Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke.

Von

M. Noether in Erlangen.

Herr E. Picard hat vor einiger Zeit für algebraische Flächen

$$F(x, y, z) = 0$$

ein neues Forschungsgebiet betreten, indem er die Integrale von zu F gehörigen totalen Differentialen, nämlich von integrablen Ausdrücken der Form

$$Pdx + Qdy,$$

in welchen P und Q rationale Functionen der Grössen x, y, z sind, zwischen denen die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ besteht, der Untersuchung unterwarf*). Seine unten angeführte Abhandlung beschäftigt sich in ihren beiden ersten Theilen mit der Bedingung der *Integrabilität* dieses Ausdrucks und mit den Bedingungen, dass das Integral für *alle* Punkte der Fläche *endliche* Werthe habe. Diese Bedingungen können für *nicht-specielle* Flächen $F = 0$ nicht erfüllt werden**), aber sie gestatten, für eine speciell vorgelegte Fläche die Frage nach der Existenz solcher Integrale erster Gattung zu entscheiden.

Die schwierige Frage nach *allen* Flächenclassen, welche Integrale erster Gattung zulassen, wird in der genannten Abhandlung nicht berührt. Indessen kann man sehr leicht hierher gehörige Flächen anführen, welche *ein* solches Integral besitzen***); und ferner gehört hierher die interessante Classe von Flächen, deren Coordinaten sich

---

*) In den C. R. der Pariser Acad. vom 1. und 29. Dec. 1884, und eingehend in der Abhandlung: „Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce", Liouv. Journ. de Mathem., Sér. IV, t. I, 1885.

**) Dieser Umstand war mir, wie zu bemerken erlaubt sei, schon seit 1868 bekannt und wurde damals für mich die Veranlassung, diese Art von Integralen fallen zu lassen und mich den einer algebraischen Fläche $F = 0$ zugehörigen Doppelintegralen zuzuwenden.

***) Vgl. z. B. Poincaré in den C. R. vom 29. Dec. 1884.

eindeutig, und — bis auf Periodenvielfache — eindeutig umkehrbar, als vierfach periodische Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen*), Flächen, für welche diese beiden Parameter von einander unabhängige endliche Integrale sind. Diese Classe zeigt schon die Wichtigkeit der Untersuchung des Herrn Picard; seine Abhandlung beschäftigt sich daher im 3ten Theile eingehend mit solchen Flächen, welche (in dem von mir in diesen Annalen Bde. II und VIII**) definirten Sinne) das „Flächengeschlecht“ 1 haben und zwei endliche Integrale besitzen, und welche, wie das Umkehrproblem der zugehörigen Differentialausdrücke zeigt, auf jene Flächenclasse zurückführen.

Auch für weitere Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen — von denen der 4te Theil jener Abhandlung ein Beispiel giebt — kann die neue Theorie von Bedeutung werden. —

Indessen ist die von Hrn. Picard gegebene Grundlegung dafür noch nicht genügend allgemein. Er führt für die Singularitäten der Flächen F eine Reihe von Annahmen ein, welche das Gebiet der hier zu behandelnden Flächen allzusehr einschränken, und welche auch für die von ihm benutzte Methode der *Reihenentwicklung* nicht durchaus erforderlich sind. Am einfachsten sieht man dies durch Anwendung einer anderen Methode, der auch sonst von mir vielfach benutzten Methode der *rational-eindeutigen Transformation* der Fläche F, durch welche sich unmittelbar der volle Grad der Allgemeinheit ergiebt, welchen man der auf F bezüglichen Theorie ertheilen darf. Dies rührt nach meiner Auffassung daher, dass die Reihenentwicklungen selbst erst, offen oder verdeckt, als aus rationaler Transformation hervorgegangen anzusehen sind — wovon auch die Beispiele in der Schlussnummer 26. meines vorliegenden Aufsatzes wieder zeugen —, und dass gerade der erste Theil dieses doppelten Processes, die Transformation, schon die Resultate liefert.

Die Transformationsmethode hat noch den weiteren Vortheil, die Untersuchung theilweise auf schon bekannte Resultate zurückzuführen, indem sie den Zusammenhang der Picard'schen Betrachtungen im 3ten Theil seiner Arbeit mit den Betrachtungen klarlegt, welche ich in dem o. c. Aufsatze im VIII. Bd. dieser Annalen über die zu F „adjungirten Flächen φ_F“ und die „ausgezeichneten Curven“ von F angestellt habe.

Aus diesen Gründen halte ich es für angezeigt, im Folgenden die

---

*) Für diese Flächen vgl. Schleiermacher, „Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln“, Ber. der Erlanger Soc. v. 15. Febr. 1886.

**) In meinen Abhandlungen: „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen“, Math. Ann. II, und „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde, 2ter Aufsatz“, Math. Ann. VIII.

Resultate der drei ersten Theile der Picard'schen Abhandlung, aber in der allgemeinst zulässigen Form und nach der Transformationsmethode, von Neuem abzuleiten*). Der vorliegende Aufsatz soll also nur eine Art von Commentar zu jener Abhandlung sein, wesshalb ich es auch hier unterlasse, auf die einzelnen Abweichungen hinzuweisen. Ich will nur erwähnen, dass ich die Untersuchung für die Fläche und ihre Differentiale meistens in der homogenen Form der Ausdrücke führe**); dass ich die Integrale 1ter Gattung von den übrigen nicht getrennt behandle; und dass ich die Bedingungen der Endlichkeit der Integrale in den mehrfachen Elementen der Fläche nicht, wie es in der Abhandlung geschieht, aus der Existenzbedingung ((5), Nr. 1 dieses Aufsatzes) entwickle, sondern diese beiden Arten von Bedingungen möglichst trenne (vgl. auch Nr. 17 dieses Aufsatzes). Im § 8 zeige ich von *allen* Flächen vom Flächengeschlecht 1, welche zwei unabhängige endliche Integrale u, u' besitzen, nur die Eigenschaft, dass ihre Coordinaten sich als *eindeutige* Functionen der u, u', mit rationalem Charakter für alle endlichen Werthe dieser Grössen, darstellen lassen, ohne auf die einfache Folgerung (für welche ich auf Hrn. Picard's Abhandlung verweisen kann) einzugehen, dass diese Ausdrücke 4-fach periodisch werden. § 8, Nr. 26 enthält einige Beispiele zu den Singularitäten, welche bei solchen eindeutigen Functionen von zwei Variablen vorkommen können.

§ 1.

Form der Differentialausdrücke.

1. Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

werde zunächst in nicht-homogenen Coordinaten zu Grunde gelegt. Um keine der Variablen auszuzeichnen, werde ein zugehöriger totaler Differentialausdruck sogleich in der Form angenommen:

$$du = K dx + L dy + M dz,$$

unter der Bedingung

$$F_x' \, dx + F_y' \, dy + F_z' \, dz = 0, \tag{2}$$

wo

$$F_x' = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y' = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z' = \frac{\partial F}{\partial z}$$

und wobei K, L, M rationale Functionen von x, y, z bedeuten.

---

*) Einen kurzen Auszug davon habe ich in den Berichten der Erlanger Soc. vom 15. Febr. 1886 mitgetheilt.

**) Ueber diesen Punkt ist auch eine kurze Note von Hrn. Cayley in dem Bull. des sciences math. vom März 1886 erschienen.

Die allgemeinste Form für du ergiebt sich dann zu

$$du = (K + \lambda F_x')\,dx + (L + \lambda F_y')\,dy + (M + \lambda F_z')\,dz,$$

wo λ noch ganz beliebig angenommen werden kann. Wir setzen, unter Einführung von drei beliebigen Grössen k, l, m:

$$\lambda = -\frac{kK + lL + mM}{kF_x' + lF_y' + mF_z'},$$

und erhalten, mit den Bezeichnungen

(3) $$LF_z' - MF_y' = A',\quad MF_x' - KF_z' = B',\quad KF_y' - LF_x' = C'$$

für du die Form:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A' & dx \\ l & B' & dy \\ m & C' & dz \end{vmatrix}}{kF_x' + lF_y' + mF_z'}.$$

Für A', B', C' folgt aus (3), da K, L, M noch keiner Bedingung unterworfen waren, nur die Bedingung:

$$A'F_x' + B'F_y' + C'F_z' = 0,$$

welche nur mit Hülfe von (1) erfüllt zu sein braucht.

Setzt man aus A', B', C' einen gemeinsamen Nenner N heraus, so hat man

(4) $$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A & dx \\ l & B & dy \\ m & C & dz \end{vmatrix}}{\mathsf{N}(kF_x' + lF_y' + mF_z')},$$

wo die ganzen Functionen A, B, C so zu bestimmen sind, dass mit Hülfe von $F = 0$ wird

(5) $$AF_x' + BF_y' + CF_z' = 0.$$

Insbesondere kann man schreiben:

$$du = \frac{B\,dz - C\,dy}{\mathsf{N}\,.\,F_x'} = \frac{C\,dx - A\,dz}{\mathsf{N}\,.\,F_y'} = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathsf{N}\,.\,F_z'};$$

und umgekehrt folgt die Relation (5) aus dem Umstande, dass sich du nothwendig in solche drei Formen muss schreiben lassen, die vermöge (2) aus einander hervorgehen. Weitere Bestimmungen für A, B, C werden in Nr. 3 gegeben werden.

2. Auch für die homogene Gleichungsform einer Fläche n^{ter} Ordnung

(6) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

soll die Form eines totalen Differentialausdrucks zunächst unabhängig von der vorhergehenden Entwicklung hergestellt werden. Schreibt man wieder, unter den K_i rationale Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 verstanden,

$$du = \sum_i^{1\ldots 4} K_i\, dx_i,$$

unter der Bedingung

$$\sum_i^{1\ldots 4} f_i\, dx_i = 0, \quad \text{wo} \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{7}$$

und unter der weiter zwischen den Differentialen der homogenen Variablen beliebig anzunehmenden linearen Relation

$$\sum \varrho_i\, dx_i = 0,$$

so wird die allgemeinste Form für du zu:

$$du = \sum_i (K_i + \lambda \cdot f_i + \mu \cdot \varrho_i)\, dx_i,$$

wobei λ und μ noch beliebig sind. Wir setzen:

$$\mu = -\frac{\sum K_i x_i}{\sum \varrho_i x_i}, \qquad \lambda = -\frac{\sum k_i (K_i + \mu \varrho_i)}{\sum k_i f_i},$$

wobei die $k_1, \ldots, k_4$ beliebige Grössen vorstellen; so wird

$$du = \frac{\sum\limits_{h,l}^{l>h} Q_{hl}(k_h\, dx_l - k_l\, dx_h)}{\sum \varrho_i x_i \cdot \sum k_i f_i},$$

wobei gesetzt ist:

$$Q_{hl} = (f_h K_l - f_l K_h) \cdot \sum \varrho_i x_i - (f_h \varrho_l - f_l \varrho_h) \cdot \sum K_i x_i.$$

Aber für diese Ausdrücke hat man, vermöge $f \equiv \frac{1}{n} \sum f_i x_i = 0$:

$$Q_{12} x_2 + Q_{13} x_3 + Q_{14} x_4 = 0, \qquad Q_{21} x_1 + Q_{23} x_3 + Q_{24} x_4 = 0,$$
$$Q_{31} x_1 + Q_{32} x_2 + Q_{34} x_4 = 0, \qquad Q_{41} x_1 + Q_{42} x_2 + Q_{43} x_3 = 0;$$

d. h. es müssen vier Functionen A_1', A_2', A_3', A_4' existiren, für welche wird:

$$\begin{cases} Q_{12} = A_3' x_4 - A_4' x_3, & Q_{13} = A_4' x_2 - A_2' x_4, & Q_{14} = A_2' x_3 - A_3' x_2, \\ Q_{23} = A_1' x_4 - A_4' x_1, & Q_{24} = A_3' x_1 - A_1' x_3, & Q_{34} = A_1' x_2 - A_2' x_1. \end{cases} \tag{8}$$

Hiermit geht du über in

$$du = \frac{\sum \pm k_1 A_2' x_3\, dx_4}{\sum \varrho_i x_i \cdot \sum k_i f_i}.$$

Zwischen den vier Functionen A_i' selbst herrscht noch eine Beziehung. Denn damit der vorstehende Ausdruck von du von den willkürlichen Grössen k_i nur formell abhängig wird, muss neben

$$\sum f_i x_i = 0, \qquad \sum f_i \, dx_i = 0$$

nothwendig noch die Relation

$$\sum f_i A_i' = 0$$

bestehen. In der That folgt aus drei der Gleichungen (8):

$$x_4 \sum A_i' f_i = A_4' \sum f_i x_i + (Q_{23} f_1 + Q_{31} f_2 + Q_{12} f_3),$$

und neben $\sum f_i x_i = 0$ wird auch das zweite Glied der rechten Seite nach den obigen Werthen der Q_{kl} zu 0.

Bringt man noch die A_i' auf gemeinsamen Nenner und vereinigt diesen mit $\sum \varrho_i x_i$, so nimmt der Differentialausdruck die Form an:

$$du = \frac{\sum \pm k_1 A_2 x_3 \, d x_4}{N \cdot \sum k_i f_i}, \tag{9}$$

wo N, $A_1, \ldots, A_4$ rationale ganze Functionen der $x_1, \ldots, x_4$ sind, für welche, mit Hülfe von $f = 0$, die Relation zu erfüllen ist:

$$\sum A_i f_i = 0. \tag{10}$$

Da der Ausdruck du nur von den Verhältnissen der homogenen Coordinaten abhängen kann, so werden, wenn N eine ganze Function von $x_1, \ldots, x_4$ vom Grade ν ist, die $A_1, \ldots, A_4$ ganze Functionen von $x_1, \ldots, x_4$ vom Grade $n + \nu - 3$.

