SOPRA UN PROBLEMA AL CONTORNO.

Memoria di **Luigi Amoroso** (Roma).

Adunanza del 23 luglio 1911.

Introduzione.

In molte questioni di Analisi si presenta il problema di ricercare quali elementi occorre dare, per individuare una funzione di due variabili complesse.

Il Prof. T. Levi-Civita [1]), ponendosi dal punto di vista di Cauchy, ha risoluto il problema locale, dimostrando che, se nello spazio a quattro dimensioni, di cui x_1, x_2, x_3, x_4 rappresentano un sistema di coordinate cartesiane, è data una varietà a due dimensioni non caratteristica (tale cioè che non risulti determinata da un legame analitico fra due funzioni delle due variabili complesse $x_1 + i x_2$, $x_3 + i x_4$), e se sopra una porzione σ_2 di una tale varietà si danno ad arbitrio due funzioni reali analitiche e regolari f_1, f_2, esiste una — ed a meno di una inessenziale costante additiva — una sola funzione delle due variabili complesse $x_1 + i x_2$, $x_3 + i x_4$, regolare in un intorno sufficientemente piccolo di σ_2, la cui parte reale prende sopra σ_2 i valori di f_1, e la parte reale della derivata normale prende sopra σ_2 i valori di f_2.

In questa memoria ci poniamo dal punto di vista di Riemann-Dirichlet. Se $U + i V$ è una funzione delle due variabili complesse $x_1 + i x_2$, $x_3 + i x_4$, allora U e V sono integrali del sistema differenziale

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_4} = 0, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_4} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \end{array} \right.$$

Data una varietà chiusa a tre dimensioni σ, racchiudente nel suo interno uno spazio S a quattro dimensioni, il problema analogo al problema di Dirichlet consiste nel ricercare quali elementi occorre dare al contorno σ, perchè sia determinato nell'interno S uno ed un solo integrale del sistema (1). Diciamo U_0, U_1 i valori che U e la derivata

[1]) T. Levi-Civita, *Sulle funzioni di due o più variabili complessi* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 2° semestre 1905, pp. 492-499].

normale interna $\frac{\partial U}{\partial n}$ assumono al contorno σ; U_0 ed U_1 sono funzioni finite e continue sopra σ, colle derivate prime e seconde finite e continue. Dimostreremo che esse sono legate da tre equazioni differenziali lineari

$$E_i^* = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

del secondo ordine rispetto alle derivate parziali di U_0, U_1 secondo tre parametri atti ad individuare i punti di σ; alle quali equazioni si può aggiungere l'equazione integrale di GREEN

$$H = U_0 - \frac{1}{\pi^2}\int_\sigma \left(U_0 \frac{d\frac{1}{r^2}}{dn} - \frac{1}{r^2} U_1 \right) d\sigma = 0, \tag{3}$$

r essendo la distanza fra due punti generici di σ. Le equazioni (2) e (3) hanno interesse in quanto che esse sono caratteristiche. E infatti, dimostreremo che, se U_0 e U_1 sono due funzioni finite e continue sopra σ, derivabili colle derivate prime e seconde finite e continue, che verificano il sistema

$$E_i^* = 0, \qquad H = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

esiste sempre entro S uno ed un solo integrale del sistema (I), finito e continuo, con tutte le derivate $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ finite e continue, che prende sopra σ i valori di U_0, la cui derivata normale prende sopra σ i valori di U_1.

È possibile eliminare dal sistema (4) la funzione U_1? Si presenta a questo punto un fatto notevole, sul quale ha già richiamato l'attenzione il Prof. E. E. LEVI [2]). Le condizioni a cui debbono soddisfare i valori di un integrale del sistema (1) al contorno σ, portano non solo sui valori della funzione, ma anche sulla natura del contorno. La possibilità di eliminare o meno dal sistema (4) i valori di U_1 dipende appunto dalla natura del contorno σ.

