', t' im k^{ten} Quadranten, so gilt die Gleichung

$$(31)\qquad \cos\frac{k\pi}{2}\, v(x, t;\, x', t') = 4\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\int_0^{\infty} y(x, x', \lambda)\cos 2\pi\lambda(t-t')\, d\lambda.$$

Denn, wie man sich leicht überzeugt, ist $y(x, x', \lambda)$ eine gerade Function von λ.

Im ersten und dritten Quadranten kann also das bestimmte Integral zur Ermittelung von v nicht verwendet werden.

Wir können übrigens die Formel (31) auch auffassen als Ermittelung des bestimmten Integrals, wenn wir v durch die Reihe (12) als gegeben ansehen. Die so entstehende Relation dürfte auf directem Wege schwer zu beweisen sein.

Durch directe Umformung kann man die hier erhaltenen Resultate für das in (31) auftretende bestimmte Integral in dem am Schlusse des § 5 angeführten Beispiele bestätigen, wenn man vorher noch x und t vertauscht; doch gehen wir hierauf nicht näher ein, da die Rechnung langwierig und ohne besonderes Interesse ist.

Das in (31) auftretende Integral wird von Riemann l. c. nur als Durchgangsformel zur Ermittelung einer analytischen Function für v benutzt. In der That würde es z. B. schon bei der wichtigsten Aufgabe für die schwingende Saite versagen, sobald nämlich als Anfangsbedingungen Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte gegeben sind.

Man kann aber auch das Integral auf der rechten Seite von (31) als Integral der Differentialgleichung betrachten. Dasselbe stellt dann eine Art Hauptlösung dar, insofern als für $t = t'$, $x = x'$ eine Unstetigkeit auftritt und sonst nirgends.

Allein diese Hauptlösung ist nicht brauchbar um allgemeinere Integrale in der gewöhnlichen Weise durch Superposition daraus herzuleiten. Im weiteren Verlauf der Bewegung kommt nämlich zu Folge des eben erörterten Verhaltens von v ein immer grösserer Theil der Saite zur Ruhe, während eine brauchbare Hauptlösung gerade umgekehrt die Ausbreitung einer von einem Punkt ausgehenden Störung darstellen müsste.

Dagegen erweist sich das Integral als brauchbare Hauptlösung für die Integration der Differentialgleichung unter den Bedingungen, das etwa für $x = x'$ die Grössen z und $\frac{\partial z}{\partial x}$ als Functionen von t gegeben sind.

§ 7.

Ueber die Darstellung von v durch Normalfunctionen.

So wie oben die Integration der Differentialgleichung mit Hülfe Fourier'scher Integrale die Bestimmung von v innerhalb eines von Charakteristiken begrenzten Gebietes ermöglichte, ist es auch möglich die Reihenentwicklungen nach Normalfunctionen unter gewissen Voraussetzungen heranzuziehen, und zwar auch dann, wenn die Differentialgleichung in der allgemeineren Form

$$(1) \qquad g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

gegeben ist, wo $g(t)$ und $h(x)$ wenigstens innerhalb gewisser Intervalle etwa für $0 \leqq x \leqq a$; $0 \leqq t \leqq b$ den Voraussetzungen des § 1 genügen.

Setzt man zunächst

$$(32) \qquad z = y(x) \,.\, \eta(t),$$

so erhält man zur Bestimmung von y und η die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(33\text{a}) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 h(x)\, y = 0,$$

$$(33\text{b}) \qquad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \lambda^2 g(t)\, \eta = 0$$

wo λ^2 eine willkürliche Grösse bedeutet, welche wir positiv annehmen.