3. Die Entwickelung von Nr. 2 liefert noch weitere Bestimmungen für die Formen der ganzen Functionen A, B, C von x, y, z in Nr. 1, (4).

Setzt man in Nr. 2:

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \quad \frac{x_2}{x_4} = y, \quad \frac{x_3}{x_4} = z, \quad f(x_1, \ldots, x_4) = x_4^n \cdot F(x, y, z),$$
$$f_1 = x_4^{n-1} F_x', \quad f_2 = x_4^{n-1} F_y', \quad f_3 = x_4^{n-1} F_z',$$
$$f_4 = x_4^{n-1} (nF - xF_x' - yF_y' - zF_z'),$$

so geht, indem man in der Determinante $\sum \pm k_1 A_2 x_3 \, dx_4$ von den drei ersten Horizontalreihen die vierte, bez. mit x, y, z multiplicirt, abzieht, der Ausdruck (9) in (4) über, wenn man noch k, l, m für $k_1 - xk_4$, $k_2 - yk_4$, $k_3 - zk_4$ schreibt. Dabei werden, wenn man

$$A_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^{n+\nu-3} \cdot \mathsf{A}_i(x, y, z),$$
$$N(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^{\nu}\, \mathsf{N}(x, y, z)$$

setzt, A, B, C von der Form:

$$(11)\qquad A = x\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_1, \quad B = y\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_2, \quad C = z\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_3,$$

d. h. wenn das N in (4) vom Grade ν ist, so steigen A, B, C auf den Grad $n + \nu - 2$, aber die Glieder $(n + \nu - 2)^{\text{ter}}$ Dimension sind bezüglich von den Formen

$$x\mathsf{A}_4, \quad y\mathsf{A}_4, \quad z\mathsf{A}_4.$$

Auch (10) geht hierdurch in (5) über. —

Es wäre auch leicht, die Formen (11) von A, B, C direct zu ermitteln, ohne erst auf Nr. 2 Bezug zu nehmen; wonach sich dann umgekehrt die Entwicklungen von Nr. 2 einfach ergäben.

Nimmt man zu diesem Zwecke an, dass A, B, C vom Grade $n + \nu + \varrho - 3$ seien und setzt $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ in (4), so nimmt dieser Ausdruck die Form an

$$(12)\qquad du = \frac{\begin{vmatrix} k & A' & x_4 dx_1 - x_1 dx_4 \\ l & B' & x_4 dx_2 - x_2 dx_4 \\ m & C' & x_4 dx_3 - x_3 dx_4 \end{vmatrix}}{x_4^{\varrho} \cdot N(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

wo N eine ganze Function ν^{ten}, die A', B', C' solche $(n+\nu+\varrho-3)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1, \ldots, x_4$ werden. Setzt man, was erlaubt, $dx_4 = 0$, so sieht man, da der Schnitt von $x_4 = 0$ mit $f = 0$ nicht ausgezeichnet ist, also x_4 sich aus du herausheben muss, dass

$$\varrho = 1$$

ist. Setzt man weiter $x_4 = 0$, $dx_4 = 0$, so dass sich du auf die Schnittcurve von $f = 0$ mit $x_4 = 0$ beziehen soll, so weiss man, dass du von der Form wird

$$du = \frac{A_4 \cdot \begin{vmatrix} k & x_1 & dx_1 \\ l & x_2 & dx_2 \\ m & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}}{N(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

wo A_4 vom Grade $n + \nu - 3$. D. h. für $x_4 = 0$ werden A', B', C' bezüglich zu $A_4 x_1$, $A_4 x_2$, $A_4 x_3$, oder sie sind von der Form

$$A' = A_4 x_1 - A_1 x_4, \quad B' = A_4 x_2 - A_2 x_4, \quad C' = A_4 x_3 - A_3 x_4,$$

was die Formeln (11) sind.

Alsdann geht die Relation (5) vermöge (11) unmittelbar in die Relation (10)

$$\sum A_i f_i = 0$$

über, und du schreibt sich

$$du = \frac{\sum \pm A_2 x_3 dx_4}{N \cdot f_1},$$

was vermöge

$$\sum f_i x_i = 0, \quad \sum f_i dx_i = 0, \quad \sum f_i A_i = 0$$

den Ausdruck (9) liefert.

4. Nach dem Ausdruck (9) können die Functionen A_i überhaupt nur bis auf Grössen der Form

$$x_1 Q, \quad x_2 Q, \quad x_3 Q, \quad x_4 Q,$$

wo Q eine beliebige ganze Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades ist, bestimmt werden, da diese Grössen sich aus (9) wieder wegheben.

Aus diesem Grunde kann in der mit Hülfe von $f = 0$ zu erfüllenden Relation (10), d. h. in der Relation

$$\sum A_i f_i = R \cdot f,$$

der Factor R von f, auf der rechten Seite, zu einer ganz beliebigen ganzen Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades gemacht werden; denn ersetzt man die A_i durch die

$$\Theta_i = A_i + x_i Q,$$

so wird

$$\sum \Theta_i f_i = (R + nQ) f.$$

Insbesondere kann man, was auch R sei, $Q = -\frac{1}{n} R$ setzen, wonach

$$\sum \Theta_i f_i \equiv 0$$

wird, ohne Hülfe von $f = 0$. Der nächste Paragraph wird eine nähere Beziehung des Factors R zu den entsprechenden Grössen A_i liefern.

§ 2.

Bedingung der Integrabilität.

5. Nach Nr. 1 war

(1) $$du = \frac{A dy - B dx}{N \cdot F_z'},$$

wenn A, B, C drei ganze Functionen $(n + \nu - 2)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z, von der Form (11), Nr. 3, vorstellen, für welche vermöge $F(x, y, z) = 0$ die Relation (5), d. h. für welche die eine Identität

(2) $$AF_x' + BF_y' + CF_z' = S \cdot F$$

besteht, wo S eine ganze Function $(n + \nu - 3)^{\text{ten}}$ Grades [nämlich, vermöge (11) $= nA_4 +$ einer ganzen Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z] wird.

Wir führen jetzt die Bedingung der Integrabilität des totalen Differentials du ein:

$$(3)\quad \left(\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{T}{\mathsf{N}^2 F_z'^2}\cdot F,$$

in der T irgend eine ganze Function $(2n+2\nu-5)^{\text{ten}}$ Grades werden kann. Führt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ihre Werthe aus

$$F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ein, so schreibt sich (3) auch so:

$$\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{AF_x'+BF_y'}{\mathsf{N}F_z'}\right] = \frac{T}{\mathsf{N}^2\cdot F_z'^2}\cdot F;$$

aber aus der Identität (2) folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{AF_x'+BF_y'}{\mathsf{N}F_z'} = -\frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{SF}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} + \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{\partial \frac{S}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot F,$$

so dass die Bedingung der Integrabilität vermöge (2) übergeht in

$$\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} = \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{T'}{\mathsf{N}^2F_z'^2}\cdot F,$$

wo auch T' eine ganze Function $(2n+2\nu-5)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll. Da die übrigen Glieder ausser dem letzten nur N^2 zum Nenner haben, so muss T' durch $F_z'^2$ theilbar sein, und die Bedingung wird

$$(4)\quad \frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} = \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{N}^2}\cdot F,$$

wo T eine ganze Function $(2\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll.

Sei nun zunächst $\nu = 0$, $\mathsf{N} = 1$; so verschwindet T wegen seines Grades, und es folgt für den Factor S in der Identität (2) die Bestimmung:

$$(5)\quad S = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Für ein beliebiges ν geht aus der ausführlicher geschriebenen Bedingung (4)

$$(6)\qquad A\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}+B\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial y}+C\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial z} =\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}-S\right)\cdot \mathsf{N}-\mathsf{T}\cdot F$$

hervor, dass eine Identität existiren muss der Form:

$$(7)\qquad A\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}+B\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial y}+C\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial z}=G\cdot \mathsf{N}+H\cdot F,$$

wo G und H ganze Functionen von x, y, z, bez. vom Grade $n+\nu-3$ und $2\nu-3$ werden sollen; und alsdann ergiebt sich für S in (2) ein Ausdruck der Form:

$$(8)\qquad S=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}-G-G'\cdot F,$$

wo G die in (7) stehende ganze Function $(n+\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades, G' eine ganze Function $(\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll.

Man kann offenbar $G'=0$ annehmen, indem man $G'F$ sowohl in (7) als in (8) in G eingehen lässt.

Im Ganzen hat man so für A, B, C, N zwei Identitäten zu erfüllen; nämlich für A, B, C eine Relation der Form (2), und mit dem nach (8) daraus hervorgehenden G für N, A, B, C eine Relation der Form (7). Für $\nu=0$ hat man nur (2) und (5) zu erfüllen.

6. Es sollen jetzt für die homogene Darstellung $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ der Fläche die Bedingungen der vorigen Nummer entwickelt werden.

Schreibt man die (2) entsprechende Gleichung wie in Nr. 4:

$$(9)\qquad \sum A_i f_i = R\cdot f,$$

so wird durch den Vergleich mit (2), vermöge der Substitutionen von Nr. 3:

$$R=\frac{nA_4-x_4^{n+\nu-3}\cdot S}{x_4}.$$

Hiermit geht die Bedingungsgleichung (6), indem man N durch $\frac{N}{x_4^{\nu}}$, T durch $\frac{\mathsf{T}'}{x_4^{2\nu-3}}$ ersetzt, (11), Nr. 3 benutzt, und $\frac{\partial N}{\partial x_i}=\mathsf{N}_i$ schreibt über in:

$$\begin{aligned}(A_4x_1-A_1x_4)N_1+(A_4x_2-A_2x_4)N_2+(A_4x_3-A_3x_4)N_3\\ =\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}(A_4x_1-A_1x_4)+\frac{\partial}{\partial x_2}(A_4x_2-A_2x_4)+\frac{\partial}{\partial x_3}(A_4x_3-A_3x_4)\\ -nA_4+Rx_4\Big\}N-\mathsf{T}'\cdot f,\end{aligned}$$

oder, ausgeführt, in:

$$\sum_i^{1..4} A_i N_i = \left(\sum_i^{1...4} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - R\right) \cdot N + \frac{\mathrm{T}'}{x_4} \cdot f.$$

Diese Relation zeigt zunächst, dass T' durch x_4 theilbar sein muss; dass also T in (4) oder (6), Nr. 5, nur vom Grade $2\nu - 4$ in x, y, z war. Setzt man $\frac{\mathrm{T}'}{x_4} = T_1$, so hat man als Bedingung der Integrabilität hier:

$$\sum A_i N_i = \left(\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - R\right) \cdot N + T_1 \cdot f. \tag{10}$$

In (9) und (10) können R und T_1 irgend welche ganze Functionen, bez. $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ und $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades, von x_1, x_2, x_3, x_4 sein.

Die Bedingungen (9) und (10) lassen sich noch vereinfachen, wenn man, wie in Nr. 4, die Grössen A_i durch die Grössen

$$\Theta_i = A_i + x_i Q,$$

wo Q eine willkürliche ganze Function $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1, \ldots, x_4$ ist, ersetzt. Dann wird aus (9) und (10)

$$\sum \Theta_i f_i = (R + nQ) \cdot f, \tag{9'}$$

$$\sum \Theta_i N_i = \left(\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} - R - nQ\right) \cdot N + T_1 f. \tag{10'}$$

Setzt man also

$$Q = \frac{1}{n}\left(\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} - R\right),$$

so ergeben sich die beiden zu erfüllenden Identitäten für N und $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ in der Form

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \Theta_i f_i = f \cdot \sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i}, \quad \text{oder} \quad \sum \frac{\partial \frac{\Theta_i}{f}}{\partial x_i} = 0, \\ &\sum \Theta_i N_i = f \cdot T_1. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Setzt man aber

$$Q = -\frac{1}{n} R,$$

so folgt statt dessen einfacher:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \Theta_i f_i = 0, \\ &\sum \Theta_i N_i = N \sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} + T_1 f, \quad \text{oder} \quad \sum \frac{\partial \frac{\Theta_i}{N}}{\partial x_i} = -\frac{T_1}{N^2} f. \end{aligned}\right. \tag{11'}$$

Hat man die den Bedingungen (11) oder den Bedingungen (11′) identisch genügenden Grössen Θ_i gefunden, wobei T_1 eine beliebige ganze Function $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades werden darf, so werden die allgemeinsten Werthe der A_i:

$$A_i = \Theta_i + x_i \psi,$$

wenn für ψ eine willkürliche ganze Function $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1 \dots x_4$ gesetzt wird.

Insbesondere hat man für $\nu = 0$, $N = 1$ nach (9) und (10) nur die eine Identität

$$\sum A_i f_i = f \cdot \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{12}$$

zu erfüllen, die sich nach (11′) auch durch die beiden

$$\begin{cases} \sum \Theta_i f_i = 0, \\ \sum \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \tag{12′}$$

ersetzen lässt. Die Summen $\sum$ sind überall über $i = 1, 2, 3, 4$ zu erstrecken.

§ 3.

Umformung des Differentialausdrucks.