Il Prof. E. E. LEVI ha introdotto la nozione di varietà caratteristiche — cioè di varietà che contengono infinite superficie caratteristiche di LEVI-CIVITA. — Egli ha dimostrato [3]) che, se $\varphi = 0$ è l'equazione di una varietà caratteristica, φ verifica identicamente l'equazione

$$\left\{\begin{aligned} E(\varphi) = {} & \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2}\right) \\ & - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_4}\right) \\ & - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

---

[2]) E. E. LEVI: *a*) *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complessi* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XVII (1910), pp. 61-87]; *b*) *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse* [Ibid., serie III, tomo XVIII (1911), pp. 69-79].

[3]) Cfr. loc. cit. [2]), *a*, n$^{\text{i}}$ 11, 12.

L'eliminazione di U_1 dal sistema (4) è possibile, se la varietà $\varphi = 0$ è tale, che nei suoi punti l'espressione $E(\varphi)$ conservi un segno costante, senza mai annullarsi. Mostreremo infatti che sopra una tale varietà, che diremo *regolare*, è possibile dalle (2) ricavare algebricamente i valori di U_1 in funzione dei valori di U_0 e delle derivate prime e seconde di U_0, onde, sostituendo nelle (4), si ha per U_0 un sistema integro differenziale del tipo

$$F_1 = F_2 = 0,$$

$$U_0 - \frac{1}{\pi^2}\int_\sigma \left[U_0 \frac{d\frac{1}{r^2}}{dn} - \frac{1}{r^2} F_3(U_0) \right] d\sigma = 0,$$

F_1, F_2, F_3 essendo combinazioni lineari delle derivate prime, seconde e terze di U_0. Questo sistema è caratteristico: cioè, data sopra σ una funzione U_0, finita e continua, colle derivate prime, seconde e terze finite e continue, esiste uno ed un solo integrale del sistema (1), regolare entro S, che prende sopra σ i valori di U_0. Il risultato che così si ottiene, risolve completamente il problema analogo al problema di DIRICHLET per le funzioni di più variabili complesse [4]).

Nel Capitolo I diamo la trasformazione del sistema (1) in coordinate curvilinee generali. Nel Capitolo II stabiliamo il sistema (4), che lega al contorno σ i valori di U_0 e di U_1, e finalmente nel Capitolo III eseguiamo l'eliminazione dei valori di U_1.

I.

1. Sia q_1, q_2, q_3, q_4 un sistema di coordinate curvilinee generali, tali che nella regione che si considera il determinante funzionale

$$\nabla = \frac{d(x_1, x_2, x_3, x_4)}{d(q_1, q_2, q_3, q_4)} \tag{6}$$

sia sempre finito e sempre diverso da zero.

Sia U un integrale del sistema (1), introduciamo la funzione coniugata V, definita, a meno di una inessenziale costante additiva, dalle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial U}{d x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = \frac{\partial V}{\partial x_4}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_4} = -\frac{\partial V}{\partial x_3},$$

da cui segue l'identità differenziale

$$dV = -\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial U}{\partial x_4} dx_3 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_4. \tag{7}$$

---

4) La presente Memoria dev'essere sostituita ai nostri lavori precedenti: *Dell'estensione del problema di* DIRICHLET *per le funzioni di più variabili complesse* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLVII (1909), pp. 1-20]; *Sur la théorie des fonctions de plusieurs variables* [Comptes rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de Lille (1909), pp. 201-204].

Si ottiene il sistema trasformato di (1) in coordinate curvilinee trasformando la forma (7), ed imponendo alla forma trasformata la condizione di essere differenziale esatto. Nelle coordinate q_1, q_2, q_3, q_4 la (7) diventa

$$dV = \sum_s^{1\dots 4} P_s \, dq_s, \tag{8}$$

ove è

$$P_s = \sum_r^{1\dots 4} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial q_r} \tag{9}$$

e

$$A_{rs} = -\frac{\partial q_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_s} + \frac{\partial q_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_s} - \frac{\partial q_r}{\partial x_4}\frac{\partial x_3}{\partial q_s} + \frac{\partial q_r}{\partial x_3}\frac{\partial x_4}{\partial q_s}. \tag{10}$$

La (8) risulta un differenziale esatto, se è

$$\frac{\partial P_s}{\partial q_t} = \frac{\partial P_t}{\partial q_s}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial q_t}\left(\sum_r^{1\dots 4} A_{rs}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right) = \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r^{1\dots 4} A_{rt}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right) \qquad (s,\ t = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{11}$$

Queste equazioni, in numero di sei, delle quali però solamente quattro sono algebricamente indipendenti, rappresentano il sistema trasformato del sistema (1).