Bezeichnen wir nun mit $y(x, x', \lambda)$ dasjenige Integral von (33a), welches an der Stelle $x = x'$ Null wird, während $\frac{dy}{dx}$ für $x = x'$ den Werth 1 annehmen soll, und gebrauchen wir die analoge Bezeichnung $\eta(t, t', \lambda)$, so hat nach den bekannten Sätzen von Sturm und Liouville die Gleichung

$$y(a, 0, \lambda) = 0$$

unendlich viele reelle Wurzeln für λ, unter denen sich keine mehrfachen befinden, und welche im Endlichen keine Häufungsstelle haben. Seien diese Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, dann setzen wir der Kürze halber

$$y(x, 0, \lambda_n) = y_n(x).$$

Ebenso bezeichnen wir die Wurzeln von

$$\eta(b, 0, \lambda) = 0$$

mit $\mu_1 \ldots \mu_n$ und setzen

$$\eta(t, 0, \mu_n) = \eta_n(t).$$

Ist nun $\psi(x)$ eine im Intervall $0 \ldots a$ endliche und stetige Function mit abtheilungsweise stetigen ersten und zweiten Derivirten, welche ausserdem für $x = 0$ und $x = a$ verschwindet, so gilt die Reihenentwickelung*)

---

*) Für die Gültigkeitsbedingung der Reihenentwickelung vgl. Radaković, Wiener Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg. V, wo auch für die y brauchbare Reihenentwickelungen gegeben sind. Dieselben ergeben sich zwar auch aus dem von Fuchs, Annali di Matematica, ser. II. tom. 4 aufgestellten allgemeinen Formeln, werden aber von Radaković aus der Vorstellung hergeleitet, dass die Saite von variabler Dichte aus einer Saite, welche aus einer Anzahl homogener Theile besteht, durch Vermehrung dieser Theile ins Unendliche als Grenzfall hervorgeht.

$$(34) \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \psi(x')\, y_n(x')\, h(x')\, dx}{\int_0^a \psi(x')\, y_n^2(x')\, dx'} \cdot y_n(x)$$

im Intervall $0 < x < a$, und es ist

$$(35) \qquad z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \psi(x') . y_n(x') h(x')\, dx'}{\int_0^a h(x')\, y_n^2(x')\, dx'}\, y_n(x)\, \eta(t, t', \lambda_n)$$

ein Integral der Differentialgleichung (1) welches für $t = t'$ verschwindet, während dann $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ wird, gültig, so lange x im Intervalle von 0 bis a bleibt.

Ebenso würde man durch die Formel

$$(36) \qquad z_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b \varphi(t') . \eta_n(t') . g(t')\, dt'}{\int_0^b g(t')\, \eta_n^2(t')\, dt'}\, \eta_n(t)\, y(x, x', \mu_n)$$

ein Integral der Differentialgleichung (1) erhalten, gültig, so lange t zwischen 0 und b bleibt, welches für $x = x'$ verschwindet, und dessen erste Derivirte nach x ebenda den Werth $\varphi(t)$ annimmt.

Da nun andererseits nach Formel (10)

$$z(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{h(x)\, g(t)\, g(t')}} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x') \cdot v(x, t;\, x', t')\, h(x')^{\frac{3}{4}}\, dx'$$

ist, wo x_1 und x_2 aus den Gleichungen

$$\int_t^{t'} \sqrt{g(t)}\, dt = -\int_x^{x_1} \sqrt{h(x)}\, dx; \qquad \int_t^{t'} \sqrt{g(t)}\, dt = \int_x^{x_2} \sqrt{h(x)}\, dx$$

zu bestimmen sind, so kann man dies mit (35) vergleichen. Unter der Voraussetzung, dass in (35) Integration und Summation vertauscht werden dürfen (wie es z. B. für gewöhnliche Fourier'sche Reihen zutrifft) kann man schreiben

$$(37) \quad \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1}{h(x) g(t) g(t')}} \int_{x_1}^{x_2} \psi(x')\, v(x, t;\, x', t')\, h(x')^{\frac{3}{4}} \cdot dx'$$

$$= \int_0^a dx' . \psi(x') \sum_0^{\infty} \frac{y_n(x')\, y_n(x) . h(x')}{\int_0^a h(u)\, y_n^2(u)\, du}\, \eta(t, t', \lambda_n).$$