7. Man nehme drei ganze Functionen r^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4 an:

$$\varphi,\ \varphi',\ \psi,$$

und setze im Ausdruck (9), Nr. 2, von du die willkürlichen Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 den bezügl. 3-reihigen Determinanten aus den Differentialquotienten dieser drei Functionen gleich, nämlich

$$\sum k_i f_i = \sum \pm f_1 \varphi_2 \varphi_3' \psi_4.$$

Dann wird

$$du = \frac{r \cdot \begin{vmatrix} \sum A_i \varphi_i & \varphi & d\varphi \\ \sum A_i \varphi_i' & \varphi' & d\varphi' \\ \sum A_i \psi_i & \psi & d\psi \end{vmatrix}}{N \cdot \sum \pm f_1 \varphi_2 \varphi_3' \psi_4}.$$

Führt man nun zwei Parameter λ und μ ein mittels

$$\frac{\varphi}{\psi} = \lambda, \quad \frac{\varphi'}{\psi} = \mu,$$

so geht der Ausdruck von du, indem man die Zählerdeterminante desselben nach der ersten Verticalreihe ordnet, über in:

$$du = \frac{r\psi}{N\cdot\sum\pm f_1\varphi_2\varphi_3'\psi_4}\cdot\left\{\left(\psi\sum A_i\varphi_i' - \varphi'\sum A_i\psi_i\right)d\lambda - \left(\psi\sum A_i\varphi_i - \varphi\sum A_i\psi_i\right)d\mu\right\}$$

$$= \frac{r\psi^3}{N\cdot\sum\pm f_1\varphi_2\varphi_3'\psi_4}\cdot\sum A_i\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}d\lambda - \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}d\mu\right),$$

wobei noch (9) und (10) von Nr. 6 zu erfüllen sind. —

Führt man ebenso direct in (4), Nr. 1 zwei gebrochene Functionen Φ und Ψ von x, y, z als neue Variable ein, so wird du, indem man Zähler und Nenner mit $\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ multiplicirt, zu

$$du = \frac{\begin{vmatrix} \sum k\frac{\partial F}{\partial x}, & \sum k\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \sum k\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ \sum A\frac{\partial F}{\partial x}, & \sum A\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \sum A\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ 0 & d\Phi & d\Psi \end{vmatrix}}{\mathrm{N}\cdot\sum k\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}},$$

wo $\sum k\frac{\partial F}{\partial x}$ für $k\frac{\partial F}{\partial x} + l\frac{\partial F}{\partial y} + m\frac{\partial F}{\partial z}$, etc., steht. Wenn man also k, l, m so wählt, dass

$$\sum k\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad \sum k\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0,$$

so folgt

$$du = \frac{\left(A\frac{\partial\Phi}{\partial x} + B\frac{\partial\Phi}{\partial y} + C\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)d\Psi - \left(A\frac{\partial\Psi}{\partial x} + B\frac{\partial\Psi}{\partial y} + C\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\Phi}{\mathrm{N}\cdot\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}},$$

unter den Bedingungen (2) und (6) von Nr. 5.

§ 4.

Eindeutige Transformation des Differentialausdrucks.

8. In Erweiterung von Nr. 7 soll das Verhalten des Differentialausdrucks bei der allgemeinsten rationalen Transformation von f untersucht werden.

Vermöge einer rationalen Substitution

(1) $$x_i = \psi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo die ψ_i rationale ganze Functionen r^{ten} Grades von vier neuen homogenen Variablen y_1, y_2, y_3, y_4 vorstellen, werde die Fläche f, mit der Gleichung

(2) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$
in die Fläche F, mit der Gleichung
(3) $$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$
transformirt, nämlich
(4) $$f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = M(y_1, y_2; y_3, y_4) \cdot F(y_1, y_2, y_3, y_4),$$
oder
$$f = M \cdot F.$$

Sei auch
$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = F_h$$
gesetzt. Aus (4) wird, vermöge $F = 0$:
(5) $$\sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = M F_h,$$
also
(6) $$M \cdot \sum_h^{1..4} c_h F_h = \sum_i^{1...4} k_i f_i,$$
wenn man zwischen den willkürlichen Grössen k_i und den eben so willkürlichen Grössen c_h die Beziehungen herstellt
(7) $$k_i = \sum_h c_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

Seien ebenso vier neue ganze rationale Functionen C_1, C_2, C_3, C_4 der $y_1 \ldots y_4$ eingeführt, welche mit den vier Functionen A_1, A_2, A_3, A_4 der $x_1 \ldots x_4$ aus Nr. 2 vermöge der Beziehungen zusammenhängen:
(8) $$\frac{\Delta}{r} \cdot A_i = \sum_h C_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad (i = 1, \ldots, 4),$$
wobei
(9) $$\Delta = \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_4}{\partial y_4};$$
so wird
(10) $$\sum \pm k_1 A_2 x_3 \, dx_4 = \sum \pm c_1 C_2 y_3 \, dy_4.$$

Somit erhält man
(11) $$du = \frac{\sum \pm k_1 A_2 x_3 \, dx_4}{N \cdot \sum_i k_i f_i} = \frac{\sum \pm c_1 C_2 y_3 \, dy_4}{M \cdot N \cdot \sum_h c_h F_h}.$$

Diese Form von du muss noch eine Vereinfachung zulassen; denn in den, von der Transformation abhängenden, Punkten von $F = 0$, in welchen $M = 0$ wird, wird u nicht unendlich, da u in den entsprechenden Punkten von $f = 0$ nicht unendlich wird. Nach der bekannten Theorie der Abel'schen Integrale bei *einer* Variablen wird in der That, wenn man für die neuen Variablen $y_1, \ldots, y_4$ nicht-homogene ξ, η, ζ einführt und das transformirte du also in der Form schreibt:

$$du = \frac{Q\,d\xi - P\,d\eta}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \frac{\partial F}{\partial \zeta}},$$

vermöge $F = 0$ die Grösse P für *jedes gegebene* ξ und die Grösse Q für *jedes gegebene* η durch M theilbar, d. h. es werden vermöge $F = 0$ beide Grössen P und Q für alle Werthe von ξ und η durch M theilbar. Für die homogene Form (11) von du heisst diess: *es müssen alle Grössen $C_h y_k - C_k y_h$ vermöge $F = 0$ durch M theilbar und die Quotienten wieder auf die analoge Form zu bringen sein.*

Man hat also identische Relationen der Form:

$$(12) \qquad C_h y_k - C_k y_h = (B_h y_k - B_k y_h) \cdot M + L_{hk} \cdot F,$$

in welchen die B_h wieder ganze Functionen der $y_1, \ldots, y_4$ werden; ebenso die L_{hk}. Da ferner aus (12) Relationen der Art folgen:

$$L_{23} y_1 + L_{31} y_2 + L_{12} y_3 = 0, \quad \text{etc.},$$

so werden auch die L_{hk} von der Form:

$$(12') \qquad L_{hk} = R_h y_k - R_k y_h,$$

wo man für die R_h ganze Functionen der y setzen kann. Man kann also (12) auch so schreiben:

$$y_k(C_h - B_h M - R_h F) = y_h(C_k - B_k M - R_k F),$$

d. h. es wird

$$(13) \qquad C_h = B_h \cdot M + R_h \cdot F + y_h \cdot \psi,$$

wenn ψ eine ganze Function der y ist.

Setzt man noch

$$(14) \quad C_h - y_h \psi = C_h', \quad N(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathsf{N}(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

so wird mit Hülfe von $F = 0$:

$$(15) \quad du = \frac{\sum \pm c_1 C_2 y_3 dy_4}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \sum\limits_h c_h F_h} = \frac{\sum \pm c_1 C_2' y_3 dy_4}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \sum c_h F_h} = \frac{\sum \pm c_1 B_2 y_3 dy_4}{\mathsf{N} \cdot \sum c_h F_h}.$$

Eine weitere Umformung des letzten Ausdrucks wird in Nr. 11 gegeben werden.

9. Für die transformirten Grössen F, B_h und N sind natürlich die den Identitäten (9) und (10), Nr. 6, d. h.

$$(16) \qquad \sum_i A_i f_i = R \cdot f, \quad \sum_i \frac{\partial \frac{A_i}{N}}{\partial x_i} = \frac{R}{N} - \frac{T_1}{N^2} \cdot f,$$

entsprechenden Identitäten erfüllt, sobald dies für die f, A_i und N der Fall ist. Es ist indess nicht ohne Interesse, dies auch durch die Rechnung nachzuweisen.

Zunächst hat man aus (4) statt (5) die Identität:

$$\sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = F_h \cdot M + M_h \cdot F,$$

daher aus (8):

$$\frac{\Delta}{r} \sum_i A_i f_i = \sum_{h,i} C_h f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = M \sum_h C_h F_h + F \sum_h C_h M_h,$$

und nach (16) und (4):

$$(17) \qquad \sum_h C_h F_h = \left(\frac{1}{r} \Delta R - \frac{\sum C_h M_h}{M}\right) F = \mathrm{P} \cdot F.$$

Sei ferner

$$\Delta' = \frac{1}{\Delta} = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \frac{\partial y_4}{\partial x_4},$$

so wird

$$\frac{1}{r} A_i = \Delta' \sum_h C_h \frac{\partial x_i}{\partial y_h},$$

$$\frac{1}{r} \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \Delta' \sum_{h,i,k} \frac{\partial C_h}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} + \Delta' \sum_{h,i,k} C_h \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_{h,i,k,l} \Delta'_{kl} C_h \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_l \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h},$$

wo Δ'_{kl} die Unterdeterminante von Δ' nach dem Element $\frac{\partial y_k}{\partial x_l}$ bedeutet.

Benutzt man nun die Relationen

$$\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} = \frac{1}{0}, \text{ je nachdem } h = k \text{ oder verschieden von } k,$$

und die durch Differentiation nach x_l daraus hervorgehende, so wird das dritte Glied der rechten Seite gleich und entgegengesetzt dem zweiten, und es folgt:

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{r}{\Delta} \sum_h \frac{\partial C_h}{\partial y_k}.$$

Ebenso:

$$\sum_i \frac{\partial \frac{A_i}{N}}{\partial x_i} = \frac{r}{\Delta} \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{\mathrm{N}}}{\partial y_k},$$

also nach (16) und (17):

$$(18)\qquad \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \frac{1}{\mathsf{N}}\left(\mathsf{P} + \frac{\sum\limits_h C_h M_h}{M}\right) - \frac{\Delta}{r}\cdot\frac{T_1 M}{\mathsf{N}^2}\cdot F.$$

Für die B_h liefert dann (13) zunächst aus (17):

$$(19)\qquad \sum_h B_h F_h = \frac{1}{M}\left(\mathsf{P} - \sum_h R_h F_h - n'\psi\right)\cdot F = S\cdot F,$$

wenn n' die Ordnung von F bedeutet; und dann aus (18) und (19):

$$\sum_h \frac{\partial \frac{B_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h} - F\cdot\sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h} - \frac{1}{M\mathsf{N}}\sum_h R_h F_h - (\varrho+4)\frac{\psi}{M\mathsf{N}},$$

$$= \frac{1}{M}\left\{\sum \frac{\partial \frac{C_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} - \frac{1}{\mathsf{N}}\left(\frac{\Sigma C_h M_h}{M} + \sum R_h F_h + (\varrho+4)\psi\right)\right\} - \sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h}\cdot F,$$

$$= \frac{1}{\mathsf{N}}\{S + (n'-\varrho-4)\psi M\} - \left\{\frac{\Delta}{r}\frac{T_1}{\mathsf{N}^2} + \sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h}\right\}\cdot F,$$

wo ϱ die Dimension von $\frac{\psi}{M\mathsf{N}}$ ist. Nun wird, wenn M von der Ordnung μ ist, $n' = nr - \mu$, ferner ψ von der Ordnung $(n+\nu)r - 4$, also die Ordnung von $\frac{\psi}{M\mathsf{N}}$ zu $\varrho = (n+\nu)r - 4 - \mu - \nu r = n' - 4$. Somit hat man eine Relation:

$$(20)\qquad \sum_h \frac{\partial \frac{B_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \frac{S}{\mathsf{N}} - \frac{T_2}{\mathsf{N}^2}\cdot F,$$

und in (19) und (20) die (16) genau entsprechenden Identitäten für F, N und die B_h.

§ 5.

Endlichkeitsbedingungen der Differentialausdrücke in den mehrfachen Elementen der Fläche.

10. Die Integrale u unserer Differentialausdrücke (4), Nr. 1 oder (9), Nr. 2, werden einmal in den Punkten der Fläche unendlich, in

welchen N verschwindet; und könnten auch dort unendlich werden, wo der Nenner $\sum k_i f_i$ Null wird. Dieses Letztere kann, wegen der Unabhängigkeit der Integralwerthe von den Grössen k_i, nur da eintreten, wo alle f_i zugleich verschwinden, also in den *mehrfachen* Elementen der Fläche. Wie nun die Differentialausdrücke, d. h. die Grössen A_i von Nr. 2, (oder die Grössen A, B, C von Nr. 1), zu normiren sind, damit die Integrale nicht wegen des Nenners $\sum k_i f_i$ in den mehrfachen Elementen von f zu unendlich werden, kann man *aus den Formeln der eindeutigen Transformation* in Nr. 8 erschliessen.