2. Come conseguenza del sistema (11) si ricava che U soddisfa alla ordinaria equazione di LAPLACE

$$\Delta^2 U = 0.$$

Per mostrar ciò, occorre premettere alcune proprietà dei coefficienti A_{rs}. Introduciamo i coefficienti coniugati

$$B_{st} = -\frac{\partial q_s}{\partial x_1}\frac{\partial q_t}{\partial x_2} + \frac{\partial q_s}{\partial x_2}\frac{\partial q_t}{\partial x_1} - \frac{\partial q_s}{\partial x_3}\frac{\partial q_t}{\partial x_4} + \frac{\partial q_s}{\partial x_4}\frac{\partial q_t}{\partial x_3} \tag{12}$$

ed i parametri di BELTRAMI

$$Q_{rs} = \left(\frac{\partial q_r}{\partial x_1}\frac{\partial q_s}{\partial x_1} + \frac{\partial q_r}{\partial x_2}\frac{\partial q_s}{\partial x_2} + \frac{\partial q_r}{\partial x_3}\frac{\partial q_s}{\partial x_3} + \frac{\partial q_r}{\partial x_4}\frac{\partial q_s}{\partial x_4}\right). \tag{13}$$

Si riconosce immediatamente che si ha

$$B_{st} + B_{ts} = 0, \tag{14}$$

$$\sum_s^{1\dots 4} A_{rs} B_{st} = Q_{rt}. \tag{15}$$

Segue con calcoli facili:

$$\sum_s^{1\dots 4}\sum_t^{1\dots 4}\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_t} B_{st}\right) = \frac{1}{2}\sum_s^{1\dots 4}\sum_t^{1\dots 4} B_{st}\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_t} - \frac{\partial A_{rt}}{\partial q_s}\right) = \Delta^2(q_r). \tag{16}$$

Ciò premesso, ricaviamo dalle (11)

$$\sum_r^{1\dots 4} A_{rs}\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_t} - \sum_r^{1\dots 4} A_{rt}\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_s} + \sum_r^{1\dots 4}\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_t} - \frac{\partial A_{rt}}{\partial q_s}\right)\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0,$$

da cui

$$\sum_r^{1\dots 4}\sum_t^{1\dots 4}\left(\sum_s^{1\dots 4} A_{rs} B_{st}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_t} + \sum_r^{1\dots 4}\left(\sum_s^{1\dots 4}\sum_t^{1\dots 4}\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_t} B_{st}\right)\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0,$$

e tenendo presenti le (15), (16) otteniamo

$$\sum_r^{1\ldots4}\sum_t^{1\ldots4} Q_{rt}\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_t}+\sum_r^{1\ldots4}\Delta^2(q_r)\frac{\partial U}{\partial q_r}=0, \tag{17}$$

equazione che rappresenta appunto, secondo la formula di BELTRAMI, la trasformata della $\Delta^2 U=0$ in coordinate curvilinee generali.

Come equazioni indipendenti del sistema (11) possiamo prendere la (17) e le tre delle (11) che si ottengono limitando i valori di s, t ai numeri 1, 2, 3. Otteniamo così il sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta^2 U=0\\ &E_i=\frac{\partial}{\partial q_t}\left(\sum_r^{1\ldots4}A_{rs}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right)-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r^{1\ldots4}A_{rt}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right)=0 \qquad (s,\ t=1,\ 2,\ 3),\end{aligned}\right. \tag{18}$$

i, s, t essendo una permutazione di classe pari dei numeri 1, 2, 3. Il sistema (18) è perfettamente equivalente al sistema (11) e quindi al sistema (1).

II.

3. Consideriamo nello spazio a quattro dimensioni x_1, x_2, x_3, x_4 una varietà *chiusa* a tre dimensioni, che indichiamo con σ, sulla quale facciamo le ipotesi seguenti:

1°) Ammetta in ogni punto un iperpiano tangente unico e ben determinato.

