22.

Ueber die Biegung krummer Flächen.

(Von dem Verfasser des Aufsatzes No. 20. in diesem Heft.)

Die bisher betrachteten Biegungen der Flächen, welche durch gerade Linien erzeugt werden, sind keinesweges die einzig möglichen; nur die Biegungen der *Ebene* lassen sich immer durch gerade Linien erzeugen. Dagegen stellen folgende Gleichungen eine Biegung der *Schraubenfläche* dar, welche keine geraden Linien enthält (wie leicht zu beweisen ist), nemlich:

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{(n^2+q^2)}\cos ap, \qquad y = \frac{1}{a}\sqrt{(n^2+q^2)}\sin ap,$$

$$z = \frac{1}{a}\int_0^q \sqrt{\left(\frac{a^2n^2+(a^2-1)q^2}{n^2+q^2}\right)}\,dq.$$

a ist eine willkürliche Constante. Diese Formeln geben

$$ds^2 = (n^2+q^2)\,dp^2 + dq^2,$$

wie oben bei der Schraubenfläche; was hinreicht zu beweisen, dafs sie eine Biegung derselben ausdrücken, die übrigens eine Umdrehungsfläche ist, wie offenbar folgt, wenn man q constant setzt. Für $q = o$ erhält man $\sqrt{(x^2+y^2)} = r = \frac{n}{a}$; die Axe der Schraubenfläche (welche dem Werthe Null von q entspricht) ist demnach hier in einen Kreis vom Halbmesser $\frac{n}{a}$ gebogen, in welchem sie sich unzählige Male herumwindet. Die Drehungsaxe (z) geht durch den Mittelpunct dieses Kreises und steht senkrecht auf der Ebene desselben; die erzeugende Curve, den geraden Linien der Schraubenfläche entsprechend, geht vom Umringe dieses Kreises, in welchem sie ihren Scheitel hat, nach beiden Seiten symmetrisch fort. Ihre Grund-Eigenschaft wird durch die Gleichung $a^2r^2 = n^2+q^2$ gegeben, wenn man bemerkt, dafs q den Bogen der Curve, vom Scheitel bis zu dem Puncte dessen Abscisse r $(=\sqrt{(x^2+y^2)})$, bedeutet. Für $a = 1$ ist die Curve die Kettenlinie, die Fläche selbst aber ist diejenige sehr bekannte, welche eben so wie die Schraubenfläche, die Eigenschaft des kleinsten Inhaltes zwischen gegebenen Grenzen besitzt. Nimmt man $a < 1$, so wird die Fläche imaginär, wenn $q > \frac{an}{\sqrt{(1-a^2)}}$; alsdann gilt die Biegung nur für einen

Theil der Schraubenfläche; wenn aber $a = 1$ oder > 1, gilt sie für das Ganze derselben.

Ueberhaupt ist es eine sehr anziehende, zugleich aber äufserst schwierige Aufgabe: alle möglichen Biegungen einer gegebenen Fläche darzustellen. Einige lassen sich in gewissen Fällen auf folgende Art finden:

In dem Ausdrucke des Linear-Elementes kann man immer $F = 0$ annehmen, und mithin setzen: $ds^2 = E dp^2 + G dq^2$. Dazu wird nur erfordert, dafs alle Curven auf der Fläche, für welche p allein sich ändert, diejenigen, für welche q allein veränderlich ist, unter rechten Winkeln schneiden. Dieses vorausgesetzt, nehme man für z eine unbestimmte Function von p oder von q; es sei z. B. $dz = Q dq$, und Q blofs von q abhängig. Alsdann erhält man $dx^2 + dy^2 = E dp^2 + (G - Q^2) dq^2$. Multiplicirt man mit der Gleichung $1 = \cos\psi^2 + \sin\psi^2$ und setzt zur Abkürzung $\sqrt{E} = u$, $\sqrt{(G - Q^2)} = v$, so folgt $dx^2 + dy^2 = (u \cos\psi\, dp + v \sin\psi\, dq)^2 + (u \sin\psi\, dp - v \cos\psi\, dq)^2$. Man setze demnach

$$\begin{aligned} dx &= u \cos\psi\, dp + v \sin\psi\, dq \\ dy &= -u \sin\psi\, dp + v \cos\psi\, dq, \end{aligned}$$

so lassen sich zuweilen die Functionen Q und ψ so bestimmen, dafs die Werthe von dx und dy integrabel werden. Zu diesem Ende mufs sein:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dq} \cdot \cos\psi - u \sin\psi \cdot \frac{d\psi}{dq} &= \frac{dv}{dp} \cdot \sin\psi + v \cos\psi \cdot \frac{d\psi}{dp}, \\ \frac{du}{dq} \cdot \sin\psi + u \cos\psi \cdot \frac{d\psi}{dq} &= -\frac{dv}{dp} \cdot \cos\psi + v \sin\psi \cdot \frac{d\psi}{dp}, \end{aligned}$$

oder einfacher, was auf dasselbe hinauskommt:

$$A. \quad \frac{du}{dq} = v \frac{d\psi}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dp} = -u \frac{d\psi}{dq}.$$