Dies kann nach folgendem Gesichtspunkte geschehen:

Sei die auf die Fläche $F(y) = 0$, also auf die Grössen B_h von (15), Nr. 8, bezügliche Normirung gesucht. Durch die Transformation (1) von Nr. 8 gehen alle auf $f(x) = 0$ bezüglichen Integrale in solche über, die zur Fläche $F(y) = 0$ gehören; und ist, wie wir nun annehmen wollen, die Transformation (1) mit Hülfe von $F(y) = 0$ eine eindeutig umkehrbare, so gehen auch *alle* zu $F(y) = 0$ gehörigen Integrale in zu $f(x) = 0$ gehörige Integrale über. Bei einer Transformation (1) bleiben die Werthe der Integrale erhalten; sind dieselben insbesondere in einem Punkte von $f(x) = 0$ *endlich*, so tritt dasselbe für die transformirten Integrale in dem entsprechenden Punkte von $F(y) = 0$ ein.

Nun nehmen wir die bei gegebener Fläche $F(y) = 0$ noch willkürlichen Substitutionsformen $\psi_i(y)$ von (1), Nr. 8, die auch von beliebig hohem Grade r sind, so an, dass die Flächen $\psi_i(y) = 0$ durch alle vielfachen Elemente von $F(y) = 0$ *einfach* hindurchgehen, aber gegeneinander und gegen $F(y) = 0$ keine weitere Specialität haben. Alsdann werden einer vielfachen Curve oder einem isolirten vielfachen Punkt Σ von $F(y) = 0$ auf $f(x) = 0$ Curven S entsprechen, in welchen $f(x) = 0$ eine *einfachere* Singularität hat, als es bei $F(y) = 0$ in den entsprechenden Gebilden Σ der Fall war*). Kennt man also die zur Endlichkeit in den Gebilden S nöthige Normirung der auf $f(x) = 0$ bezüglichen Integrale, oder der A_i, so kann man daraus mittels der Formeln (1) — (13) von Nr. 8 die in den Gebilden Σ erforderliche Normirung für die B_h ermitteln.

In dem Falle, dass die Gebilde Σ gewöhnliche mehrfache Elemente von $F(y) = 0$, ohne weitere Singularität, sind, werden die entsprechenden Curven S einfache, nicht-specielle Curven von $f(x) = 0$. Längs dieser Curven haben aber die A_i überhaupt keine besondere Bedingung für die Endlichkeit der u zu erfüllen; so dass unsere einfache Trans-

*) Vergl. meine in der Einleitung citirte Abhandlung aus Math. Ann. II, ferner meine Note, Gött. Nachr. 1871, Nr. 9, und den Aufsatz über die singulären Werthsysteme, Math. Ann. IX.

formation unmittelbar das Verhalten der B_k in jenen Gebilden Σ liefert. Dieser Fall wird in Nummer 11 — 14 behandelt werden. — Bei höherer Singularität der Σ ist die Fläche $f(x) = 0$ erst noch analog weiter zu transformiren, bis man Σ entsprechende, nichtsinguläre, Curven erhält.

11. $F(y) = 0$ besitze eine *gewöhnliche j-fache Curve* Σ_j.

Die Flächen $\psi_i(y) = 0$, von der Ordnung r, sollen Σ_j zur einfachen Curve haben. Die entsprechende Curve S von $f(x) = 0$ wird eine einfache Curve für f.

Die Ordnung von F sei n', n die von f, μ die von M; so ist $n' = nr - \mu$. Für die $f(\psi_1, \ldots \psi_4)$ wird Σ_j eine n-fache Curve; daher ergiebt die Identität $f \equiv MF$ (Nr. 8), dass Σ_j für $M(y)$ zur $(n-j)$-fachen Curve wird. Für $N(\psi_1 \ldots \psi_4)$ wird Σ_j zur ν-fachen Curve; für die $A_i(\psi)$ zur $(n + \nu - 3)$-fachen Curve; für die $A_i \psi_k - A_k \psi_i$ also zur $(n + \nu - 2)$-fachen Curve.

Ferner ist bekannt*), dass $\Delta(y)$ die Curve Σ, längs deren alle ψ_i einfach verschwinden, zur 3-fachen Curve hat, während die Unterdeterminanten Δ_{ki} von Δ dieselbe nur zur 1-fachen Curve haben. Nach den aus (8) folgenden Ausdrücken für die C_k.

$$C_k = \frac{1}{r} \Sigma_i A_i \Delta_{ik}$$

wird also die Curve Σ_j für die C_k mindestens zur $(n + \nu - 2)$-fachen Curve.

Eine genauere Betrachtung zeigt nun, dass der Grad der Vielfachheit von Σ_j für die $C_h y_k - C_k y_h$ noch höher steigt. Zu dem Zwecke betrachte man die Gleichungen (10) und (7):

$$\Sigma \pm c_1 C_2 y_3 dy_4 = \Sigma \pm k_1 A_2 x_3 dx_4, \quad k_i = \Sigma_k c_k \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}.$$

Aendert man in der ersten Gleichung nur y_h, so folgt

$$(cCy)_h = \Sigma \pm k_1 A_2 x_3 \frac{\partial x_4}{\partial y_h},$$

wo $(cCy)_h$ den Factor von dy_h in $\Sigma \pm c_1 C_2 y_3 dy_4$ bedeutet; und die Vergleichung der Coefficienten der willkürlichen Grössen c_k liefert Beziehungen der Form:

$$\begin{aligned} C_1 y_2 - C_2 y_1 &= \left| A_i \quad x_i \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_3} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_4} \right|, \\ C_3 y_4 - C_4 y_3 &= \left| A_i \quad x_i \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right|, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo rechts Determinanten stehen, deren Horizontalreihen aus der hin-

---

*) S. den § 5 meines in der Einleitung citirten Aufsatzes, Math. Ann. Bd. II.

geschriebenen für $i = 1, 2, 3, 4$ hervorgehen. Nun sei für einen Punkt P der Curve Σ_j:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ a y_3 - b y_4 = 0,$$

und die Tangente der Curve Σ_j an dieser Stelle sei

$$y_1 = y_2 = 0;$$

dann hat man in der Nähe von P:

$$\psi_i = y_1 P_i + y_2 Q_i + \text{Terme höherer Dimension},$$

also

$$\Delta = \left| P_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_1},\ \ Q_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_2},\right.$$
$$\left. y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3},\qquad y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} \right|.$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

In P verschwinden daher auch alle *zweiten* Unterdeterminanten von Δ, ausgenommen die der Art

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1};$$

d. h. alle Ausdrücke $C_h y_k - C_k y_h$, ausgenommen $C_3 y_4 - C_4 y_3$, müssen P zum $(n + \nu - 1)$-fachen Punkt haben. Aber auch $C_3 y_4 - C_4 y_3$ verhält sich so; denn es wird dieser Ausdruck zu

$$\left| A_i,\ x_i,\ \frac{\partial x_i}{\partial y_1},\ \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right| = |A_i,\ y_1 P_i + y_2 Q_i,\ P_i,\ Q_i| + T = T$$

wo T in P einen $(n + \nu - 1)$-fachen Punkt hat.

Sei jetzt für P etwa $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Aus dem Umstande, dass P für die C_h mindestens ein $(n + \nu - 2)$-facher Punkt, für die $C_1 y_4 - C_4 y_1$, $C_2 y_4 - C_4 y_2$, $C_3 y_4 - C_4 y_3$ ein $(n + \nu - 1)$-facher Punkt ist, folgt weiter, dass P für C_1, C_2, C_3 ein $(n + \nu - 1)$-facher Punkt, nur für C_4 ein $(n + \nu - 2)$-facher Punkt wird. Und hieraus folgt wieder, dass die drei Ausdrücke

$$C_1 y_2 - C_2 y_1,\quad C_1 y_3 - C_3 y_1,\quad C_2 y_3 - C_3 y_1$$

den Punkt P zum $(n + \nu)$-fachen, die übrigen drei P zum $(n + \nu - 1)$-fachen Punkt haben.

Wegen (12), Nr. 8, und weil M in Σ_j eine $(n - j)$-fache Curve hat, ergiebt sich daher für die Ausdrücke $B_h y_k - B_k y_h$ von (15), Nr. 8:

Die Flächen $B_h y_k - B_k y_h$ treffen $F = 0$ in der j-fachen Curve Σ_j von F wie Flächen mit $[(n + \nu - 1) - (n - j)]$- $= (\nu + j - 1)$-facher Curve Σ_j.

12. Diese Eigenschaft erlaubt nun, den Differentialausdruck (15) von Nr. 8 für $F(y)=0$ noch einfacher zu schreiben. Denn

$$N(\psi_1, \ldots \psi_4) = \mathsf{N}(y) = 0$$

möge die Fläche $F(y)=0$ ausser in den vielfachen Curven Σ_j von F noch in der einfachen Curve Σ^0 von F schneiden; so sei $\mathsf{N}'(y)=0$ die Gleichung irgend einer Fläche, welche nur der *einen* Eigenschaft zu genügen hat, durch Σ^0 zu gehen. Man hat alsdann eine Identität:

$$\mathsf{N}' \cdot (B_h y_k - B_k y_h) = \mathsf{N}\,(B_h' y_k - B_k' y_h) + K_{hk} \cdot F,$$

da sich die linke Seite in jeder j-fachen Curve von F, die eine ν-fache Curve von N ist, nach dem Obigen wie eine Fläche mit $(\nu+j-1)$-facher Curve verhält.*) Der Ausdruck (15) geht mit Hülfe von $F=0$ über in

$$du = \frac{\Sigma \pm c_1 B_2' y_3 dy_4}{\mathsf{N}' \cdot \Sigma_k c_k F_k}.$$

Dabei werden die $B_h' y_k - B_k' y_h = 0$ Flächen, welche sich längs Σ_j wie Flächen mit $(\alpha+j-1)$-facher Curve verhalten, wenn $\mathsf{N}'=0$ diese Curve zur α-*fachen* Curve hatte; *insbesondere wird Σ_j für die*

$$B_h' y_k - B_k' y_h = 0$$

nur eine $(j-1)$-fache Curve, d. h. diese Flächen sind in den Σ_j zu F adjungirt, wenn, was möglich ist, die Fläche $\mathsf{N}'=0$ durch die vielfachen Curven Σ_j von F gar nicht hindurchgelegt wird.

Das entsprechende Verhalten der B_h' soll ebenfalls erwähnt werden. Ordnet man in einem Punkte P von Σ_j, welcher die Coordinaten $y_1=y_2=y_3=0$ habe, die B_k' nach absteigenden Dimensionen von y_4, und führt die Bedingungen ein, dass die drei Ausdrücke

$$B_1' y_4 - B_4' y_1, \quad B_2' y_4 - B_4' y_2, \quad B_3' y_4 - B_4' y_3,$$

nach y_4 entwickelt, mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen, so ergeben sich für die B_k' Ausdrücke der Art:

$$B_1' = y_1 L + G_{j-1}^{(1)}, \quad B_2' = y_2 L + G_{j-1}^{(2)}, \quad B_3' = y_3 L + G_{j-1}^{(3)},$$
$$B_4' = y_4 L + G_{j-2}.$$

wo $G_{j-1}^{(i)}$, G_{j-2} Ausdrücke sind, die mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$, bez. $(j-2)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen, während L willkürlich ist. Man sieht, dass alsdann die drei Ausdrücke

$$B_1' y_2 - B_2' y_1, \quad B_1' y_3 - B_3' y_1, \quad B_2' y_3 - B_3' y_2,$$

---

*) Vergl. meinen „Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen", Math. Ann. Bd. VI.

nach aufsteigenden Dimensionen in y_1, y_2, y_3 entwickelt, von selbst mit Gliedern der Dimension j anfangen.

Die für die B_h' einzuführenden, für die *Endlichkeit* der Integrale in den vielfachen Curven Σ_j, für welche N′ nicht verschwindet, nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind also eben die, dass die Flächen $B_k' y_k - B_i' y_k$ die Curven Σ_j bez. zu $(j-1)$-fachen Curven haben. —

Alsdann wird der Integralwerth auch in keinem Punkte dieser Curven *unbestimmt*. Denn in den entsprechenden einfachen Punkten von $f(x) = 0$ sind diese Werthe bestimmte.

Indessen bedarf diese Aussage noch einer näheren Erklärung. Die in Nr. (11) und (12) gegebenen Entwicklungen beziehen sich auf alle die Fälle, in welchen einer mehrfachen Curve Σ_j von F durch eine einfache Transformation der Art (1), Nr. 8, eine *einfache* Curve von f entspricht. Dieses findet zunächst dann statt, wenn längs Σ_j die j Tangentenebenen eines jeden Punktes, einzelne Punkte ausgenommen, endlich getrennte sind. Den j getrennten Blättern an einer solchen Stelle von F entsprechen dann j endlich verschiedene Punkte von f; so dass das Integral an dieser Stelle im Allgemeinen j verschiedene bestimmte Werthe annimmt, bez. den j Elementen von F zugehörig.

Wenn dann, wie es im Allgemeinen geschieht, die Tangentenebenen von F längs Σ_j von Punkt zu Punkt variiren, so wird es immer eine endliche Zahl von Stellen von Σ_j geben, an welchen zwei oder mehr der j Tangentenebenen consecutive werden. An einer solchen Stelle werden nur die entsprechenden der j Werthe von u einander gleich.

Aber die Transformation in die einfache Curve von f findet auch dann statt, wenn die j Tangentenebenen an *jeder* Stelle von Σ_j consecutive werden, vorausgesetzt nur, dass keine weitere Singularität hinzutritt. Also z. B. im Fall einer gewöhnlichen Rückkehr-(Cuspidal-)curve Σ_2 von F; denn einer solchen Curve Σ_2 entspricht auf f eine einfache Curve S, und zwar den zwei Elementen von F an einer Stelle Π von Σ_2 zwei benachbarte Flächenelemente von f, von denen eines an einer Stelle P von S, das andere in einer festen, im Allgemeinen nicht mit der von S zusammenfallenden, Richtung dem Punkt P benachbart liegt. Dann hat das Integral an jeder Stelle von Σ_j nur *einen* bestimmten Werth.

