Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von

Julius König in Budapest.

Die Frage, wie die Galois'sche Theorie zur Untersuchung einer (durch ihre Coefficienten) wirklich gegebenen Gleichung benutzt werden kann, ist bisher, so viel ich weiss, nicht behandelt worden. In § 1. der vorliegenden Arbeit gebe ich eine Methode an, nach welcher der wichtigste Punkt dieser Untersuchung, die Aufstellung aller verschiedener Gattungen von Resolventen immer erledigt werden kann. Hierauf gestüzt, kann in § 2. ein allgemeines Kriterium dafür angegeben werden, ob eine vorgelegte Gleichung „theilweise" oder „vollständig" algebraisch lösbar ist, zugleich mit einer Methode, die diese algebraische Lösung nach einem völlig bestimmten Algorithmus liefert, der allerdings durch ihre Langwierigkeit beinahe undurchführbare Rechnungen verlangt.

Dass die angewandten Methoden auch in andern algebraischen Fragen gut verwerthet werden können, zeigt § 3., wo eine Reihe von Sätzen behandelt wird, die sich auf Gruppen beziehen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist. Insbesondere wird der Gang der Auflösung für Gleichungen mit solcher Gruppe präcisirt.

Im Zusammenhange hiermit steht die Theorie einer Classe algebraisch lösbarer Gleichungen, welche die Abel'schen Gleichungen als speciellen Fall enthält, und die am kürzesten dadurch charakterisirt wird, dass die Reihenfolge der zur Auflösung nothwendigen irrationalen Operationen beliebig vertauscht werden kann.

§ 1.

Die Resolventen einer gegebenen Gleichung.

Jedes algebraische Problem ist als erledigt zu betrachten, wenn es gelingt, dasselbe auf die beiden elementaren Fundamentalaufgaben zurückzuführen.

1. Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben.

2. Bestimmung der irreductibeln Factoren einer ganzen Function in Bezug auf einen beliebigen Rationalitätsbereich*).

Diese zweite Aufgabe kann noch, wie hinzugefügt werden mag, dem Wesen nach darauf zurückgeführt werden, die ganzzahligen Wurzeln einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten (im natürlichen Rationalitätsbereiche) zu bestimmen.

Man kann demnach mit Hülfe elementarer Algorithmen von der Gleichung $f(x)=0$ zu ihrer Galois'schen Resolvente $F(V)=0$ übergehen und so vor allem die Ordnung der Gleichung $f(x)=0$ bestimmen; denn hierzu bedarf es nur der Bildung einer Gleichung vom Grade $n!$, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln von $f(x)=0$, und sodann der Aussonderung eines beliebigen irreductibeln Factors der letzteren.

Die Untersuchung einer beliebigen Gleichung kann demnach immer zurückgeführt werden auf diejenige einer Gleichung $F(V)=0$, in der jede Wurzel rationale Function einer beliebigen Wurzel ist, oder — was dasselbe ist — für welche Grad und Ordnung (N) übereinstimmen. Diese Gleichungen sollen im Anschluss an die von Klein eingeführten Anschauungsweisen kurz als *reguläre Gleichungen* bezeichnet werden.

Diese regulären Gleichungen haben die charakteristische Eigenschaft, dass die rationalen Functionen ihrer Wurzeln nur *uneigentliche Gattungen* (nach Kronecker) bilden, d. h. dass jede derselben, wenn ihre Adjunction die Gruppe der Gleichung erniedrigt, das Gleichungspolynom $F(V)$ in Factoren zerlegt. Sei ψ eine solche Function, deren Adjunction aus $F(V)$ den Factor $F_1(V)$ aussondert, und

$$V_1,\ V_2,\cdots,\ V_\varkappa,$$

die der Gleichung $F_1(V)=0$ entsprechenden Wurzeln, so gehören, wie man leicht sieht, ψ und die allgemeinste symmetrische Function der Grössen $V_1,\cdots,V_\varkappa$

$$S=(V_1-\mu)(V_2-\mu)\cdots(V_\varkappa-\mu),$$

(wo μ so zu wählen, dass die $\binom{N}{\varkappa}$ Werthe, welche durch sämmtliche Vertauschungen der V erzeugt werden, auch sämmtlich von einander verschieden sind) zur selben Gattung.