2°) Sia rappresentabile da una unica equazione fra le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4,

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0,$$

φ essendo una funzione finita e continua di x_1, x_2, x_3, x_4 colle derivate prime e seconde finite e continue, in tutti i punti dello spazio S racchiuso da σ (il contorno compreso).

3°) Posto $\varphi=q_4$, sia possibile associare a q_4 tre parametri q_1, q_2, q_3 tali che q_1, q_2, q_3, q_4 costituiscano entro S e sul contorno σ un sistema di coordinate curvilinee, il determinante γ, definito dalla formula (6), essendo sempre finito e diverso da zero. Supporremo per semplicità che sia possibile scegliere le coordinate q_1, q_2, q_3, q_4 *ortogonali.*

Ciò posto, è ben noto che esiste sempre uno ed un solo integrale dell'equazione $\Delta^2=0$, regolare entro S, che prende al contorno σ una successione assegnata di valori. Occorre ricercare quali condizioni debbono essere soddisfatte, perchè l'integrale della $\Delta^2=0$, individuato entro S, verifichi ancora al sistema (18), e quindi al sistema (1).

4. LEMMA I. — *Se un integrale della* $\Delta^2 U=0$, *regolare entro* S (cioè uniforme, finito e continuo, con tutte le derivate uniformi, finite e continue), *verifica al contorno* σ *al sistema differenziale* (1), *esso verifica al sistema* (1) *in tutto* S.

E infatti, posto

$$V_1=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \qquad V_2=\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2},$$

$$V_3=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_4}, \qquad V_4=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_4}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3},$$

V_1, V_2, V_3, V_4 sono integrali della $\Delta^2 U = 0$, regolari in S, che si annullano al contorno σ di S, quindi si annullano identicamente in tutto S.

LEMMA II. — *La condizione necessaria è sufficiente perchè un integrale U della $\Delta^2 U = 0$, regolare nello spazio S interno a σ, verifichi ancora al sistema* (1) *entro tutto S, è che al contorno σ sia verificato il sistema differenziale:*

$$E_i = \frac{\partial}{\partial q_t}\left(\sum_r^{1\ldots4} A_{rs}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right) - \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r^{1\ldots4} A_{rt}\frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{19}$$

i, s, t essendo una permutazione di classe pari dei numeri 1, 2, 3.

La condizione è evidentemente necessaria. Per dimostrare che è sufficiente, osserviamo che, se per ipotesi è $\Delta^2 U = 0$ in tutto S, per continuità è ancora $\Delta^2 U = 0$ sopra σ, onde sopra σ la funzione U verifica al sistema (18) e quindi al sistema (1). Segue per il Lemma precedente che U verifica al sistema (1) in tutto S.

5. Diciamo U_0, U_1 i valori che U e la derivata normale interna $\frac{\partial U}{\partial n}$ assumono sulla varietà σ. Siccome le coordinate q_1, q_2, q_3, q_4 sono per ipotesi ortogonali, ne viene così che U_1 coincide con $\frac{\partial U}{\partial q_4}$ a meno di un fattore, e precisamente

$$U_1 = \frac{1}{l_4}\frac{\partial U}{\partial q_4},$$

ove

$$l_4 = \sqrt{\sum_\rho^{1\ldots4}\left(\frac{\partial x_\rho}{\partial q_4}\right)^2},$$

il segno del radicale essendo scelto convenientemente.

Posto

$$\lambda_h = l_4 A_{4h} \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{20}$$

il sistema precedente (19) assume la forma

$$E_i^* = \frac{\partial}{\partial q_t}\left(\sum_r^{1\ldots3} A_{rs}\frac{\partial U_0}{\partial q_r} + \lambda_s U_1\right) - \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum_r^{1\ldots3} A_{rt}\frac{\partial U_0}{\partial q_r} + \lambda_t U_1\right) = 0. \tag{21}$$

Ma d'altra parte per la formula che esprime il Lemma di GREEN si ha

$$H = U_0 - \frac{1}{\pi^2}\int_\sigma \left(U_0 \frac{d\frac{1}{r^2}}{dn} - \frac{1}{r^2}U_1\right) d\sigma = 0, \tag{22}$$

essendo r la distanza di due punti generici di σ, onde sopra σ, U_0 ed U_1 sono legate dal sistema integrodifferenziale

$$E_i^* = 0, \qquad H = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{23}$$

e concludiamo: *Se U_0, U_1 rappresentano i valori che un integrale U del sistema* (1), *regolare entro S, e la sua derivata normale interna $\frac{\partial U}{\partial n}$ assumono sopra σ, U_0 ed U_1 verificano sopra σ al sistema integrodifferenziale* (23).