13. $F(y) = 0$ besitze einen *j-fachen conischen Knotenpunkt K_j*.

Indem man auch hier, wie in Nr. 11, die Flächen r^{ter} Ordnung, $\psi_i = 0$, durch K_j einfach hindurchlegt, folgt, wie dort, dass K_j für M ein $(n-j)$-facher, für die $A_i(\psi)$ ein $(n+\nu-3)$-facher, für die $A_i\psi_k - A_k\psi_i$ ein $(n+\nu-2)$-facher, für N ein ν-facher Punkt wird.

Giebt man dem Punkt K_j die Coordinaten

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

so wird:

$$\psi_i = y_1 P_i + y_2 Q_i + y_3 R_i,$$

also

$$\Delta = \left| P_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_1}, \quad Q_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_2}, \right.$$
$$\left. R_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_3}, \quad y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|.$$

Daher wird K_j für Δ ein Doppelpunkt, für die Δ_{i4} $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein 0-facher Punkt, für die Δ_{i1}, Δ_{i2}, Δ_{i3} ein einfacher Punkt; woraus schon folgt, dass derselbe für C_4 zum $(n+\nu-3)$-fachen, für C_1, C_2, C_3 zum $(n+\nu-2)$-fachen Punkt, für die $C_h y_k - C_k y_h$ also zum $(n+\nu-2)$-fachen oder höheren Punkt wird. Betrachtet man aber noch, nach Nr. 11, die Formel

$$C_1 y_2 - C_2 y_1 = \left| A_i, \; y_1 P_i + y_2 Q_i + y_3 R_i, \; R_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_3}, \right.$$
$$\left. y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|$$

$$= \left| A_i, \; \frac{1}{r-1} \left(y_1 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial P_i}{\partial y_k} y_k + y_2 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} y_k + y_3 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial R_i}{\partial y_k} y_k \right), \right.$$
$$\left. R_i + \cdots, \; y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|,$$

so sieht man, dass

$$C_1 y_2 - C_2 y_1, \quad C_1 y_3 - C_3 y_1, \quad C_2 y_3 - C_3 y_2$$

den Punkt K_j zum $(n+\nu)$-fachen Punkt haben. Hieraus folgt:

Die $B_h y_k - B_k y_h$ treffen F in K_j im Allgemeinen wie Flächen mit $(\nu+j-2)$-fachem Punkte; $B_1 y_2 - B_2 y_1$, $B_1 y_3 - B_3 y_1$, $B_2 y_3 - B_3 y_2$ wie Flächen mit $(\nu+j)$-fachem Punkte.

Führt man dann weiter, wie in Nr. 12, N′ statt N ein, wo die Fläche N′ die Fläche F in K_j nur wie eine Fläche mit α-fachem Punkte trifft, so werden die entsprechenden Flächen $B_h' y_k - B_k' y_h$ sich in K_j auch nur wie Flächen mit $(\alpha+j-2)$-fachem Punkte,

$$B_1' y_2 - B_2' y_1, \quad B_1' y_3 - B_3' y_1, \quad B_2' y_3 - B_3' y_2$$

wie Flächen mit $(\alpha+j)$-fachem Punkte verhalten, wobei $\alpha = 0$ wird, sobald N′ durch K_j nicht hindurchzugehen braucht.

Ordnet man die B_k' wieder nach absteigenden Potenzen von y_4 und führt, im Falle $\alpha = 0$ ist, erst die Bedingungen ein, dass die $B_1' y_4 - B_4' y_1$ etc. den Punkt zum $(j-2)$-fachen Punkt, dann die, dass die $B_1' y_2 - B_2' y_1$ etc. denselben zum j-fachen Punkt haben, so ergiebt sich für die B_k'

$$B_1' = y_1 L + G_{j-1}^{(1)},\quad B_2' = y_2 L + G_{j-1}^{(2)},\quad B_3' = y_3 L + G_{j-1}^{(3)},$$
$$B_4' = y_4 L + G_{j-3}$$

wo $G_{j-1}^{(i)}$, G_{j-3} niedrigstens mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$, bez. $(j-3)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen und L willkürlich ist.

Daher werden, wenn $\alpha = 0$ *ist, die Glieder* $(j-2)^{ter}$ *Dimension in* y_1, y_2, y_3 *von*

$$B_1' y_4 - B_4' y_1,\quad B_2' y_4 - B_4' y_2,\quad B_3' y_4 - B_4' y_3$$

bezüglich von der Form:

$$y_1 X_{j-3},\quad y_2 X_{j-3},\quad y_3 X_{j-3},$$

wo X_{j-3} *für die drei Ausdrücke dasselbe ist,* nämlich das Glied niedrigster Dimension aus $-G_{j-3}$.

Im Fall eines *Doppelpunktes*, $j = 2$, werden in K_2: $B_1' = 0$, $B_2' = 0$, $B_3' = 0$, also *alle* Ausdrücke $B_h' y_k - B_k' y_h$ in K_2 verschwinden.

14. Was den *Werth* des Integrals u in dem j-fachen Punkt K_j betrifft, so wird derselbe im Allgemeinen *unbestimmt*, d. h. er variirt von Element zu Element in den unendlich vielen, zu K_j gehörigen, Elementen der Fläche F. Denn diese Werthe sind diejenigen, welche das Integral u in den unendlich vielen Elementen der Curve j^{ten} Grades, S, hat, welche dem Punkt K_j auf f entspricht; in dieser Curve S wird aber u nach dem Vorhergehenden zu einem gewöhnlichen allenthalben endlichen Abel'schen Integral, das von Punkt zu Punkt variiren wird. Im Falle des *Doppelpunkts*, $j = 2$, wird S eine Curve 2^{ten} Grades*), bei der kein von einer Constanten verschiedenes endliches Integral u existirt; so dass alsdann u in K_j nur *einen* Werth hat.

Dasselbe ergiebt sich auch unmittelbar aus den obigen Formeln für die B_h'. Denn hiernach wird, indem N' constant wird:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & G_{j-1}^{(1)} & y_1 & dy_1 \\ c_2 & G_{j-1}^{(2)} & y_2 & dy_2 \\ c_3 & G_{j-1}^{(3)} & y_3 & dy_3 \\ c_4 & G_{j-3} & y_4 & dy_4 \end{vmatrix}}{\sum_i^{1\cdots 4} c_i F_i} = \frac{-X_{j-3}\cdot \Sigma \pm c_1 y_2 dy_3}{\sum_i^{1\cdots 3} c_i T_i} + dQ,$$

wo dQ in K_j einwerthig und der erste Theil ein gewöhnliches Abel'sches Curvendifferential ist, das sich auf den Tangentenkegel $T = 0$ in K_j bezieht und das $= 0$ wird für $j = 2$.

*) Vergl. meine o. c. Abh. in Math. Ann. Bd. II, § 1.

Zugleich erkennt man die für die Endlichkeit nothwendige Modification, wenn der Tangentenkegel T von F in K_j mehrfache Kanten enthalten sollte. Dem entsprechen Punkte von derselben Vielfachheit in der Curve S von f (da nach unserer Annahme über die ψ_i sich die Transformation des Kegels in S wie eine lineare verhält), in welchen also der Zähler des Differentialausdrucks sich *adjungirt* verhalten muss; d. h. X_{j-3} muss zum Tangentenkegel T von K_j adjungirt sein. Ist insbesondere dieser Kegel in K_j vom Geschlecht 0, so wird u in K_j nur *einen* Werth haben.

§ 6.

Andere Methoden zur Untersuchung der Endlichkeitsbedingungen des § 5.

15. An Stelle der Untersuchung Nr. 11—12 über die Endlichkeitsbedingungen der Integrale längs einer vielfachen Curve der Fläche lässt sich eine wesentlich einfachere Betrachtung setzen, nämlich die Zurückführung auf die bekannte Normirung der Abel'schen Curvenintegrale.

Soll u, wo, wie in Nr. 1:

$$du = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathsf{N}\,.\,F_z'}$$

sei, in allen Punkten einer j-fachen Curve Σ_j einer Fläche $F(x,y,z)=0$, für welche N nicht verschwinde, endlich sein, so ist jedenfalls nothwendige Bedingung, dass die Fläche $A=0$ von der Ebene $x=a$ in einer Curve geschnitten werde, welche die Schnittpunkte von Σ_j mit $x=a$ zu $(j-1)$-fachen Punkten hat, was auch a sei; d. h. aber, dass A die Curve Σ_j zur $(j-1)$-fachen Curve habe. Dasselbe folgt für B wenn man die Schnitte mit $x=b$, bei beliebigem b, betrachtet.

Somit ergeben sich die Bedingungen von Nr. 12 für A, B, C. Dass dieselben zur Endlichkeit auch hinreichend sind, ersieht man daraus, dass an einem Punkt von Σ_j die Richtung $x=a$, in welcher die Endlichkeit stattfindet, bei dem willkürlichen Coordinatensystem jede beliebige Richtung in diesem Punkte vorstellt.

Zugleich aber erledigt sich auf diesem Wege der Fall einer ganz *beliebig singulären* vielfachen Curve von

$$F(x,y,z)=0 \quad \text{oder} \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0.$$

Betrachtet man auch hier die Schnittcurven der Fläche F mit dem Ebenenbüschel $x=a$, bez. $y=b$, so ergiebt sich:

Zur Endlichkeit der Integrale längs einer Curve Σ von F oder f, in der N nicht verschwindet, ist nothwendig und hinreichend, dass die Flächen A, B, C zu F, oder die Flächen $A_i x_k - A_k x_i$ zu f, längs Σ adjungirt sind.

16. Auch die am Schlusse von Nr. 13 gewonnenen Resultate, die Bedingungen für die in einem Knotenpunkte K_j endlichen Integrale,

lassen sich durch eine, der von Nr. 14 analoge, Betrachtung nun unmittelbar einsehen. Geht man von dem auf $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ bezüglichen Ausdruck (12), Nr. 3, aus, in dem man $dx_4 = 0$ setzen darf:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A_4 x_1 - A_1 x_4 & dx_1 \\ l & A_4 x_2 - A_2 x_4 & dx_2 \\ m & A_4 x_3 - A_3 x_4 & dx_3 \end{vmatrix}}{N.(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

und betrachtet denselben, wenn ein j-facher Knotenpunkt K_j von f die Coordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ hat, für kleine Werthe von x_1, x_2, x_3, so muss sich u, wie schon in Nr. 14 gesagt ist, wenn es in K_j nicht unendlich werden soll, in der Nähe von $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ verhalten wie ein auf den Tangentenkegel T von f in K_j bezügliches gewöhnliches Abel'sches Integral v. Der Nenner des Differentials dieses Integrals v wird, wenn $N = 0$ den Punkt K_j zum α-fachen Punkt hat, also

$$N = x_4^{\nu-\alpha} N_\alpha + \cdots$$

ist, zu

$$N_\alpha (kT_1 + lT_2 + mT_3),$$

der Zähler also zu

$$X_{j+\alpha-3} \cdot \begin{vmatrix} k & x_1 & dx_1 \\ l & x_2 & dx_2 \\ m & x_3 & dx_3 \end{vmatrix},$$

wo $\frac{X_{j+\alpha-3}}{N_\alpha}$ ein Ausdruck der Dimension $j-3$ in x_1, x_2, x_3 ist, welcher sich zu $T = 0$ adjungirt verhalten muss, wenn das Integral v in den vielfachen Kanten von $T = 0$ endlich bleiben soll. Damit sich aber du für kleine Werthe von x_1, x_2, x_3 auf dieses Differential von v für jeden Werth von k, l, m reducirt, wird nothwendig bis auf Glieder höherer Dimension in x_1, x_2, x_3, mit Hülfe von $f = 0$:

$$A_4 x_1 - A_1 x_4 = x_1 X_{j+\alpha-3}, \quad A_4 x_2 - A_2 x_4 = x_2 X_{j+\alpha-3},$$
$$A_4 x_3 - A_3 x_4 = x_3 X_{j+\alpha-3},$$

was für den Fall $\alpha = 0$ die am Schlusse von Nr. 13 angegebene Form ist.

Sollte aber $f = 0$ in K_j eine höhere, etwa uniplanare, Singularität besitzen, so reicht die Betrachtung dieser Nummer nicht aus, man muss dieselbe vielmehr auf dem Wege von Nr. 13 weiter verfolgen.

17. Auch die in Nr. 4 gegebene Forderung, dass sich vier solche ganze Functionen $(n+\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades in x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\Theta_i = A_i + x_i Q$$

bestimmen lassen, für welche

$$\sum_i \Theta_i f_i \equiv 0,$$

ohne Hülfe von $f=0$, liefert eine Reihe von Eigenschaften für die Ausdrücke Θ_i oder die $A_i x_k - A_k x_i$, darunter auch Bedingungen der Endlichkeit der Integrale.

So folgt zuerst, dass in einem Punkt der Fläche f, welcher

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

zur Tangentenebene hat, auch

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$$

verschwindet. Denn sei der Punkt etwa $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit der Tangentenebene $x_1 = 0$, so wird in diesem Punkte $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, also $\Theta_1 = 0$ und $A_1 = 0$; hieraus weiter auch $A_1 x_4 - A_4 x_1 = 0$ oder $A = 0$.