Hier ist nun wieder zu unterscheiden ob x_1 und x_2 in das Intervall $(0, a)$ hineinfallen oder nicht, und im ersteren Falle ob $t > t'$ oder $t < t'$. Fallen x_1 und x_2 nicht beide in das Intervall $(0, a)$, so ist über die Reihe rechts nichts bekannt. Ist im ersteren Fall $t > t'$, so ist auch $x_2 < x_1$, die Integration rechts ist dann dem Sinne nach entgegengesetzt zu der links und es ergiebt sich

$$\text{(38a)} \quad v(x,t;x',t') = -2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')\,g(t)\,g(t')} \sum_0^\infty \frac{y_n(x')\,y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du},$$

so lange $x_2 < x < x_1$, dagegen verschwindet die Summe links für ein x, welches ausserhalb dieses Intervalles $(x_2 \ldots x_1)$, aber im Intervall $(0, a)$ liegt. Ebenso findet man für $t < t'$ $x_1 < x < x_2$

$$\text{(38b)} \quad v(x,t;x',t') = 2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')\,g(t)\,g(t')} \sum_0^\infty \frac{y_n(x')\,y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du},$$

dagegen wieder Null für die Summe rechts, wenn x ausserhalb des Intervalles (x_1, x_2) liegt.

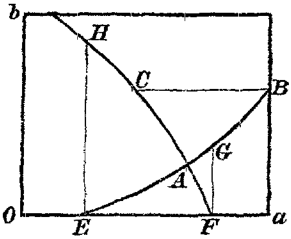

Fig. 5.

Die nämlichen Ueberlegungen kann man an Formel (36) knüpfen.

Um die erlangten Resultate deutlich zu übersehen, stellen wir die Formel und ihr Giltigkeitsgebiet zusammen.

Sei in Fig. 5 A der Punkt (x, t), dann ist

$$\text{(39)} \quad 2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')\,g(t)\,g(t')} \sum_0^\infty \frac{y_n(x')\,y_n(x)\,\eta(t,t',\lambda_n)}{\int_0^a h(u)\,y_n^2(u)\,du}$$

$$\begin{aligned} &= \quad v(xt;\,x't') \text{ im Gebiete } ABC \\ &= -v(xt;\,x't') \text{ im Gebiete } AEF \\ &= \quad 0 \text{ in den Gebieten } AFG,\ AEH. \end{aligned}$$

Ferner

$$\text{(40)} \quad 2\sqrt[4]{h(x)\,h(x')\,g(t)\,g(t')} \sum_0^\infty \frac{\eta_n(t')\,\eta_n(t)\,y(x,x',\mu_n)}{\int_0^b g(u)\,\eta_n^2(u)\,du}$$

$$\begin{aligned} &= \quad v(xt;\,x't') \text{ im Gebiet } AFG \\ &= -v(xt;\,x't') \text{ im Gebiet } AEH \\ &= \quad 0 \text{ in den Gebieten } ABC,\ AEF, \end{aligned}$$

wo EAB und FAC die beiden durch A gehenden Charakteristiken η, resp. ξ sind. Denkt man sich $v(xt;\, x't')$ durch die Reihe (12) ermittelt, so kann man diese Formeln auch als Summation der Reihen links in (39) und (40) auffassen.

Wenn nun die Functionen $g(t)$, $h(x)$ die angeführte Beschaffenheit für beliebiges a und b haben, und ferner die Vertauschung von Integration und Differentiation in (37) für jedes Gebiet zulässig ist, welches von einem Rechteck begrenzt ist, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, dann kann man auch innerhalb eines vorgegebenen endlichen Gebietes für die beiden Punkte (x, t), (x', t') die Function v mit Hilfe der Reihen (39) und (40) darstellen.

Man schliesse nämlich zunächst das gegebene Gebiet in ein von Charakteristiken begrenztes Viereck $ABCD$ ein (Fig. 6). Zieht man durch A die Parallelen zu den Coordinatenaxen, so schneiden diese die beiden Charakteristiken durch C resp. in den Punkten A_1, A_2, A_1', A_2'. Verfährt man nun ebenso mit B, C, D, so erhält man im Ganzen 16 Punkte.

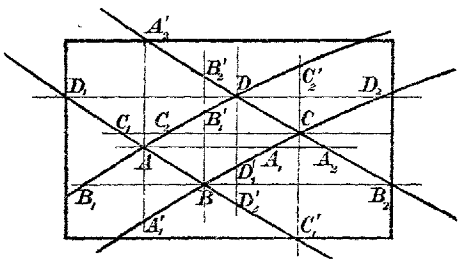

Fig 6.