Viceversa, dimostriamo immediatamente che: *date sulla varietà σ due funzione U_0, U_1, finite e continue, colle derivate prime e seconde finite e continue, che verificano al* *sistema* (23), *esiste uno ed un solo integrale del sistema* (1), *regolare nello spazio* S, *che assume sopra* σ *i valori di* U_0, *la cui derivata normale assume sopra* σ *i valori di* U_1.

Infatti, sappiamo che esiste uno ed un solo integrale della $\Delta^2 U = 0$, regolare entro S, che assume sopra σ i valori di U_0. Detto U tale integrale, si ha nei punti di σ

$$U_0 - \frac{1}{\pi^2}\int_\sigma \left(U_0 \frac{d\frac{1}{r^2}}{dn} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Confrontando questa equazione colla $H = 0$, che per ipotesi è soddisfatta, ricaviamo

$$\int_\sigma \frac{1}{r^2}\left(U_1 - \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = 0$$

e siccome il nucleo $\frac{1}{r^2}$ è chiuso sopra σ [5]), così concludiamo che nei punti di σ si ha

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni $E_i^* = 0$, si trova che U verifica, sopra σ, al sistema (19), e quindi, pel Lemma II, al sistema (1).

Dimostrata così l'esistenza di un integrale del sistema (1), per le proprietà ben note dell'equazione di LAPLACE, risulta che esso è unico, onde *il sistema* (23) *caratterizza effettivamente sopra* σ *gl'integrali del sistema* (1) *regolari in* S.

III.

6. Riprendiamo le equazioni $E_i^* = 0$. Esse possono scriversi:

$$(24)\qquad E_i^* = \lambda_s \frac{\partial U_1}{\partial q_t} - \lambda_t \frac{\partial U_1}{\partial q_s} + \left(\frac{\partial \lambda_s}{\partial q_t} - \frac{\partial \lambda_t}{\partial q_s}\right) U_1 + M_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ove si sia posto

$$(25)\qquad M_i = -\sum_r^{1\ldots 3}\left[\frac{\partial}{\partial q_s}\left(A_{rt}\frac{\partial U_0}{\partial q_r}\right) - \frac{\partial}{\partial q_t}\left(A_{rs}\frac{\partial U_0}{\partial q}\right)\right] \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Se si considerano queste equazioni come equazioni lineari in $\frac{\partial U_1}{\partial q_1}$, $\frac{\partial U_1}{\partial q_2}$, $\frac{\partial U_1}{\partial q_3}$, si

[5]) Infatti se ψ è una funzione tale che nei punti di σ sia

$$\int_\sigma \frac{\psi}{r^2}\, d\sigma = 0,$$

la funzione $\int_\sigma \frac{\psi}{r^2}\, d\sigma$ è una funzione armonica regolare nello spazio interno e nello spazio esterno a σ, si annulla sopra σ e si annulla all'infinito, onde è identicamente nulla in tutto lo spazio interno a σ ed in tutto lo spazio infinito esterno a σ. Da ciò, per le proprietà fondamentali della funzione potenziale, segue identicamente $\psi = 0$.

riconosce immediatamente che il determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{vmatrix}$$