Sei ferner K_2 ein konischer Doppelpunkt von f, ohne Doppelkante, mit den Coordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Entwickelt man den Ausdruck $\Sigma\Theta_i f_i$ nach absteigenden Dimensionen von x_4, so folgt schon aus dem Gliede 1ter Dimension in x_1, x_2, x_3, dass $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, also auch A_1, A_2, A_3 und alle $A_i x_k - A_k x_i$ im Doppelpunkt K_2 verschwinden müssen.

Hat aber K_2 eine Doppelkante, so dass der Kegel in K_2 etwa zu $x_1 x_2$ wird, so ergeben die Glieder erster Dimension von $\Sigma\Theta_i f_i$ nur das Verschwinden von Θ_1, Θ_2 in K_2; die Glieder 2ter Dimension dann, sobald in der Entwicklung von f:

$$f = x_4^{n-2} \cdot x_1 x_2 + x_4^{n-3} \psi_3 + x_4^{n-4} \psi_4 + \cdots$$

die Grösse ψ_3 nicht für $x_1 = x_2 = 0$ verschwindet, auch das Verschwinden von Θ_3 in K_2, und ferner für die Glieder erster Dimension von Θ_1, Θ_2 die Formen

$$\Theta_1 = a_1 x_1, \quad \Theta_2 = a_2 x_2.$$

In diesem Falle verschwinden also ebenfalls alle $A_i x_k - A_k x_i$ im Doppelpunkt und $A_1 x_4 - A_4 x_1$, $A_2 x_4 - A_4 x_2$, d. h. A und B, haben daselbst bez. x_1 und x_2 zur Tangentenebene.

Auch für den conischen j-fachen Punkt ergeben sich auf diese Weise die in Nr. 13 gefundenen Bedingungen.

Wie man sieht, zeigt dieser Weg zwar, dass die im Früheren als solche gefundenen *Endlichkeits*bedingungen der Integrale in den vielfachen Elementen der Fläche nicht unabhängig sind von den *Existenz*bedingungen der Integrale selbst; aber auf der einen Seite trennt derselbe die beiden Classen von Bedingungen nicht von einander, auf der andern Seite kann er auch nicht in allen Fällen alle Endlichkeitsbedingungen liefern.

Das letztere tritt zum Beispiel bei einer mehrfachen Curve auf. Ist f etwa eine Kegelfläche mit mehrfachen Kanten:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo f kein x_4 enthält, so wird die obige Identität bei *beliebigem* Θ_4 befriedigt durch $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_3 = 0$; und selbst die Hinzunahme der Bedingung der Integrabilität $\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} = 0$, wenn $N = 1$ ist, verlangt nur, dass Θ_4 von x_4 unabhängig genommen werde. Aber das daraus hervorgehende Differential

$$du = \frac{\Theta_4 . \Sigma \pm k_1 x_2 dx_3}{\Sigma k_i f_i}$$

liefert nur dann ein endliches Integral, wenn Θ_4 ausserdem noch die Bedingung erfüllt, in den vielfachen Kanten von $f = 0$ zu f adjungirt zu sein.

§ 7.

Beziehungen zwischen verschiedenen Differentialausdrücken.

18. Zwei zu einer Fläche F, bez. f, gehörige Differentialausdrücke

$$du = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathsf{N} \cdot F_z'} = \frac{\Sigma \pm k_1 A_2 x_3 dx_4}{N \cdot \Sigma k_i f_i},$$

$$du' = \frac{A'dy - B'dx}{\mathsf{N}' \cdot F_z'} = \frac{\Sigma \pm k_1 A_2' x_3 dx_4}{N' \cdot \Sigma k_i f_i},$$

und deren Integrale u, u', sollen dann *von einander unabhängig* heissen, wenn die Functionaldeterminante von u, u':

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x},$$

also auch

$$AB' - BA',$$

nicht für alle Punkte von F verschwindet. Da aus

$$A F_x' + B F_y' + C F_z' = 0,$$
$$A' F_x' + B' F_y' + C' F_z' = 0$$

folgt:

$$\frac{BC' - CB'}{F_x'} = \frac{CA' - AC'}{F_y'} = \frac{AB' - BA'}{F_z'},$$

so hat man dann auch

$$BC' - CB' \neq 0, \qquad CA' - AC' \neq 0.$$

Nach § 1, (11) wird

$$x_4^{2n+\nu+\nu'-5}(AB' - BA') = \begin{vmatrix} A_1 & A_1' & x_1 \\ A_2 & A_2' & x_2 \\ A_4 & A_4' & x_4 \end{vmatrix},$$

so dass sich die Bedingung auch schreibt: es soll

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4,$$

bei irgend *einem* Werthsystem der k_i nicht für *alle* Punkte von f verschwinden.

19. Es soll nun bewiesen werden, dass der von den k_i unabhängige Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{\Sigma k_i f_i} = Q$$

eine *ganze* Function der Coordinaten wird (mit Hülfe von $f = 0$) und dass $\frac{Q}{N \cdot N'}$ sich zu f adjungirt verhält.

Zunächst möge f wieder nur gewöhnliche vielfache Curven enthalten. Eine solche j-fache Curve von f, Σ_j, wird für $\Sigma k_i f_i$ eine $(j-1)$-fache Curve, für $\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$ aber, wie $AB' - BA'$ zeigt, wie $[2(j-1)+\alpha+\alpha']$-fache Curve sein, wenn N und N' bez. α- und α'-fach hindurchgehen. Folglich wird, nach meinem in Nr. 12 citirten Satze aus Math. Ann. Bd. VI.

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4 = Q \cdot \Sigma k_i f_i + L \cdot f,$$

wobei Q eine *ganze* Function ist, welche noch $(j-1+\alpha+\alpha')$-fach durch Σ_j geht. $\frac{Q}{N N'}$ wird also ein rationaler Ausdruck, der $(n-4)^{\text{ten}}$ Dimension, der sich in Σ_j adjungirt verhält.

Nach Nr. 13 verhält sich in einem isolirten j-fachen Punkte von f der Ausdruck $\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{N \cdot N'}$ wie eine Fläche mit $(2j-3)$-fachem Punkte, $\frac{Q}{N N'}$ also wie eine Fläche mit $(j-2)$-fachem Punkte, d. h. zu f adjungirt; und verschwindet noch ausserdem in einem Doppelpunkt von f.

Zur Erledigung einer singulären vielfachen Curve schlagen wir wieder den Weg von Nr. 10 ein, indem wir eine solche Curve Σ, auf einer Fläche $F(y)$ untersuchen, der auf f eine nicht-singuläre Curve S entspricht.

Nun wird mit den Bezeichnungen der Nr. 8:

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$$

$$= \left| \sum_h c_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{r}{\Delta} \sum_h C_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{r}{\Delta} \sum_h C_h' \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{1}{r} \sum_h y_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} \right|$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$= \frac{r}{\Delta} \Sigma \pm c_1 C_2 C_3 y_4 = \frac{r}{\Delta} M^2 \Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4,$$

also

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{N \cdot N' \cdot \Sigma k_i f_i} = \frac{r M}{\Delta} \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4}{\mathsf{N} \cdot \mathsf{N}' \cdot \Sigma c_h F_h'},$$

vermöge

$$F = 0,$$

wobei

$$N(\psi) \cdot N'(\psi) = \mathsf{N}(y) \cdot \mathsf{N}'(y)$$

ist.

Für die Fläche f dürfen wir annehmen, dass

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3 x_4}{\Sigma k_i f_i} = Q$$

vermöge $f=0$ eine ganze Function wird, und dass $\frac{Q}{NN'}$, ein Ausdruck $(n-4)^{\text{ter}}$ Dimension, zu f adjungirt sei. Nun ist aber, nach meinem in der Einleitung citirten Aufsatz, Math. Ann. Bd. VIII, § 9:

$$Q(\psi_1, \cdots \psi_4) \cdot \Delta = M \cdot Q',$$

wo Q' vermöge $F=0$ eine ganze Function der Coordinaten y wird, und wo $\frac{Q'}{\mathsf{N}\cdot\mathsf{N}'}$ sich zu F adjungirt verhält, wenn $\frac{Q}{N\cdot N'}$ sich zu f so verhält; zugleich wird $\frac{Q'}{\mathsf{N}\cdot\mathsf{N}'}$ von der $(n'-4)^{\text{ten}}$ Dimension, wenn F vom Grade n' ist. Dies sagt also aus, dass

$$\frac{r\,\Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4}{\Sigma c_h F_h} = Q'$$

und $\frac{Q'}{\mathsf{N}\mathsf{N}'}$ längs der singulären Curve Σ_j von $F(y)$ die im Satze verlangten Eigenschaften besitzen.

Man erkennt hierdurch zugleich das sehr specielle Verhalten der Ausdrücke $AB'-A'B$ oder $\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$ längs einer singulären Curve von f. So haben dieselbe eine Rückkehrcurve von f, in der N und N' nicht verschwinden mögen, nicht nur zur Doppelcurve, sondern berühren noch an jeder Stelle dieser Curve mit *einem* Blatt das Element der Fläche f.

20. Als unmittelbare Anwendung von Nr. 19 folgt, dass eine Fläche 4^{ter} Ordnung, $f=0$, nicht zwei von einander unabhängige *endliche* Integrale (Integrale *erster* Gattung) besitzen kann. Denn für diese wäre $N=1$, $N'=1$ zu setzen und

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4 \equiv Q \sum_i k_i f_i,$$

eine Gleichung, welche *ohne* Hülfe von $f=0$ erfüllt sein müsste, da das Ganze nur von der 3^{ten} Dimension in den Coordinaten ist; und in welcher weiter die Constante Q nicht $=0$ sein darf, da die Integrale von einander unabhängig sein sollen. Setzt man aber die willkürlichen Grössen $k_i = x_i$, so geht dieselbe über in

$$f \equiv 0 \text{ für } \textit{alle} \text{ Werthsysteme der } x_i.$$

21. In meinem o. c. Aufsatze, Math. Ann. Bd. VIII, habe ich das *Flächengeschlecht* p einer Fläche f, n^{ter} Ordnung definirt durch die Anzahl p der linear-unabhängigen, zu f adjungirten Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, φ_f. Zu diesen Flächen φ_f gehören die in Nr. 19 gefundenen Flächen Q, für den Fall zweier unabhängiger *endlicher* Integrale, also für $N=1$, $N'=1$.

Hat eine Fläche mehr als zwei unabhängige endliche Integrale, so sind, im Sinne von Nr. 18, die übrigen natürlich von diesen zwei, u, u', abhängig, können aber *linear*-unabhängig von denselben sein. Lineare homogene Verbindungen von u und u' sollen nicht als neue Integrale bezeichnet werden. Dann hat man den Satz:

Eine Fläche vom Flächengeschlecht 1 kann höchstens zwei endliche Integrale besitzen.

Denn im Falle $p = 1$ existirt nur *eine* Fläche $\varphi_f = Q$. Für drei Integrale u, u', u'' muss also sein:

$$A'B'' - B'A'' = \alpha Q \cdot F_z', \quad A''B - B''A = \alpha' Q \cdot F_z',$$
$$AB' - BA' = \alpha'' Q \cdot F_z',$$

wo die $\alpha, \alpha', \alpha''$ Constanten werden; und hieraus:

$$\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' = 0, \quad \alpha B + \alpha' B' + \alpha'' B'' = 0,$$

d. h.

$$\alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'' = 0.$$

§ 8.

Die Flächen vom Flächengeschlecht 1 mit zwei unabhängigen endlichen Integralen.

22. In vorhergehender Nummer ist bewiesen worden, dass eine Fläche F vom Flächengeschlecht 1 höchstens zwei unabhängige totale Differentiale du, du' erster Gattung besitzen kann, indem alle übrigen zu F gehörigen Differentiale dieser Art lineare homogene Functionen von du, du' werden müssen.

Jetzt soll gezeigt werden, *dass, im Falle eine Fläche F vom Flächengeschlecht 1 zwei unabhängige totale Differentialausdrücke erster Gattung du, du' besitzt, die Coordinaten der Fläche sich als eindeutige Functionen der beiden Integrale u, u' ausdrücken lassen, welche für alle endlichen Werthe der u, u' den Charakter von rationalen Functionen haben.*

Seien

(1) $$du = \frac{A\,dy - B\,dx}{F_z'}, \quad du' = \frac{A'\,dy - B'\,dx}{F_z'}$$

die beiden zu

(2) $$F(x, y, z) = 0$$

gehörigen Differentialausdrücke erster Gattung, deren Integrale u, u' für alle Punkte von $F = 0$ endliche und bestimmte Werthe haben (in dem in Nr. 12 und Nr. 14 näher bezeichneten Sinn); dabei soll, wegen der Unabhängigkeit von u, u',

(3) $$AB' - BA' = Q \cdot F_z'$$

nicht für alle Punkte von $F = 0$ verschwinden.

Die Umkehrung der beiden Ausdrücke schreibt sich

$$(4)\qquad dx = \frac{A'du - Adu'}{Q},\quad dy = \frac{B'du - Bdu'}{Q},$$

oder allgemeiner, wenn $\chi(x, y, z)$ irgend eine Function von x, y, z vorstellt:

$$(5)\qquad Q\,d\chi = \left(A'\frac{\partial\chi}{\partial x} + B'\frac{\partial\chi}{\partial y} + C'\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)du - \left(A\frac{\partial\chi}{\partial x} + B\frac{\partial\chi}{\partial y} + C\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)du'.$$

Geht man von irgend einem Werthsystem $u = u_0$, $u' = u_0'$ aus, für welches die zugehörigen Werthe der Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ endlich sind, ohne dass darin die ganze Function Q der Coordinaten x, y, z verschwindet, so wird nach (4), (5) für dieses Werthsystem auch keiner der höheren Differentialquotienten der Coordinaten nach u, u' zu unendlich. Somit sind — nach Cauchy — x, y an dieser Stelle holomorphe Functionen von u, u'; nämlich solche, die daselbst den Charakter von ganzen rationalen Functionen haben, also sich nach ganzen Potenzen von $u - u_0$ und $u' - u_0'$ entwickeln lassen. Zur Fortsetzung dieser Functionen bleiben also nur die Werthsysteme u, u' zu betrachten, für welche eine der zugehörigen x, y, z zu ∞ wird oder der Punkt (x, y, z) auf die Fläche $Q = 0$ zu liegen kommt.