Die verschiedenen Gattungen von Resolventen der Gleichung $F(V)=0$ werden daher durch die den verschiedenen Functionen $S_\varkappa$ entsprechenden Gleichungen erschöpft, wobei natürlich in den S

*) S. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. § 4.

nicht nur die Zahl der eintretenden Wurzeln, sondern auch diese Wurzeln selbst beliebig gewählt werden können*).

Soll demgemäss die Frage entschieden werden, ob die Gleichungen $f(x)=0$ und $F(V)=0$ eine Resolvente r^{ten} Grades besitzen, so wird man nur zu berücksichtigen haben, dass, wenn eine solche existirt, die Adjunction einer ihrer Wurzeln einen Factor vom Grade $\frac{N}{r}=\varkappa$ aus $F(V)$ aussondert. Bilden wir daher die Gleichung $\binom{N}{\varkappa}$-ten Grades für $S_\varkappa$, so muss eine der Wurzeln dieser Gleichung, d. h. eine der durch Vertauschung der V aus $S_\varkappa$ entstehenden Functionen, mit einer Wurzel der Resolvente zur selben Gattung gehören, also mit andern Worten, das Polynom der Gleichung für $S_\varkappa$ einen irreductibeln Factor r^{ten} Grades enthalten. Ist ein solcher vorhanden, so giebt derselbe gleich Null gesetzt, die Resolvente selbst. Sind mehrere Typen von Resolventen r^{ten} Grades vorhanden, so wird das entsprechende Gleichungspolynom mehrere irreductible Factoren gleichen Grades enthalten.

Um zu entscheiden ob die beliebige Gleichung $f(x)=0$ eine (irreductible) Resolvente r^{ten} Grades besitzt, hat man zuerst die Gleichung $F(V)=0$ vom Grade N (die Galois'sche Resolvente) zu bilden, gehe dann zur Gleichung für

$$S_\varkappa=(V_1-\mu)(V_2-\mu)\cdots(V_\varkappa-\mu),\qquad \varkappa=\frac{N}{r}$$

über, die vom Grade $\binom{N}{\varkappa}$ ist, und deren Coefficienten symmetrische Functionen der V sind. Ist diese Gleichung

$$\Phi_\varkappa=0,$$

so wird die Gleichung $f(x)=0$ dann und nur dann (irreductible) Resolventen r^{ten} Grades besitzen, wenn sich aus $\Phi_\varkappa$ ein irreductibler Factor r^{ten} Grades aussondern lässt. Diese Factoren, gleich Null gesetzt, geben alle verschiedenen Gattungen der Resolventen r^{ten} Grades.

Die Frage kann daher in jedem Fall mit Hülfe eines vollständig durchführbaren Rechnungsalgorithmus gelöst werden. Es möge nur noch bemerkt werden, dass dieselben Algorithmen darüber entscheiden, ob die so erhaltenen Resolventen holoedrisch oder meriedrisch sind, da hierzu wieder nur die Bestimmung ihrer Ordnungszahl nothwendig, die im ersten Fall gleich N, im zweiten Fall gleich einem Theiler von N sein wird.

---

*) S. meine Abhandlung „Ueber Factorenzerlegung ganzer Functionen etc." Diese Annalen Bd. XV.

§ 2.

Allgemeine Kriterien der algebraischen Lösbarkeit.