Dasjenige Rechteck $OLMN$ nun, welches alle diese Punkte im Innern oder auf der Grenze enthält, kann dann als Bereich zu Grunde gelegt werden für die Entwicklung nach Normalfunctionen, und man erkennt unmittelbar aus der Figur, dass dann, wenn $x, t;\, x', t'$ innerhalb des Charakteristikenvierecks $ABCD$ liegt, immer eine der Formeln (39) oder (40) die Berechnung von $v(xt, x't')$ gestattet, da der Bereich, innerhalb dessen unter diesen Umständen $v(xt, x't')$ dargestellt wird, immer über $ABCD$ hinausgreift.

§ 8.

Nähere Ausführung für die Differentialgleichung der schwingenden Saite.

Die im Vorigen für gewisse Gebiete ermittelten Beziehungen zwischen der Function v und nach Normalfunctionen fortschreitenden Reihen lassen sich noch etwas weiter ausführen für die bereits öfter herangezogene Aufgabe der Integration der Differentialgleichung der schwingenden Saite von variabler Dichte und endlicher Länge l.

In diesem Fall hat man, wie früher bemerkt, die Dichte als gerade periodische Function von der Periode $2l$ fortzusetzen, während Anfangslage und Geschwindigkeit durch ungerade Functionen von der nämlichen Periode gegeben sind. In unserer Differentialgleichung wird

$g(t) = 1$ und man sieht sogleich, dass die im vorigen Paragraphen mit $y_n(x)$ bezeichneten Functionen selbst ungerade periodisch mit der Periode $2l$ werden.

Die im Vorigen mit $\eta(t, t', \lambda_n)$ bezeichnete Function wird hier

$$\eta(t, t', \lambda_n) = \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Die Gleichung (37) nimmt daher die Gestalt an

$$(41) \qquad \frac{1}{2} h(x)^{-\frac{1}{4}} \int_{x_1}^{x_2} dx' \frac{\psi(x')\, v(x, t;\, x';\, t')}{\sqrt[4]{h^3(x')}}$$

$$= \int_0^l dx'\, \psi(x') \sum_0^\infty \frac{y_n(x)\, y_n(x')\, h(x')}{\int_0^l h(u)\, y_n^2(u)\, du} \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Bei der nunmehr vorausgesetzten Beschaffenheit von $h(x')$, $\psi(x')$ kann man aber jetzt nicht mehr die Coefficienten der willkürlichen Function auf beiden Seiten ohne Weiteres vergleichen, wenn das Intervall $x_1 \ldots x_2$ ganz oder theilweise über das Intervall $0 \ldots l$ hinausgreift. Eine willkürliche Annahme über $\psi(x')$ an einer Stelle des Intervalles bestimmt nämlich jetzt bereits auch die Werthe an den Stellen

$$z_{2k} = x' + 2kl$$

und an den Stellen

$$(2k + 1)\, l - x = z_{2k+1}$$

innerhalb des Intervalls, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, und zwar ist

$$\psi(z_{2k}) = \psi(x'), \quad \psi(z_{2k+1}) = -\psi(x').$$

Zieht man nun durch den Punkt x', t' eine Parallele zur Abscissenaxe, so schneidet diese die Charakteristiken durch x, t in den Punkten x_1, x_2 und man hat alle Punkte z_{2k} auf dieser Strecke positiv, alle Punkte z_{2k+1} dagegen negativ in Rechnung zu ziehen, wenn $x_1 < x_2$ also $t > t'$ ist. Ist $t < t'$, so hat man die Zeichen entgegengesetzt zu nehmen. Man erhält so für $t > t'$

$$(42) \quad \frac{1}{2} h(x)^{-\frac{1}{4}} \Big(\sum v(x, t;\, z_{2k}, t')\, h^{\frac{3}{4}}(z_{2k}) - \sum v(x, t;\, z_{2k+1} t')\, h^{\frac{3}{4}}(z_{2k+1}) \Big)$$

$$= \sum_0^\infty \frac{y_n(x)\, y_n(x')\, h(x')}{\int_0^n h(u)\, y_n^2(u)\, du} \frac{\sin \lambda_n (t - t')}{\lambda_n}.$$