23. Beide Fälle sollen mittels rational-eindeutiger Transformation der Fläche F nach Nr. 10 behandelt werden Eine rationale Substitution

$$(6)\qquad \xi = \psi_1(x, y, z),\quad \eta = \psi_2(x, y, z),\quad \zeta = \psi_3(x, y, z),$$

die vermöge $F(x, y, z) = 0$ eindeutig umkehrbar sei in eine ebensolche

$$(7)\qquad x = \chi_1(\xi, \eta, \zeta),\quad y = \chi_2(\xi, \eta, \zeta),\quad z = \chi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

führe $F = 0$ über in eine Fläche

$$(8)\qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

So erhalte man nach Nr. 10:

$$(9)\qquad du = \frac{\mathsf{A}\,d\eta - \mathsf{B}\,d\xi}{f'_\zeta},\quad du' = \frac{\mathsf{A}'d\eta - \mathsf{B}'d\xi}{f'_\zeta},$$

$$(10)\qquad \mathsf{A}\mathsf{B}' - \mathsf{B}\mathsf{A}' = Q' f'_\zeta,$$

$$(11)\qquad d\xi = \frac{\mathsf{A}'du - \mathsf{A}\,du'}{Q'},\quad d\eta = \frac{\mathsf{B}'du - \mathsf{B}\,du'}{Q'}.$$

Vermöge dieser Transformation erledigt sich der erste Fall unmittelbar. Denn wird x, y oder z zu unendlich, so führe man, etwa nach (5), Nr. 22, statt x, y, z solche drei Grössen, etwa

$$\xi = \frac{1}{x},\quad \eta = \frac{y}{x},\quad \zeta = \frac{z}{x},$$

ein, welche im betreffenden Werthsystem u_0, u_0' endlich, also, nach Nr. 22, holomorphe Functionen von $u - u_0$, $u' - u_0'$ werden. Die Grössen

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi}$$

haben also an dieser Stelle den Charakter von rationalen Functionen von u, u'.

24. Wir betrachten nun die Punkte von $F = 0$, in welchen die ganze Function Q verschwindet.

$Q = 0$ ist die Gleichung der *einen* existirenden Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zur Fläche n^{ter} Ordnung, $F = 0$, adjungirt ist. $Q = 0$ geht in unserem Falle (Nr. 19) auch noch durch etwaige isolirte Doppelpunkte von $F = 0$ hindurch und wird noch, ausser den vielfachen Curven von F, in einer Reihe von *einfachen* Curven von F, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, schneiden können.

Einer *mehrfachen* Curve Σ_j von F lassen wir auf $f = 0$ (Nr. 23, (8)) eine einfache Curve S entsprechen, durch welche — nach unseren früheren Betrachtungen (Nr. 11—12), oder auch nach der schon in Nr. 19 citirten, in meinem Aufsatze Math. Ann. Bd. VIII ausgeführten, Transformation von Q in Q' — die Fläche Q' von (10), Nr. 23 gar nicht hindurchgeht. Folglich werden längs der Curve S die Grössen ξ, η, ζ den Charakter von rationalen Functionen von u, u' haben; also auch ebenso x, y, z, die selbst rationale Functionen von ξ, η, ζ sind, längs Σ_j; d. h. sie werden sich an jeder Stelle von Σ_j als Quotienten zweier Potenzreihen nach $u - u_0$, $u' - u_0'$ darstellen lassen.

Genau dasselbe gilt für die isolirten k-fachen Punkte P_k von F $(k > 2)$. Auch sind diejenigen Elemente von Σ_j oder Richtungen eines k-fachen Punktes P_k, in welchen eine der Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ eintrifft, in die Betrachtung eingeschlossen.

Dagegen scheinen zunächst solche einzelne Punkte von Σ_j oder Richtungen von P_k ausgeschlossen, welchen auf $f = 0$ wieder in vielfache Elemente von f fallende Punkte entsprechen; in welchen also $f_\zeta' = 0$, $\mathsf{AB}' - \mathsf{BA}' = 0$ würden. Da man aber diese Punkte von Σ_j oder Richtungen von P_k auf diesen Gebilden ganz beliebig variiren lassen kann, indem man die willkürliche Transformation von Nr. 23 ändert, bilden sie in Wirklichkeit keine Ausnahme.

25. Um endlich die Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ von Nr. 24, und die isolirten Doppelpunkte von F, welche auf diesen Curven liegen müssen, zu erledigen, sind nur Transformationsbetrachtungen anzustellen, welche ich schon in meinem wiederholt citirten Aufsatze in Math. Ann. Bd. VIII, §§ 9—12, eingehend dargelegt habe. Daselbst habe ich diejenigen *einfachen* Curven einer Fläche F, n^{ter} Ordnung, von beliebigem Flächengeschlecht p, untersucht, durch welche *alle* zu F adjungirten Flächen

φ_F vermöge der Adjunctionsbedingungen noch von selbst hindurchgehen, Curven, welche ich als „ausgezeichnete" Curven von F bezeichnet habe. Ich habe gezeigt, dass diese Curven die einzigen sind, welchen bei einer rational-eindeutigen Transformation von F in eine Fläche f *einfache Punkte von* f als Fundamentalpunkte der Transformation entsprechen können.

Zu den „ausgezeichneten" Curven gehören nun die Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ auf der hier zu betrachtenden Fläche F. Denn da $p = 1$ ist, existirt überhaupt hier nur *eine* zu F adjungirte Fläche φ_F, die Fläche $Q = 0$, und diese durch die Adjunctionsbedingung bestimmte Fläche geht alsdann noch durch eine Reihe von einfachen Curven von F, welche eben mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ bezeichnet sind.

Nimmt man auf f einen nicht-speciellen einfachen Punkt Π_1 an — d. h. einen solchen, durch welchen die zu f gehörige Fläche φ_f, $Q' = 0$, *nicht* hindurchgeht — und lässt in diesem Punkt den Nenner und die Zähler der drei Ausdrücke χ_1, χ_2, χ_3 in (7), Nr. 23 einfach verschwinden, so entspricht diesem Punkte, nach meinem Aufsatze über eindeutiges Entsprechen in Math. Ann. Bd. II, eine *Gerade* Γ_1 von F, und zwar den Richtungen von f in Π_1 einzeln die Punkte der Gerade Γ_1. Giebt man überhaupt dem Nenner und den Zählern der Ausdrücke χ_1, χ_2, χ_3 in Π_1 einen ϱ-fachen Punkt, so erhält man auf F eine *rationale Raumcurve* Γ_1 der ϱ^{ten} Ordnung, deren Punkte wiederum eindeutig den Richtungen von f in Π_1 entsprechen.

Die Coordinaten ξ, η, ζ sind aber an der nicht-singulären Stelle Π_1, oder $u = u_0$, $u' = u_0'$, holomorphe Functionen von u, u'; also behalten für $u = u_0$, $u' = u_0'$ die Grössen x, y, z, als rationale Functionen von ξ, η, ζ, den Charakter als rationale Functionen von u, u', obwohl sie daselbst unbestimmt werden.

Solcher einfacher getrennter Punkte $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ kann man beliebig viele auf f als Fundamentalpunkte einer Transformation (7), Nr. 23 nehmen, und erhält dann eine Fläche F mit beliebig vielen rationalen Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, die ausgezeichnete einfache Curven von F werden, in denen Q zu Null wird. Diese Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ werden einander nicht schneiden, ausser in k-fachen Punkten P_k $(k > 2)$ von F, durch welche die Fläche Q, als zu F adjungirt, von selbst hindurchgeht. Denn schneiden sich Γ_1 und Γ_2 in einem Punkt P, der isolirter Doppelpunkt oder einfacher Punkt von F ist, so ist dieser Punkt zunächst, da ihm jedenfalls *zwei* getrennte Punkte Π_1, Π_2 entsprechen, auch Fundamentalpunkt von F für die Substitutionsformeln (6), Nr. 23, so dass ihm eine Curve G auf f entspricht, welche durch Π_1 und Π_2 hindurchgeht; durch diese Curve G muss dann die Fläche φ_f, oder Q', einfach oder doppelt gehen, je nachdem P ein Doppelpunkt oder ein einfacher Punkt von F ist, weil $\varphi_f = Q$ durch P einfach geht, bez. dort F berührt*) — entgegen der Voraussetzung, dass die Punkte Π_1, Π_2 nicht auf $Q' = 0$ angenommen sind. Aus demselben Grunde kann auch die Curve Γ_1 sich nicht selbst in einem Punkte P von F schneiden, welcher von den k-fachen Punkten ($k > 2$) verschieden ist; denn auch diesem Punkte P müsste eine ausgezeichnete Curve von f entsprechen, welche durch Π_1 sogar mit zwei Zweigen geht.

Ein anderes Verhalten der Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ von F kann also nur eintreten:

α) wenn zwei Fundamentalpunkte Π_1, Π_2 von f unendlich nahe zusammenrücken, d. h. wenn für die Transformationsformeln χ von (7) eine *Fundamentalrichtung* existirt; in diesem Falle rücken auch die entsprechenden Curven Γ_1, Γ_2 von F einander unendlich nahe, d. h. die Fläche Q *berührt* F *längs* Γ_1;

β) wenn der einfache Punkt Π_1 von f selbst auf einer ausgezeichneten Curve G von f liegt; in diesem Falle aber zeigen wiederum die § 19 citirten Formeln des § 9 meines eben genannten Aufsatzes für die Transformation von Q', dass $Q = 0$ durch die entsprechende Curve Γ_1 *doppelt* hindurchgeht, d. h. F längs Γ_1 berührt. Auch hier kann man dann — indem man f weiter in eine Fläche f' überführt, auf welcher der Curve G von f ein einfacher Punkt entspricht — F so in eine Fläche f' transformiren, dass Γ_1 zwei benachbarte Fundamentalpunkte von f' entsprechen; so dass der Fall β) auf den Fall α) zurückführt.

Da nun die benachbarten Punkte Π_1, Π_2 von f an einer nichtspeciellen Stelle von f liegen, so sind ξ, η, ζ auch hier holomorph als Functionen von u, u', und für x, y, z bleibt wiederum der rationale Charakter als Functionen von u, u' erhalten, so singulär auch die Zuordnung der unendlich vielen Werthsysteme der x, y, z zu dem *einen* entsprechenden Werthsystem $u = u_0$, $u' = u_0'$ wird.

Durch Nr. 23, 24, 25 ist aber der Satz von Nr. 22 für alle Punkte von $F = 0$ bewiesen.

26. Dass in dem in Nr. 25 unter α) betrachteten Falle ein Schneiden von Curven Γ_1, Γ_2, und zwar in einem einfachen oder Doppelpunkte von F, eintreten kann, aber nur, wenn Q wenigstens längs *einer* der beiden Curven Γ_1, Γ_2 die Fläche F berührt, will ich an den einfachsten Fällen entwickeln. Diese Darlegung ist übrigens nichts weiter als eine Fortsetzung der Entwicklungen meines in der Einleitung citirten Aufsatzes, Math. Ann. Bd. II. Ich werde die Darstellung so halten, dass sie zugleich einen Einblick giebt in die einfachsten Arten der Unbestimmtheit, welche bei den eindeutigen Functionen von zwei Variablen u, u' eintreten können, ohne den rationalen Charakter dieser Functionen zu stören.

---

*) Vergl. meinen Aufsatz, Math. Ann. Bd. VIII, § 9.

Der Einfachheit halber lege ich in der Transformation von Nr. 23 den Fundamentalpunkt auf $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ in den Punkt Π mit den Coordinaten

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0;$$

und schreibe

$$(12) \qquad 0 = f(\xi, \eta, \zeta) \equiv \zeta + f_2 + f_3 + \cdots$$

wo f_i eine homogene Function i^{ter} Ordnung von ξ, η, ζ vorstellt. Die Substitutionsformeln (7) zwischen $f = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ seien hier geschrieben:

$$(13) \qquad x = \frac{\chi_1(\xi,\eta,\zeta)}{\chi_4(\xi,\eta,\zeta)}, \quad y = \frac{\chi_2(\xi,\eta,\zeta)}{\chi_4(\xi,\eta,\zeta)}, \quad z = \frac{\chi_3(\xi,\eta,\zeta)}{\chi_4(\xi,\eta,\zeta)},$$

wo die χ_i ganze nicht-homogene Functionen von ξ, η, ζ bedeuten.