Um zu entscheiden, ob die Gleichung $f(x) = 0$ algebraisch lösbar ist, werden wir vor allem wieder zur entsprechenden regulären Gleichung

$$F(V) = 0$$

übergehen, deren Grad und Ordnung (in Primzahlfactoren zerlegt) gleich

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

sei. Soll nun die Gleichung algebraisch lösbar sein, so muss die Auflösung mit Hülfe einer Abel'schen Gleichung vom Grade $p_1, p_2, \cdots$ oder p_t beginnen, und diese Gleichung ist eine Resolvente von $F(V) = 0$, die $F(V)$ in Factoren vom Grade $\frac{N}{p_1}, \frac{N}{p_2}, \cdots$, oder $\frac{N}{p_t}$ zerlegt. Ob nun eine solche Resolvente existirt, wird durch die Bildung der Gleichungen

$$\Phi_{\frac{N}{p_1}} = 0, \cdots, \Phi_{\frac{N}{p_t}} = 0$$

entschieden, und man erhält für die algebraische Lösbarkeit von $F(V) = 0$ die Bedingung, dass wenigstens eine dieser Gleichungen

$$\Phi_{\frac{N}{p_i}} = 0$$

einen irreductibeln Factor p_i^{ten} Grades enthalten muss. Soll die so erhaltene Resolvente $F(V)$ in der That algebraisch in Factoren zerfallen, so muss der entsprechende Factor von $F(V)$ zugleich auch von der Ordnung p_i sein.

Wir haben in dieser Weise die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür erhalten, dass $F(V)$ durch Adjunction von Wurzelgrössen in Factoren vom Grade $\frac{N}{p}$ (p Primzahl) zerfällt werden könne. Ist diess der Fall, so wird man diese Untersuchung an einem der so erhaltenen Factoren wiederholen, und diess genügt, da die einzelnen Factoren isomorph sind.

Man sieht unmittelbar ein, dass, wenn es durch eine Kette aufeinanderfolgender Abel'scher Gleichungen gelingt einen Factor vom Grade $\frac{N}{p_1^{\alpha_1'} \cdots p^{\alpha_t'}}$ abzusondern, die Coefficienten desselben $\frac{N}{v}$-deutige Functionen sind, und wenn man demnach diese Coefficienten mit den entsprechenden Werthen vertauscht, man alle Factoren erhält, deren Product wieder $F(V)$ giebt.

Auf diese Weise gelangt man dazu die Reduction der Gleichungen

$f(x) = 0$ oder $F(V) = 0$ so weit zu führen, als diess überhaupt durch Adjunction von Wurzelgrössen möglich ist, und gelangt schliesslich dazu, wenn die Gleichung algebraisch lösbar ist, nicht nur diess zu erkennen, sondern auch die Lösung zu bewerkstelligen. Man erhält nämlich für V einen N-deutigen Ausdruck, aus welchem dann auch die Werthe von x rational berechnet werden.

So langwierig auch die Anwendung dieses Verfahrens für eine gegebene Gleichung erscheinen mag, so besitzt das angegebene Kriterium doch einen principiellen Werth, indem es die erste allgemeine Methode angiebt, um die algebraische Lösbarkeit einer Gleichung zu untersuchen, und wenn diess möglich, die Wurzeln in algebraischer Form darzustellen. Ob ein Kriterium der algebraischen Lösbarkeit in wesentlich anderer Form*) (die obigen Resultate können in mannigfaltiger Weise ausgedrückt werden) für Gleichungen von *beliebigem* Grade aufgestellt werden kann, scheint überhaupt sehr fraglich. Dass jene Formen für die Bedingung der algebraischen Lösbarkeit, wie sie Abel und Galois für Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist, aufgestellt haben, so einfach sind, findet seinen Grund in Verhältnissen, die bei zusammengesetzter Gradzahl wegfallen. In jenem einfacheren Falle ist nämlich erstens nicht blos Charakter, sondern auch die *Reihenfolge* der erforderlichen Radicirungen von vorneherein festgelegt, und es genügt zweitens schon die Kenntniss der Ordnungszahl allein, ohne weiter auf die Structur der Gruppe einzugehen, um über die algebraische Lösbarkeit der Gruppe zu entscheiden. Weder das eine, noch das andere ist der Fall, sobald der Grad der vorgelegten Gleichung ein beliebiger ist.

