Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.

(Aus einem Briefe an Herrn Hamburger[1].)

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Sie haben in Ihrer Arbeit: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Erste Mitteilung) [Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 240 bis 254] folgenden Satz bewiesen:

Es sei $G(s)$ eine ganze transzendente Funktion endlichen Geschlechts von $s = \sigma + ti$, $P(s)$ ein Polynom und $f(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$ für $\sigma > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe

(1) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

darstellbar. Ist dann

(2) $$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}},$$

wo $g(1-s)$ in eine für $\sigma < -\alpha < 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

(3) $$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$$

entwickelt werden kann, so ist $f(s) = a_1 \zeta(s)$.

Ich gebe hier einen Beweis, der wohl kürzer und einfacher als der Ihrige ist. Er benutzt nur die beiden bekannten Formeln

[1]) Herr Hamburger hat inzwischen in den Math. Ann. **85** den Inhalt eines in Hamburg am 5. Oktober 1921 gehaltenen Vortrages publiziert, in welchem er einen in wesentlichen Punkten mit dem hier veröffentlichten übereinstimmenden Beweis gegeben hat. Ich betone, daß Herr Hamburger von meinen Untersuchungen vor Empfang meines Briefes keine Kenntnis hatte. (Zusatz bei der Korrektur.)

$$(4) \qquad e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} y^{-s}\,\Gamma(s)\,ds \qquad (y > 0),$$

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-a^2 x - \frac{b^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2ab} \qquad (a > 0,\ b \geqq 0).$$

Die absolute Konvergenz von (1) braucht dabei nicht für $\sigma > 1$, sondern nur für $\sigma > 2 - \theta$ $(\theta > 0)$ vorausgesetzt zu werden.

Für jedes $x > 0$ ist nach (1) und (2)

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{s}{2}}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}} x^{-\frac{s}{2}}\,ds = S_2.$$

Hier ist links wegen der Beschränktheit von $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ für $\sigma = 2$ Vertauschung von Integration und Summation gestattet; nach (4) ist daher

$$(6) \qquad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} (\pi n^2 x)^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x}.$$

Aus den Voraussetzungen über $f(s)$ und (2) folgt die Existenz zweier Zahlen $T > 0$, $\gamma > 0$, so daß im Gebiet $-\alpha - 1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \geqq T$ die Funktion $g(1-s)$ regulär und $O(e^{|t|^\gamma})$ ist. Ferner ist sie wegen (3) auf der Geraden $\sigma = -\alpha - 1$ beschränkt; für $\sigma = 2$ ist sie $O(|t|^{\frac{3}{2}})$, wegen (1), (2) und der dort gültigen Relation

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = O(|t|^{\frac{3}{2}}).$$

Folglich gilt $g(1-s) = O(|t|^{\frac{3}{2}})$ für $|t| \geqq T$, $-\alpha - 1 \leqq \sigma \leqq 2$; und es ist

$$(7) \qquad S_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-1-\infty i}^{-\alpha-1+\infty i} g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}} x^{-\frac{s}{2}}\,ds + \sum_{\nu=1}^{m} R_\nu,$$

wo $R_1, \ldots, R_m$ die Residua des Integranden bei seinen im Gebiet $-\alpha - 1 < \sigma < 2$ gelegenen Polen $s_1, \ldots, s_m$ bedeutet. Aus (2) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{m} R_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-\frac{s_\nu}{2}} Q_\nu(\log x) = Q(x),$$

wo Q_ν ein Polynom in $\log x$ bedeutet, und

(8) $$\Re s_\nu \leqq 2 - \theta \qquad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Wegen (3) liefert (7)

(9) $$S_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+2-\infty i}^{\alpha+2+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{1-s}{2}} ds + Q(x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x).$$

Aus (6) und (9) folgt

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi n^2}{x}} + Q(x) \qquad (x > 0).$$

Diese Gleichung multipliziere ich für festes $t > 0$ mit $e^{-\pi t^2 x}$ und integriere nach x von 0 bis ∞; da die Reihe der Integrale über die absoluten Beträge der Glieder konvergiert, gliedweise Integration also erlaubt ist, so folgt nach (5)

(10) $$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\pi (t^2 + n^2)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t} e^{-2\pi n t} + \int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx.$$

Hierin darf das Integral auf der rechten Seite gliedweise ausgeführt werden, denn nach (8) ist in $Q(x)$ jeder Term $O(x^{-1+\frac{\theta}{4}})$ für $x \to 0$; es ist also

(11) $$\int_0^{\infty} Q(x) e^{-\pi t^2 x} dx = \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} Q\left(\frac{x}{t^2}\right) e^{-\pi x} dx = \sum_{\nu=1}^{m} t^{s_\nu - 2} H_\nu(\log t) = H(t),$$

wo H_ν ein Polynom in $\log t$ bedeutet.

(10) und (11) ergeben

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t+ni} + \frac{1}{t-ni}\right) - \pi t H(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2\pi n t}.$$

In (12) ist

1. die Reihe auf der linken Seite in jedem endlichen Gebiet der t-Ebene exkl. $t = \pm ki$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig konvergent; sie ist also die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion mit *Polen erster Ordnung in* $t = \pm ki$ *vom Residuum* a_k,

2. $H(t)$ eine in der von 0 nach $-\infty$ aufgeschnittenen t-Ebene eindeutige *für* $t \neq 0$ *reguläre Funktion von* t,

3. die rechte Seite für $\Re t > 0$ eine *periodische Funktion von* t *mit der Periode* i.

Folglich sind die Residua in den Punkten ki und $(k+1)i$ gleich, d. h. $a_k = a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $a_k = a_1$,

$$f(s) = a_1 \zeta(s),$$

q. e. d.

Göttingen, 30. September 1921.

(Eingegangen am 2. 10. 1921.)