Dabei ist die erste Summe über alle z_{2k}, die zweite über alle z_{2k+1} des Intervalles $x_1 x_2$ zu erstrecken. Die Summe links ist Null, wenn kein

Punkt z_{2k} oder z_{2k+1} im Intervall x_1, x_2 liegt. Für $t < t'$ ist die linke Seite negativ zu nehmen. Um den Sachverhalt völlig klar zu stellen, sind in der untenstehenden Figur 7 diejenigen Gebiete für x', t' bezeichnet, in denen die Summe rechts in (42) durch die nämliche Formel links dargestellt wird, wenn sowohl x als x' auf das Intervall $0 \ldots l$ beschränkt werden, und A den Punkt x, t bezeichnet. Diese Gebiete sind von Charakteristikencurven begrenzt und die eingesetzte

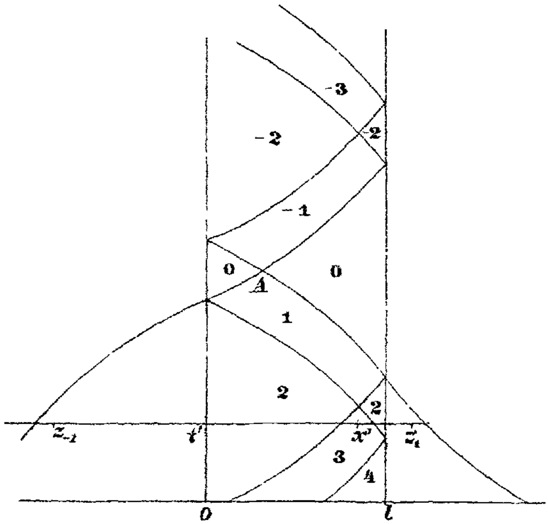

Fig. 7.

Zahl giebt an, wie viele Glieder insgesammt links in (42) auftreten. In dem mit $+1$ bezeichneten Bereich liefert nach Absonderung des Factors $h(x')$ die Summe rechts in (42) den positiven, in dem mit -1 bezeichneten Bereich den negativen Werth von $\frac{1}{2}\sqrt[4]{h(x)\,h(x')}\;v(x,t;\,x't')$, in den mit 0 bezeichneten Feldern verschwindet sie. Ausserdem sind noch für einen Punkt x', t' die Punkte z_{2k}, z_{2k+1} eingezeichnet, wobei x' selbst als z_0 zu bezeichnen wäre. Man bestätigt dieses Verhalten durch directe Summation, wenn $h(x) = 1$ ist, weil dann die Summe rechts in (42) wird

$$\frac{1}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l}\sin\frac{n\pi(t-t')}{l}}{n}$$

und in den ungeraden Feldern verschwindet, in den geraden abwechselnd die Werthe $\pm\frac{1}{2}$ annimmt.

§ 9.

Ueber die Schwingungen einer unendlich langen Saite von variabler Dichte.

Die vorigen Entwicklungen zeigen merkwürdige Beziehungen zwischen der Function v und den Normalfunctionen passend gewählter Gebiete, und diese letzteren können unter Umständen, die am Ende des § 7 besprochen sind, beliebig gross sein, wenn sie nur endlich sind. Es wäre nun zu erwarten, dass bei Ausdehnung der Gebiete in's Unendliche ebenso wie bei der Fourier'schen Reihe brauchbare Integraldarstellungen aus den Reihen hervorgehen. Allein der Durchführung dieser Grenzübergänge stellen sich mannigfache Schwierigkeiten entgegen, von denen wir die wesentlichste nun erörtern wollen, da das Resultat auch an und für sich ein gewisses Interesse hat.