§ 3.

Ueber irreductible Factoren, deren Grad eine Primzahlpotenz ist.

Die in § 1. angegebene Methode liefert sehr einfache und directe Beweise für jene algebraische Sätze, welche aus dem Cauchy'schen Fundamentaltheorem über Substitutionsgruppen und den von Sylow gegebenen Verallgemeinerungen desselben folgen. Diese Sätze selbst ergeben sich hierdurch auf einem neuen Wege, da man immer eine Gleichung aufstellen kann, welche die beliebig angegebene Gruppe G besitzt.

Ist $F(V) = 0$ *eine (irreductible) reguläre Gleichung vom Grade* $N = p^\alpha Q$, *wo* p *eine Primzahl und* Q *nicht mehr durch* p *theilbar, so kann* $F(V)$ *durch Adjunction einer Grösse* φ *in Factoren vom Grade* p^α *zerfällt werden, wo* φ *selbst Wurzel einer irreductibeln Gleichung*

*) Insbesondere in Form *algebraischer* Relationen zwischen den Wurzeln.

Q-ten Grades ist, deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung.

Um unabhängig von der Gruppe der Gleichung einen Factor p^{α} ten Grades zu bestimmen, hat man eine Gleichung vom Grade

$$\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha} = \frac{p^\alpha Q (p^\alpha Q - 1) \cdots (p^\alpha Q - r) \cdots (p^\alpha Q - p^\alpha + 1)}{p^\alpha \ (p^\alpha - 1) \ (p^\alpha - r) \cdots (p^\alpha - p^\alpha + 1)}$$

zu bilden, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln von $F(V) = 0$ sind. Man sieht, dass die Gradzahl dieser Gleichung nicht durch p theilbar ist, denn $p^\alpha Q - r$ und $p^\alpha - r$ sind immer durch dieselbe Potenz von p theilbar. Die so erhaltene Gleichung kann noch reductibel sein; ihre irreductibeln Factoren seien vom Grade $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_m$. Dann ist

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m = \binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}.$$

Keine der Zahlen $\varkappa$ kann gleich 1 sein, da sonst $F(V)$ reductibel wäre. Zugleich muss wenigstens eine der Zahlen $\varkappa$, z. B. $\varkappa_1$ durch p nicht theilbar sein; denn wären alle Zahlen $\varkappa$ durch p theilbar, so müsste es auch $\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}$ sein.

Die Gleichung $F(V) = 0$ hat demnach eine irreductible Resolvente $\varkappa_1$-ten Grades. Sei eine der Wurzeln derselben φ_1. Dann zerlegt die Adjunction von φ_1 das Polynom $F(V)$ in irreductible Factoren vom Grade $p^\alpha \frac{Q}{\varkappa_1}$, wo $\frac{Q}{\varkappa_1}$ eine ganze Zahl sein muss, da p^α und $\varkappa_1$ relativ prim sind.

Es kann demnach $\varkappa_1$ nicht grösser sein als Q; ebensowenig kann aber $\varkappa_1$ kleiner sein als Q; denn die Adjunction von φ müsste dann irreductible Factoren vom Grade $p^\alpha \frac{Q}{\varkappa_1} > p^\alpha$ ergeben, im Widerspruche damit, dass nach Einbeziehung von φ in den Rationalitätsbereich jedenfalls ein rationaler Factor p^{α} ten Grades sich aussondert.