è identicamente nullo. Ciò porta che, se fra le equazioni precedenti si eliminano $\frac{\partial U_1}{\partial q_1}$, $\frac{\partial U_1}{\partial q_2}$, risulta eliminata anche $\frac{\partial U_1}{\partial q_3}$. Il risultato della eliminazione è una relazione della forma

$$kU_1 = P(U_0), \tag{26}$$

ove è

$$k = \lambda_1\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial q_2}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial q_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_3}\right) + \lambda_3\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_1}\right) \tag{27}$$

e

$$P(U_0) = -(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3)$$

ovvero

$$P(U_0) = +\sum_i^{1\ldots 3}\sum_r^{1\ldots 3}\lambda_i\left[\frac{\partial}{\partial q_s}\left(A_{rt}\frac{\partial V}{\partial q_r}\right) - \frac{\partial}{\partial q_t}\left(A_{rs}\frac{\partial V}{\partial q_r}\right)\right], \tag{28}$$

essendo sempre i, s, t una permutazione di classe pari dei numeri 1, 2, 3.

7. Ha importanza ricercare, se esistono varietà σ a tre dimensioni, nei cui punti si abbia identicamente $k \equiv 0$.

Supposto sopra σ, $k \equiv 0$, l'espressione

$$\lambda_1 dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \lambda_3 dq_3$$

nei punti di σ, è proporzionale ad un differenziale esatto. Ricordando che è, per la formula (20),

$$\lambda_h = l_4 A_{4h},$$

e d'altra parte siccome le coordinate q_1, q_2, q_3, q_4 per ipotesi (cfr. n° 3) sono ortogonali e quindi

$$\begin{aligned} A_{44} &= -\frac{\partial q_4}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_4} + \frac{\partial q_4}{\partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_4} - \frac{\partial q_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_3}{\partial q_4} + \frac{\partial q_4}{\partial x_3}\frac{\partial x_4}{\partial q_4} \\ &= \frac{1}{l_4}\left\{-\frac{\partial x_2}{\partial q_4}\frac{\partial x_1}{\partial q_4} + \frac{\partial x_1}{\partial q_4}\frac{\partial x_2}{\partial q_4} - \frac{\partial x_4}{\partial q_4}\frac{\partial x_3}{\partial q_4} + \frac{\partial x_3}{\partial q_4}\frac{\partial x_4}{\partial q_4}\right\} \equiv 0, \end{aligned}$$

ricaviamo che nei punti di σ

$$\sum_h^{1\ldots 4} A_{4h}\, dq_h$$

ovvero

$$\begin{aligned} &\sum_h^{1\ldots 4}\left(-\frac{\partial q_4}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_h} + \frac{\partial q_4}{\partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_h} - \frac{\partial q_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_3}{\partial q_h} + \frac{\partial q_4}{\partial x_3}\frac{\partial x_4}{\partial q_h}\right)dq_h \\ &= -\frac{\partial q_4}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial q_4}{\partial x_1}dx_2 - \frac{\partial q_4}{\partial x_4}dx_3 + \frac{\partial q_4}{\partial x_3}dx_4 \end{aligned}$$

è proporzionale ad un differenziale esatto. Dette quindi μ, ψ due funzioni di q_1, q_2, q_3 sussiste nei punti di σ una relazione della forma

$$-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_2}dx_1 + \mu\frac{\partial q_4}{\partial x_1}dx_2 - \mu\frac{\partial q_4}{\partial x_4}dx_3 + \mu\frac{\partial q_4}{\partial x_3}dx_4 = d\psi \tag{29}$$

da cui seguono le seguenti relazioni

$$-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_2}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \qquad \mu\frac{\partial q_4}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},$$

$$-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_4}=\frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \qquad \mu\frac{\partial q_4}{\partial x_3}=\frac{\partial\psi}{\partial x_4},$$

relazioni valide nei punti di σ. Ne deriva che il determinante

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial q_4}{\partial x_1} & -\frac{\partial q_4}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_4}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_3} & -\frac{\partial q_4}{\partial x_4} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} & -\frac{\partial\psi}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_4} & \frac{\partial q_4}{\partial x_3} & \frac{\partial\psi}{\partial x_4} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

è identicamente nullo nei punti di σ. È ciò prova [6]) che le varietà a due dimensioni

$$q_4=0, \qquad \psi=\text{cost.}$$

sono superficie caratteristiche di Levi-Civita, cioè definite da una relazione analitica fra le due variabili complesse x_1+ix_2, x_3+ix_4.