Soll nun die Bestimmung von ψ möglich sein, so mufs der Bedingung $\dfrac{d\left(\frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dq}\right)}{dq} = -\dfrac{d\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{dv}{dp}\right)}{dp}$ durch die Wahl der Function Q (in $v = \sqrt{(G - Q^2)}$) genügt werden können. Diese Gleichung giebt

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{d^2 u}{dq^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{d^2 v}{dp^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dq} \cdot \frac{du}{dq} + \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dp} \cdot \frac{dv}{dp},$$

oder weil

$$v \frac{dv}{dp} = \tfrac{1}{2} \frac{dG}{dp}, \qquad v \frac{dv}{dq} = \tfrac{1}{2} \frac{dG}{dq} - Q \frac{dQ}{dq} \quad \text{und}$$

$$v \frac{d^2 v}{dp^2} = \tfrac{1}{2} \frac{d^2 G}{dp^2} - \frac{1}{4v^2} \cdot \left(\frac{dG}{dp}\right)^2 \ \text{ist},$$

$$\frac{d^2 u}{dq^2} + \frac{1}{u}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d^2 G}{dp^2} - \frac{1}{4v^2}\left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{v^2}\cdot\frac{du}{dq}\left(\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq} - Q\frac{dQ}{dq}\right) + \frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dp}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$

oder wenn man für v^2 seinen Werth $G - Q^2$ setzt und entwickelt:

$$\frac{du}{dq}\cdot Q\frac{dQ}{dq} = MQ^2 + N,$$

wo

$$M = \frac{d^2 u}{dq^2} + \frac{1}{2u}\cdot\frac{d^2 G}{dp^2} - \frac{1}{2u^2}\cdot\frac{du}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} \quad \text{und}$$
$$N = \frac{1}{4u}\cdot\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{du}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - GM$$

ist. Wenn nun die Ausdrücke $\dfrac{M}{\frac{du}{dq}}$ und $\dfrac{N}{\frac{du}{dq}}$ blofs noch q, nicht aber p enthalten, so kann hieraus Q und dann ψ gefunden werden.

Unter den Anwendungen, welche vorstehende Bemerkung gestattet, will ich nur diejenige auf *Umdrehungsflächen* hervorheben. Für solche kann man setzen:

$$x = \varphi(q).\cos p, \quad y = \varphi(q).\sin p, \quad z = f(q);$$

mithin

$$\partial s^2 = (\varphi q)^2 \partial p^2 + ((\varphi' q)^2 + (f' q)^2)\partial q^2.$$

Hier sind die Gröfsen $u = \varphi q$, $G = (\varphi' q)^2 + (f' q)^2$ unabhängig von p, wodurch der obigen Bedingung genügt wird. In der That erhält man aus den Gleichungen (*A.*), weil $\dfrac{dv}{dp} = 0$,

$$\frac{d\psi}{dq} = 0, \quad \frac{d\psi}{dp}\cdot\sqrt{(G - Q^2)} = \varphi' q,$$

woraus folgt: $\dfrac{d\psi}{dp} = \dfrac{1}{a}$, $G - Q^2 = a^2(\varphi' q)^2$. ($a$ ist eine willkürliche Constante.) Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$x = a\varphi(q).\sin\left(\frac{p}{a}\right), \quad y = a\varphi(q).\cos\left(\frac{p}{a}\right),$$
$$z = \int\sqrt{((f' q)^2 + (1 - a^2)(\varphi' q)^2)}.dq,$$

welche wieder eine Umdrehungsfläche darstellen, die für $a = 1$ mit der vorigen zusammenfällt, für andere Werthe von a aber eine Biegung derselben darstellt. Für die *Kugel* kann man z. B. setzen $\varphi q = \cos q$, $fq = \sin q$, woraus erhalten wird:

$$x = a\cos q.\sin\left(\frac{p}{a}\right), \quad y = a\cos q.\cos\left(\frac{p}{a}\right), \quad z = \int_0^q \sqrt{(1 - a^2 \sin q^2)}.dq.$$

Diese Gleichungen geben für $a=1$ eine Kugel vom Halbmesser $=1$; für andere Werthe von a hingegen Biegungen derselben.

Um Mifsverständnissen vorzubeugen, bemerke ich noch, dafs bekanntlich eine in sich geschlossene convexe Fläche als unversehrtes Ganzes, unbiegsam ist. Man mufs sich daher, wenn von ihrer Biegung gesprochen wird, den Zusammenhang in einer gewissen Ausdehnung unterbrochen denken. Läfst man z. B. in den hier zunächst vorhergehenden Formeln a einen ächten Bruch bedeuten, so zeigt sich, dafs in der gebogenen Fläche einige Theile der ursprünglichen Kugelfläche auf einander fallen. Denn um die ganze gebogene Fläche zu erhalten, braucht man, was p betrifft, nur Werthe von 0 bis $2a\pi$ anzunehmen, während für die Kugel p von 0 bis 2π fortgeht; der übrige von $p=2a\pi$ bis $p=2\pi$ reichende Kugelstreifen deckt mithin, nach der Biegung, den zwischen $p=0$ und $p=2\pi\ (1-a)$ enthaltenen Streifen der gebogenen Fläche. Dies ergiebt sich, wie man sieht, aus den Formeln von selbst, wenn man nur festhält, dafs zu demselben Puncte der Fläche, vor und nach der Biegung, dieselben Werthe von p und q gehören.