Den Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_Q$ der so erhaltenen Resolvente Q^{ten} Grades entsprechen in der Gruppe der Gleichung enthaltene Untergruppen p^{α} ter Ordnung, die sämmtlich durch Transformation auseinander entstehen, und von denen man ferner nachweisen kann, dass *jede in der Gleichungsgruppe enthaltene Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist, in einer jener Gruppen enthalten sein muss.* Ist nämlich P eine Gruppe von der Ordnung $p^{\alpha'}$ und ψ eine Function, die nur für die Substitutionen dieser Gruppe ungeändert bleibt, so wird $F(V)$ durch Adjunction von ψ in Factoren zerfällt, deren Grad und Ordnung $p^{\alpha'}$. In dem so erhaltenen Rationalitätsbereich ist also auch die Ordnung von $F(V) = 0$ eine Potenz von p. Demgemäss muss auch die Resolvente Q^{ten} Grades in Factoren zerfallen, deren Grad eine Potenz von p ist. Sind demnach die einzelnen Factoren vom Grade $p^{a_1}, p^{a_2}, \cdots$, so hat man

$$Q = p^{a_1} + p^{a_2} + \cdots.$$

Da aber Q nicht durch p theilbar, ist diess nur so möglich, dass einer der Exponenten a gleich Null wird, d. h. *die Adjunction von ψ bestimmt wenigstens eine Wurzel der Resolvente Q^{ten} Grades in rationaler Weise*, was mit dem obigen übereinstimmt.

Ohne in das Detail dieser Sätze weiter einzugehen, sei hier nur noch der folgende erwähnt:

Jede (irreductible) Gleichung, deren Grad und Ordnung Potenz derselben Primzahl p ist, wird durch Auflösung einer Abel'schen Gleichung vom Grade p, in p Factoren gleichen Grades zerfällt. Dass diese Gleichungen algebraisch lösbar sind, hat Herr Sylow bewiesen; der zu beweisende Satz präcisirt den Gang der Auflösung.

Sei Grad der Gleichung $p^\varkappa$, um hieraus einen Factor $p^{\varkappa-1\,\text{ten}}$ Grades auszusondern, hat man für $S_{p^{\varkappa-1}}$ eine Gleichung zu bilden, deren Coefficienten symmetrische Functionen und deren Gradzahl

$$\binom{p^\varkappa}{p^{\varkappa-1}} = \frac{p^\varkappa(p^\varkappa-1)\cdots(p^\varkappa-p^{\varkappa-1}+1)}{p^{\varkappa-1}(p^{\varkappa-1}-1)\cdots(p^{\varkappa-1}-p^{\varkappa-1}+1)}$$

von der Form pQ ist, wo p und Q relativ prim sind. Da aber auch die Ordnung der vorgelegten Gleichung gleich einer Potenz von p ist, muss die so gebildete Gleichung in mehrere Factoren zerfallen, deren Gradzahlen wieder Potenzen von p sind. Also, wenn die einzelnen Factoren vom Grade $p^{a_1}, p^{a_2}, \cdots$ sind, wird:

$$p^{a_1} + p^{a_2} + \cdots + p^{a_r} = pQ.$$

Hieraus folgt, dass nicht alle Exponenten > 1 sein können, sonst müsste pQ durch p^2 theilbar sein, was nicht der Fall ist. Es kann aber auch kein a gleich 0 sein. Sonst hätte die Gleichung für $S_{p^{\varkappa-1}}$ eine rational bekannte Wurzel, und die untersuchte Gleichung wäre nicht irreductibel. Demnach muss ein a gleich eins sein. Und man erhält für die Factorenzerlegung eine *irreductible Resolvente p^{ten} Grades*, von der es unmittelbar klar ist, dass *sie eine Abel'sche Gleichung, d. h. auch von der Ordnung p sein muss.* Denn ihre Ordnung muss einerseits eine Potenz von p, andererseits ein Theiler von $p!$ sein, was in der That die Zahl p bestimmt.

§ 4.

Ueber eine specielle Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen.