Soll aus der Reihe beim Grenzübergang ein brauchbares Integral werden, so müssen die λ_n die ganze Strecke von 0 bis ∞ immer dichter und dichter erfüllen je grösser l wird, und zwar so, dass in jedem Theil dieses Gebietes bei genügend grossen l beliebig viele λ liegen. Dies ist aber im Allgemeinen durchaus nicht der Fall, sondern bei beständiger Ausdehnung des Gebietes l werden im Allgemeinen die λ_n nur gewisse nicht zusammenhängende Gebiete immer dichter erfüllen, und diese getrennten Gebiete sind in unendlicher Anzahl vorhanden. Nur unter ganz speciellen Bedingungen schliessen sich diese getrennte Gebiete zu einem zusammen. In der Ausdrucksweise der Optik würde also die Schwingung einer unendlich langen Saite im Allgemeinen einen Bandenspectrum entsprechen. Um diese Behauptungen näher zu begründen, betrachten wir eine nach beiden Seiten unbegrenzte Saite von variabler Dichte, deren Dichtigkeitsgesetz eine gerade periodische Function der Abscisse mit der Periode $2l$ ist.

Die Differentialgleichung für die Normalfunctionen wird dann

$$y'' + \lambda^2 h(x) \cdot y = 0. \tag{43}$$

Sei nun $y_1(x, \lambda)$ dasjenige Integral der Differentialgleichung, welches für $x = 0$ verschwindet, während die erste Derivirte den Werth 1 annimmt, $y_2(x, \lambda)$ dagegen dasjenige Integral, welches für $x = 0$ den Werth 1 annimmt und dessen Derivirte verschwindet. Es ist dann y_1 eine ungerade Function von x, y_2 aber eine gerade Function. Ferner ist

$$y_2(x, \lambda)\, y_1'(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)\, y_2'(x, \lambda) = 1$$

für jedes x.

Sind y_1 und y_2 von 0 bis l bekannt, so lassen sich aus diesen Werthen diejenigen für ein beliebiges x zusammensetzen.

Ist nämlich $Y(x, \lambda)$ irgend ein Integral von (43), so ist auch

$Y(x+2l, \lambda)$ ein solches, und beide sind dann nothwendig durch y_1 und y_2 homogen und linear darstellbar. Setzt man daher

$$Y(x, \lambda) = \alpha y_1(x, \lambda) + \beta y_2(x, \lambda),$$

so bestehen 2 Gleichungen von der Form

$$\text{(44)} \quad \begin{aligned} \alpha y_1(x+2l, \lambda) + \beta y_2(x+2l, \lambda) &= \alpha' y_1(x, \lambda) + \beta' y_2(x, \lambda), \\ \alpha y_1'(x+2l, \lambda) + \beta y_2'(x+2l, \lambda) &= \alpha' y_1'(x, \lambda) + \beta' y_2'(x, \lambda). \end{aligned}$$

Wir wollen nun α und β so bestimmen, dass $\alpha' = \varrho\alpha$, $\beta' = \varrho\beta$ wird, also

$$Y(x+2l, \lambda) = \varrho Y(x, \lambda).$$

Setzen wir in (44) die angenommenen Werthe für α', β' ein und dann $x = -l$, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass y_1, y_2' ungerade Functionen, y_2, y_1' gerade Functionen von x sind:

$$\begin{aligned} \alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda) &= \varrho\big(-\alpha y_1(l, \lambda) + \beta y_2(l, \lambda)\big), \\ \alpha y_1'(l, \lambda) + \beta y_2'(l, \lambda) &= \varrho\big(\quad \alpha y_1'(l, \lambda) - \beta y_2'(l, \lambda)\big) \end{aligned}$$

und hieraus zur Bestimmung von ϱ, α, β die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha(1+\varrho)\, y_1(l, \lambda) + \beta(1-\varrho)\, y_2(l, \lambda) &= 0, \\ \alpha(1-\varrho)\, y_1'(l, \lambda) + \beta(1+\varrho)\, y_2'(l, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen möglich sein, so hat man mit Rücksicht auf den Werth von $y_2 y_1' - y_1 y_2' = 1$

$$\text{(45)} \quad \begin{vmatrix} (1+\varrho)\, y_1(l, \lambda) & (1-\varrho)\, y_2(l, \lambda) \\ (1-\varrho)\, y_1'(l, \lambda) & (1+\varrho)\, y_2'(l, \lambda) \end{vmatrix} = \varrho^2 - 2\varrho[y_1(l, \lambda)\, y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda)\, y_2(l, \lambda)] + 1 = 0.$$