Osserviamo che è escluso il caso che sulla varietà σ ($q_4=0$), sia identicamente $d\psi\equiv 0$, perchè dall'ipotesi opposta risulterebbe, per la (29), che nei punti di σ si ha l'identità differenziale

$$0\equiv dq_4\equiv-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_2}dx_1+\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_1}dx_2-\mu\frac{d q_4}{\partial x_4}dx_3+\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_3}dx_4,$$

da cui segue

$$\frac{\partial q_4}{\partial x_1}=-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial q_4}{\partial x_2}=\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial q_4}{\partial x_3}=-\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_4}, \qquad \frac{\partial q_4}{\partial x_4}=\mu\frac{\partial q_4}{\partial x_3},$$

e quindi

$$\sum_i\left(\frac{\partial q_4}{\partial x_i}\right)^2=0$$

sopra tutto σ, il che non è possibile.

Sulla varietà σ esistono quindi infinite superficie caratteristiche

$$q_4=0, \qquad \psi=\text{cost.}$$

e la σ è allora *una varietà caratteristica secondo* E. E. Levi.

Come verifica dimostriamo che la funzione q_4 verifica nei punti di σ alla equazione delle varietà caratteristiche, che abbiamo indicata nella formula (5).

---

[6]) Cfr. Levi-Civita, loc. cit. [1]), §§ 2, 3.

Si ha infatti

$$k = \lambda_1 \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial q_2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial q_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_3} \right) + \lambda_3 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_1} \right)$$

$$\lambda_h = l_4 A_{4h},$$

da cui:

$$k = l_4^2 \left[A_{41} \left(\frac{\partial A_{42}}{\partial q_3} - \frac{\partial A_{43}}{\partial q_2} \right) + A_{42} \left(\frac{\partial A_{43}}{\partial q_1} - \frac{\partial A_{41}}{\partial q_3} \right) + A_{43} \left(\frac{\partial A_{41}}{\partial q_2} - \frac{\partial A_{42}}{\partial q_1} \right) \right].$$

Ma è

$$A_{4h} = - \frac{\partial q_4}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_h} + \frac{\partial q_4}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_h} - \frac{\partial q_4}{\partial x_4} \frac{\partial x_3}{\partial q_h} + \frac{\partial q_4}{\partial x_3} \frac{\partial x_4}{\partial q_h}$$

e quindi, eseguendo i calcoli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{4t}}{\partial q_s} - \frac{\partial A_{4s}}{\partial q_t} = & \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_s} \frac{\partial x_2}{\partial q_t} - \frac{\partial x_1}{\partial q_t} \frac{\partial x_2}{\partial q_s} \right) \left(\frac{\partial^2 q_4}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_2^2} \right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_s} \frac{\partial x_4}{\partial q_t} - \frac{\partial x_3}{\partial q_t} \frac{\partial x_4}{\partial q_s} \right) \left(\frac{\partial^2 q_4}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_4^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_s} \frac{\partial x_4}{\partial q_t} - \frac{\partial x_2}{\partial q_s} \frac{\partial x_3}{\partial q_t} + \frac{\partial x_3}{\partial q_s} \frac{\partial x_2}{\partial q_t} - \frac{\partial x_4}{\partial q_s} \frac{\partial x_1}{\partial q_t} \right) \left(\frac{\partial^2 q_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) \\ & + \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_s} \frac{\partial x_3}{\partial q_t} - \frac{\partial x_2}{\partial q_s} \frac{\partial x_1}{\partial q_t} + \frac{\partial x_3}{\partial q_s} \frac{\partial x_1}{\partial q_t} + \frac{\partial x_4}{\partial q_s} \frac{\partial x_2}{\partial q_t} \right) \left(\frac{\partial^2 q_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \end{aligned}$$

e conseguentemente, ricordando che le coordinate q_1, q_2, q_3, q_4 sono ortogonali,

$$k = - l_4^2 \gamma E(q_4),$$

$E(q_4)$ essendo l'espressione di E. E. Levi, definita dalla formula (5). Questa relazione prova che k è sopra σ identicamente nullo, solo se q_4 verifica identicamente l'equazione

$$E(q_4) = 0,$$

e quindi la varietà σ è *caratteristica*.