Ist $f(x) = 0$ eine algebraisch lösbare Gleichung, so kann der bei der Auflösung zu befolgende Gang schematisch durch eine Reihe von Primzahlen charakterisirt werden:

$$[p_1],\ [p_2],\ \cdots,\ [p_\varkappa].$$

Man hat nämlich zuerst eine Abel'sche Gleichung vom Grade p_1 zu bilden, deren Coefficienten dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören, dann adjungirt man eine Wurzel dieser Gleichung u_1. Hierauf ist wieder eine Abel'sche Gleichung vom Grade p_2 zu bilden, deren Coefficienten im Allgemeinen dem durch die Adjunction von u_1 erweiterten Rationalitätsbereiche angehören. (In speciellen Fällen braucht u_1 nicht in den Coefficienten aufzutreten). Hierauf adjungirt man wieder eine Wurzel dieser Gleichung u_2, und so fort, bis schliesslich nach Adjunction von $u_\varkappa$ alle Wurzeln der Gleichung rational ausdrückbar sind.

Neben der Berechnung rational bekannter Grössen sind daher $[p_1]$ u. s. w. die Elementaroperationen, die für die Auflösung von $f(x) = 0$ verlangt werden. *Im Allgemeinen ist hierbei die Reihenfolge der Operationen $[p]$ eine fest bestimmte.* Für gewisse Gleichungen können die Operationen $[p]$ in verschiedener Weise geordnet werden, wobei aber natürlich das Product der Primzahlen p constant bleibt.

Die einfachste Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen wird durch die Forderung bestimmt, die Operationen $[p]$ in völlig beliebiger Reihenfolge ausführen zu können. Die so erhaltene Klasse von Gleichungen ist die allgemeinste, für welche die Auflösung der Galois'schen Resolvente noch genau nach den von Gauss angegebenen Methoden erfolgen kann. Sie enthält alle Abel'schen Gleichungen, alle Gleichungen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist und viele andere.

Ist die Ordnung der Gleichung:

$$N = \pi_1^{\alpha_1} \pi^{\alpha_2} \cdots \pi_3^{\alpha_3},$$

so kann die Auflösung durch eine Kette von α_i Abel'schen Gleichungen π_i^{ten} Grades begonnen werden. Dementsprechend besitzt die Gruppe der Gleichung G eine Untergruppe G_i von der Ordnung $\dfrac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x) = 0$ in die angeführte Klasse gehöre, ist, dass ihre Gruppe G invariante) Untergruppen G_i von der Ordnung $\dfrac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ enthalte $(i = 1, 2, \cdots s)$.*

---

*) Der Ausdruck „invariant" statt „ausgezeichnet" ist nicht nur charakteristischer, sondern empfiehlt sich auch durch seine internationale Brauchbarkeit.

Dass diese Bedingung hinreichend ist, ist unmittelbar einzusehei denn der Gruppe G_i entspricht dann eine Resolvente $R_i = 0$ von d Ordnung $\pi_i^{\alpha_i}$; und die von einander unabhängige Auflösung der Gle chungen

$$R_1 = 0, \cdots, R_s = 0$$

löst die Gleichung $f(x) = 0$ vollständig, und gestattet eine beliebi Reihenfolge der Operationen $[\pi]$.

Andererseits ist die Bedingung auch nothwendig. Jedenfalls kar die Auflösung der Gleichung durch eine Kette von α_i Abel'sche Gleichungen π_i^{ten} Grades begonnen werden, und diese Kette von Gle chungen durch eine einzige Gleichung $R_i = 0$ von der Ordnur $\pi_i^{\alpha_i}$ ersetzt werden. Dann sind aber die Gleichungen

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad R_1 R_2 \cdots R_s = 0$$

vollständig äquivalent, und die Wurzeln der einen rational durch d der andern ausdrückbar. Demnach sind ihre Gruppen G und holoedrisch isomorph. Die Gruppe Γ besteht aber aus dem Produ von s Gruppen $\gamma_1 \cdots \gamma_s$ von der Ordnung $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$, deren je sich auf andere Elemente bezieht. Das Product von $s - 1$ derselbe ist also jedenfalls eine invariante Untergruppe von Γ, und die en sprechende Untergruppe in G muss dann dieselbe Eigenschaft besitze