Man erhält also zwei Werthe von ϱ

$$\left.\begin{matrix}\varrho_1 \\ \varrho_2\end{matrix}\right\} = y_1(l, \lambda)\, y_2'(l, \lambda) + y_1'(l, \lambda)\, y_2(l, \lambda) \pm 2\sqrt{y_1(l, \lambda)\; y_1'(l, \lambda)\; y_2(l, \lambda)\; y_2'(l, \lambda)},$$

wo der Ausdruck unter der Quadratwurzel wieder mit Hilfe von

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = 1$$

umgeformt ist. Ferner ist $\varrho_1 \varrho_2 = 1$.

Den beiden Werthen von ϱ_1, ϱ_2 entsprechen dann zwei particuläre Integrale $Y_1(x, \lambda)$, $Y_2(x, \lambda)$, für welche die Gleichungen bestehen

$$\text{(46)} \quad \begin{aligned} Y_1(x+2kl, \lambda) &= \varrho_1^k\, Y_1(x, \lambda), \\ Y_2(x+2kl, \lambda) &= \varrho_2^k\, Y_2(x, \lambda), \end{aligned}$$

wo k irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Aus den Integralen Y_1 und Y_2 können wir aber wieder alle andern linear zusammensetzen.

Soll nun

$$a\,Y_1(x, \lambda) + b\,Y_2(x, l)$$

eine Normalfunction des Stückes der Saite sein, welches sich von $-kl$ bis $+kl$ erstreckt, so müssen die Gleichungen bestehen

$$a\,Y_1(-kl, \lambda) + b\,Y_2(-kl, \lambda) = 0,$$
$$a\,Y_1(\;\;kl, \lambda) + b\,Y_2(\;\;kl, \lambda) = 0,$$

und in Folge der Gleichungen (46) nimmt die zweite die Form an

$$a\,\varrho_1^k\,Y_1(-kl, \lambda) + b\,\varrho_2^k\,Y_2(-kl, \lambda) = 0.$$

Da nun $a\,Y_1$ und $b\,Y_2$ nicht gleichzeitig Null sein können, so folgt hieraus $\varrho_1^k = \varrho_2^k$ oder wegen $\varrho_1\varrho_2 = 1$

$$\varrho_1^{2k} = \varrho_2^{2k} = 1. \tag{47}$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 folgt hiermit:

Es können, wie immer die ganze Zahl k gewählt werden mag, nur solche Werthe λ auftreten, für welche das Product

$$y_1(l, \lambda)\,y_2(l, \lambda)\,y_1'(l, \lambda)\,y_2'(l, \lambda)$$

einen negativen Werth annimmt oder verschwindet.

Diejenigen Werthe von λ, welche das obige Product zu Null machen, scheiden daher, wenn sie einfache Wurzeln desselben sind, das Gebiet der Variablen λ in Theile, in welchen abwechselnd zu Normalfunctionen gehörige λ enthalten sein können oder nicht.

Es ist aber leicht zu sehen, dass in der Nähe solcher λ Werthe, für welche das obige Product negativ wird in der That sich immer mehr und mehr λ, welche zu Normalfunctionen gehören, finden müssen. Da nämlich ein complexes ϱ_1 dem absoluten Betrag nach immer gleich Eins ist, so giebt es in jeder Nähe von ϱ_1 Einheitswurzeln, und da ϱ_1 eine stetige Function von λ ist, so wird ϱ_1 in einem Intervall für λ, wo es complex ist, auch beliebig oft einer Einheitswurzel gleich.

Hat dagegen die Gleichung

$$y_1(l, \lambda)\,y_2(l, \lambda)\,y_1'(l, \lambda)\,y_2'(l, \lambda) = 0$$

lauter Doppelwurzeln, wie es für $h(x) = \text{const.}$ der Fall ist, so hat das Product links überall das nämliche Zeichen, und zwar im allgemeinen das negative. Die früher getrennten Intervalle für λ schliessen sich nun lückenlos aneinander, das Bandenspectrum wird zum continuirlichen Spectrum.