8. Diciamo per contro che una varietà a tre dimensioni σ è una varietà *regolare*, allorquando, nei suoi punti, $E(q_4)$ e quindi k conservano un segno costante senza mai annullarsi; concludiamo che per una varietà regolare si ha

$$U_1 = \frac{1}{k} P(U_0). \tag{30}$$

Il sistema (24) è così equivalente al seguente:

$$\left\{ \begin{aligned} & U_1 = \frac{1}{k} P(U_0), \\ & \lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial q_1} = \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_3} - \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial q_1} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_3} \right) U_1 - M_2, \\ & \lambda_3 \frac{\partial U_1}{\partial q_2} = \lambda_2 \frac{\partial U_1}{\partial q_3} - \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial q_2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_3} \right) U_2 + M_1. \end{aligned} \right. \tag{31}$$

L'equazione (30) mostra quale differenza essenziale interceda fra le ordinarie funzioni armoniche in due variabili (che sono le parti reali di una funzione di una variabile complessa) e gl'integrali del sistema (1) (che sono le parti reali di una funzione di due variabili complesse). Se si considerano i valori di una funzione armonica lungo un ciclo lineare chiuso, la derivata normale della funzione in ogni punto del ciclo è legata ai valori della funzione mediante una relazione *integrale,* mentre nel caso presente di un integrale del sistema (1), *la* (30) *mostra che la derivata normale nei punti di una varietà a tre dimensioni chiusa regolare (nel senso precedente) è legata ai valori della funzione sopra* σ *da una relazione differenziale.*

Dal sistema (31), tenuto conto dell'ordinario Lemma di Green, deduciamo per la funzione U_0 il seguente sistema integrodifferenziale

$$(32)\quad \begin{cases} U_0 - \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_\sigma \left[U_0 \dfrac{\partial \frac{1}{r^2}}{\partial n} - \dfrac{P(U_0)}{k r^2} \right] d\sigma = 0, \\ \lambda_3 \dfrac{\partial \frac{1}{k}[P(U_0)]}{\partial q} = \lambda_1 \dfrac{\partial \frac{1}{k}[P(U_0)]}{\partial q_3} - \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial q_3}\right) P(U_0) - M_2, \\ \lambda_3 \dfrac{\partial \frac{1}{k}[P(U_0)]}{\partial q_2} = \lambda_2 \dfrac{\partial \frac{1}{k}[P(U_0)]}{\partial q_3} - \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial q_3}\right) P(U_0) + M_1, \end{cases}$$

M_1, M_2 essendo definite dalle (25), P dalla (28). Le considerazioni svolte mostrano che, *se U è un integrale del sistema* (1), *regolare entro S, e U_0 rappresenta i valori che U assume al contorno σ, U_0 verifica sopra σ al sistema* (31).

Viceversa, se U_0 è una funzione data al contorno σ, finita e continua, colle derivate prime, seconde e terze finite e continue, che verifica al sistema (31), detto U l'integrale della $\Delta^2 U = 0$, che prende sopra σ i valori U_0, e detta U_1 la sua derivata normale interna $\dfrac{\partial U}{\partial n}$, si ha per il Lemma di Green

$$U_0 - \frac{1}{\pi^2}\int_\sigma \left(U_0 \frac{\partial \frac{1}{r^2}}{\partial n} - \frac{1}{r^2} U_1 \right) d\sigma = 0.$$

Questa equazione confrontata coll'ultima delle (31) ci dà:

$$U_1 = \frac{P(U_0)}{k}.$$

Sostituendo nelle ultime due delle (31), si riconosce che U_0, U_1 verificano al sistema $E_i^* = 0$, e quindi U è un integrale del sistema (1).

Ciò prova che: *il sistema* (31) *rappresenta la condizione necessaria e sufficiente, a cui deve soddisfare una funzione data sopra una varietà regolare σ, perchè esista un integrale del sistema* (1) *regolare nello spazio S interno a σ, che prenda sopra σ i valori di U_0.*

Roma, 18 luglio 1911.

Luigi Amoroso.