Man bemerkt zugleich, dass $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ invariante Unte gruppen von Γ sind, und dass daher die entsprechenden Gruppe $g_1, \cdots, g_s$ in G, deren Ordnung $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$ dieselbe Eigenscha besitzen. Da aber sämmtliche Gruppen dieser Ordnungszahl dur Transformation auseinander entstehen, *so kann man die charakteristisc Eigenschaft der Gruppe G auch so aussprechen, dass sie nur je ei Untergruppe von der Ordnung* $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$ *enthält.*

Dass diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hi reichend ist, ersieht man leicht. Wenn nämlich $g_1 \cdots g_s$ invarian Untergruppen sind, so ist es auch das Product von $s - 1$ derselbe das, wie man aus dem isomorphen Producte der γ schliesst, eine Unte gruppe der Ordnung $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ ergiebt.

Aus der Beziehung zur Gruppe Γ folgt noch, dass *wenn d irge ein Theiler von N ist, die Gruppe G immer eine Untergruppe von d Ordnung d besitzt.*

Ist nun $F(V) = 0$ die der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen reguläre Gleichung, so zerlegt die Resolvente $R_i = 0$ das Polyno $F(V)$ in $\pi_i^{\alpha_i}$ Factoren, deren Grad und Ordnung $\frac{N}{\pi^{\alpha_i}}$; zugleich en scheiden wir, ob eine durch ihre Coefficienten gegebene Gleichung in die betrachtete Klasse gehört, indem wir mit Hülfe symmetrischer Functionen die Gleichungen für $S_{\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}}$ bilden und untersuchen, ob dieselben je einen irreductibeln Factor vom Grade und von der Ordnung $\pi_i^{\alpha_i}$ besitzen. $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

Ist diess der Fall, so lösen die Resolventen

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad \cdots, \quad R_s = 0$$

unsere Gleichung vollständig auf. Jede derselben zerlegt das Polynom $F(V)$ in $\pi_i^{\alpha_i}$ Factoren $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ ten Grades, so dass

$$F(V) = X_1^{(i)} X_2^{(i)} \cdots X_{\pi_i^{\alpha_i}}^{(i)}$$
$$(i = 1, \cdots, s)$$

wird.

Man erkennt dann leicht, dass die s Gleichungen

$$X_\alpha^{(1)} = 0, \quad X_\beta^{(2)} = 0, \quad \cdots, \quad X_\sigma^{(s)} = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \cdots, \sigma$ beliebige Indices sind, nicht mehr als eine Wurzel gemeinsam haben können; denn wenn jede dieser Gleichungen die Wurzeln V_1 und V_2 enthielte, so würde dies bedeuten, dass nach Adjunction jeder einzelnen Gleichung $R_i = 0$, also auch nach Adjunction aller dieser Gleichungen die Gruppe von $F(V) = 0$ eine Substitution enthält, die V_1 mit V_2 vertauscht. Daraus folgt aber, *dass jedes System von Gleichungen, wie*

$$X_\alpha^{(1)} = 0, \quad X_\beta^{(2)} = 0, \quad \cdots, \quad X_\sigma^{(s)} = 0,$$

eine Wurzel der Gleichung $F(V) = 0$, als einzige gemeinschaftliche Wurzel des ganzen Systems bestimmt, die dann nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers gefunden wird.

Da nämlich jede Wurzel von $F(V) = 0$ als gemeinschaftliche Wurzel eines solchen Systems auftreten muss, und jedes System nur eine solche Wurzel giebt, und schliesslich nur $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s} = N$ solcher Systeme aufgestellt werden können, muss jedes solche Gleichungssystem eine Wurzel eindeutig bestimmen.

Was schliesslich die Auflösung der Resolventen $R_i = 0$ betrifft, so geschieht dieselbe nach der am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode.