Durch Entwicklung von (12) ergebe sich

$$(14) \qquad \zeta = L_2 + L_3 + \cdots,$$

wo die L_i ganze homogene Functionen i^{ter} Ordnung von ξ, η sind, und zwar

$$(14') \qquad \begin{cases} L_2 = a_0\xi^2 + a_1\xi\eta + a_2\eta^2, \\ L_3 = b_0\xi^3 + b_1\xi^2\eta + b_2\xi\eta^2 + b_3\eta^3, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Ferner sei, indem man zunächst die von $\xi = 0$ verschiedenen Richtungen an Π behandelt, zuerst gesetzt:

$$(15) \qquad \eta = \mu\xi + \mu_1\xi^2 + \mu_2\xi^3 + \cdots,$$

also

$$(16) \qquad \zeta = \nu_1\xi^2 + \nu_2\xi^3 + \cdots,$$

wo

$$(16') \qquad \nu_1 = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2, \quad \nu_2 = a_1\mu_1 + 2a_2\mu\mu_1 + b_0 + b_1\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3, \quad \text{etc.}$$

Indem man die Richtung $\xi = 0$ als eine für die Transformation nicht-ausgezeichnete annimmt, braucht man sie nicht besonders zu untersuchen, was andernfalls durch gleichzeitige Entwicklung von ξ und η nach ganzen Potenzen eines Parameters t geschehen würde. Weiterhin werden wir übrigens auch für die von $\xi = 0$ verschiedenen Richtungen diese allgemeineren Entwicklungen in besonderen Fällen anzuwenden haben.

Für die *Integrale* u, u' hat man im Punkt Π eine Entwicklung

$$(17) \qquad \begin{cases} u - u_0 = (\alpha\xi + \beta\eta) + M_2 + \cdots, \\ u' - u_0' = (\alpha'\xi + \beta'\eta) + M_2' + \cdots, \end{cases}$$

wo

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0,$$

oder

$$(17') \qquad \begin{cases} u - u_0 = (\alpha + \beta\mu)\xi + \xi^2\tau(\xi), \\ u' - u_0' = (\alpha' + \beta'\mu)\xi + \xi^2\tau'(\xi), \end{cases}$$

wobei $\tau(\xi)$, $\tau'(\xi)$ holomorph in ξ sind; und aus (17) ergiebt die Umkehrung für ξ, η Potenzreihen in $u - u_0$, $u' - u_0'$, welche mit linearen Gliedern beginnen.

α) Die χ_i von (13) mögen in Π in erster Ordnung verschwinden, ohne Fundamentalrichtung auf f.

Schreibt man

$$\chi_i = k_i\xi + l_i\eta + m_i\zeta + \chi_i',$$

wo χ_i' von höherer als 1ter Dimension in ξ, η, ζ, so wird vermöge (15), (16):

$$x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_1(\xi), \quad y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_2(\xi), \tag{18}$$
$$z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_3(\xi),$$

wo die $\lambda_i(\xi)$ holomorphe Functionen von ξ (Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von ξ fortschreiten) vorstellen. Dem Punkt Π entspricht also die *Gerade* Γ von F:

$$x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu}, \quad y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu}, \quad z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu}; \tag{19}$$

gehört zur Richtung $\mu = \mu_0$ der Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, so liefert (18) an dieser Stelle genauer:

$$\begin{cases} x - x_0 = (\alpha_1 + \beta_1\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_1(\xi), \\ y - y_0 = (\alpha_2 + \beta_2\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_2(\xi), \\ z - z_0 = (\alpha_3 + \beta_3\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_3(\xi), \end{cases} \tag{20}$$

wo die $\sigma_i(\xi)$ holomorph in ξ sind; Entwicklungen nach ganzen Potenzen von ξ und $\mu_1\xi$, wo

$$\mu_1 = \lim \frac{\eta - \mu_0\xi}{\xi^2} \qquad \left(\xi = 0, \ \lim \frac{\eta}{\xi} = \mu_0\right),$$

während die Coefficienten von μ_0 abhängen. Die Umkehrungen derselben ergeben ξ und $\mu_1\xi$ als Potenzreihen in $x - x_0$, $y - y_0$, die mit linearen Gliedern, $\eta - \mu_0\xi$ als Potenzreihe, die mit quadratischem Gliede anfängt.

Für die *Integrale* u, u' sind die zugehörigen Entwicklungen in (17') und (20) gegeben, wenn man in jenen $\mu = \mu_0$ setzt. Setzt man die obengenannten Reihen von ξ und η nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ in (17) ein, so wird

$$u - u_0 = \frac{\alpha + \beta\mu_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}[\alpha_2(x - x_0) - \beta_2(y - y_0)] + U_2,$$
$$u' - u_0' = \frac{\alpha' + \beta'\mu_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}[\alpha_2(x - x_0) - \beta_2(y - y_0)] + U_2',$$

wo U_2, U_2' Potenzreihen in $x - x_0$, $y - y_0$ sind, welche mit Gliedern quadratischer Dimension anfangen. Umgekehrt lassen sich hieraus $x - x_0$ und $y - y_0$ als Potenzreihen in

$$u - u_0$$

und

$$\frac{(u' - u_0') - v_0(u - u_0)}{u - u_0}$$

darstellen, wo

$$v_0 = \frac{\alpha' + \beta' \mu_0}{\alpha + \beta\mu_0}.$$

Für den Fall, dass die χ_i in Π alle einen ϱ-fachen Punkt haben, bleibt das Gesagte wesentlich erhalten; nur dass die Ausdrücke (19) μ bis zur ϱ^{ten} Ordnung hin enthalten, also eine rationale Curve Γ, ϱ^{ter} Ordnung, auf F liefern.

β) Die χ_i von (13) mögen zwei benachbarte einfache Punkte von f, Π und Π_1, als einfache Fundamentalpunkte besitzen; d. h. die χ_i sollen durch Π gehen und die Richtung $\Pi\Pi_1$ von f alle zur Tangente haben.

Für diese Richtung, welche eine Fundamentalrichtung der Transformation von f in F sein wird, nehmen wir

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

und schreiben — was vermöge linearer Transformation möglich ist —

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \xi + k_1\xi^2 + l_1\xi\eta + m_1\eta^2 + \cdots = (\nu_1 + k_1 + l_1\mu + m_1\mu^2)\xi^2 + \xi^3\lambda_1(\xi),\\
\chi_2 &= \phantom{\xi +{}} k_2\xi^2 + l_2\xi\eta + m_2\eta^2 + \cdots = (k_2 + l_2\mu + m_2\mu^2)\xi^2 + \xi^3\lambda_2(\xi),\\
\chi_3 &= \phantom{\xi +{}} k_3\xi^2 + l_3\xi\eta + m_3\eta^2 + \cdots = (k_3 + l_3\mu + m_3\mu^2)\xi^2 + \xi^3\lambda_3(\xi),\\
\chi_4 &= \eta + k_4\xi^2 + l_4\xi\eta + m_4\eta^2 + \cdots = \mu\xi + (\mu_1 + k_4 + l_4\mu + m_4\mu^2)\xi^2 + \xi^3\lambda_4(\xi).
\end{aligned}$$

β') Sei μ von 0 verschieden. Dann wird:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\nu_1 + k_1 + l_1\mu + m_1\mu^2}{\mu}\,\xi + \xi^2\sigma_1(\xi),\\
y &= \frac{k_2 + l_2\mu + m_2\mu^2}{\mu}\,\xi + \xi^2\sigma_2(\xi),\\
z &= \frac{k_3 + l_3\mu + m_3\mu^2}{\mu}\,\xi + \xi^2\sigma_3(\xi),
\end{aligned}$$

(Ausdrücke, die sich auch als ganze Functionen von

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\eta}$$

oder als ganze Functionen von

$$\frac{\xi^2}{\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{\xi}$$

schreiben lassen).

Hieraus folgt zunächst, dass diesen verschiedenen Richtungen μ in Π hier die Richtungen in dem *einen* Punkt P von F mit den Coordinaten $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ entsprechen. Da für kleine Werthe von ξ die Grössen x, y, z quadratische Functionen des Parameters μ werden, so folgt weiter, dass die entsprechenden Tangentenrichtungen in P einen Kegel zweiter Ordnung bilden, dass also F in P einen *Doppelpunkt* erhält, und zwar einen isolirten Doppelpunkt mit im Allgemeinen nicht-zerfallendem Tangentenkegel. Denn wenn

$$\begin{vmatrix} \nu_1 + k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden, so hat man

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \frac{\xi}{\mu} \qquad\qquad &= \Delta_{11} x + \Delta_{21} y + \Delta_{31} z + \cdots, \\ \Delta \cdot \xi \qquad\qquad &= \Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z + \cdots, \\ \Delta \eta = \Delta \cdot \mu \xi + \cdots &= \Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z + \cdots, \end{aligned}$$

also als Gleichung des Tangentenkegels von F in P:

$$(\Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z)^2 - (\Delta_{11} x + \Delta_{21} y + \Delta_{31} z)(\Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z) = 0.$$

Der Richtung μ in Π entspricht die eine bewegliche Richtung, in welcher dieser Kegel von

$$(\Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z) - \mu(\Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z) = 0$$

geschnitten wird.

Für die Integrale wird:

$$\begin{aligned} u - u_0 = \frac{1}{\Delta} \{(\alpha\, \Delta_{12} + \beta\, \Delta_{13}) x + (\alpha\, \Delta_{22} + \beta\, \Delta_{23}) y \\ + (\alpha\, \Delta_{32} + \beta\, \Delta_{33}) z\} + \cdots, \\ u' - u_0' = \frac{1}{\Delta} \{(\alpha' \Delta_{12} + \beta' \Delta_{13}) x + (\alpha' \Delta_{22} + \beta' \Delta_{23}) y \\ + (\alpha' \Delta_{32} + \beta' \Delta_{33}) z\} + \cdots \end{aligned}$$

Im Besonderen kann auch $\Delta = 0$ werden, wonach dann der Tangentenkegel in eine doppelte Ebene übergeht.

β'') Sei nun $\mu = 0$ betrachtet, also die Richtung $\zeta = 0$, $\eta = 0$ von Π. Dann wird

$$\eta = \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \cdots, \quad \zeta = a_0 \xi^2 + (a_1 \mu_1 + b_0) \xi^3 + \cdots,$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (a_0 + k_1) \xi^2 + [(a_1 + l_1)\mu_1 + f_1] \xi^3 + \cdots, \\ \chi_2 &= \qquad\quad k_2 \xi^2 + (l_2 \mu_1 + f_2) \xi^3 + \cdots, \\ \chi_3 &= \qquad\quad k_3 \xi^2 + (l_3 \mu_1 + f_3) \xi^3 + \cdots, \\ \chi_4 &= (\mu_1 + k_4) \xi^2 + (l_4 \mu_1 + f_4 + \mu_2) \xi^3 + \cdots, \end{aligned}$$

also, wenn man setzt

$$x_0 = \frac{a_0 + k_1}{\mu_1 + k_4}, \quad y_0 = \frac{k_2}{\mu_1 + k_4}, \quad z_0 = \frac{k_3}{\mu_1 + k_4}:$$

$$x - x_0 = (-\mu_2 x_0 + m_1)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

$$y - y_0 = (-\mu_2 y_0 + m_2)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

$$z - z_0 = (-\mu_2 z_0 + m_3)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

wo die Grössen m_1, m_2, m_3 einfach von μ_1 abhängen. Hieraus folgt, dass der *einen* Richtung $\lim \frac{\eta}{\xi} = \mu = 0$ von Π unendlich viele Punkte von F entsprechen, welche eine *Gerade* Γ bilden. Deren Punkte (x_0, y_0, z_0) entsprechen den verschiedenen Werthen von $\lim \frac{\eta}{\xi^2} = \mu_1$. In einem solchen Punkte von F, also bei festem μ_1, liefern die letzten Formeln die Entwicklung der Coordinaten nach Potenzen von ξ und $\mu_2 \xi$; und die Umkehrung liefert ξ und $\mu_2 \xi$, also auch ξ und η, als ganze Potenzreihen in $x - x_0$ und $y - y_0$. Für die Integrale hat man zugleich bei festem μ_1 Entwicklungen der Form:

$$u - u_0 = \alpha \xi + (\beta \mu_1 + \beta_1)\xi^2 + (\beta \mu_2 + \beta_2)\xi^3 + \cdots,$$

$$u' - u_0' = \alpha' \xi + (\beta' \mu_1 + \beta_1')\xi^2 + (\beta' \mu_2 + \beta_2')\xi^3 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die Grössen von (17), die $\beta_1, \beta_1', \beta_2 \ldots$ von μ_2 unabhängig sind. Da

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u'}{\partial(\mu_2 \xi)} - \frac{\partial u'}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial(\mu_2 \xi)} = 2(\alpha\beta' - \beta\alpha')\xi^2 + \cdots$$

mit Gliedern zweiter Dimension anfängt, kann man dasselbe in Bezug auf die Entwicklung von

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x} = (AB' - A'B) : \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$$

nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ schliessen — was sich durch Fortsetzung der Rechnung auch direct ergäbe —; d. h. die Fläche

$$AB' - BA' = 0$$

berührt die Fläche F in jedem Punkte der Geraden Γ.

γ) Die Flächen χ_i von (13) mögen den einfachen Punkt Π von f zum Doppelpunkt besitzen und zugleich die Richtung $\Pi\Pi_1$ von f gemeinsam haben, so dass dieselbe Fundamentalrichtung der Transformation wird.

Sei wieder diese Richtung im Punkt Π oder $(\xi = \eta = \zeta = 0)$ als $\zeta = 0$, $\eta = 0$ genommen; so wird

$$\chi_i = \eta(k_i \xi + l_i \eta) + \zeta(m_i \xi + p_i \eta + q_i \zeta) + r_i \xi^3 + \cdots.$$

γ') Sei zuerst die Richtung $\lim \frac{\eta}{\xi} = \mu$ von 0 verschieden.

Dann wird

$$x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_1(\xi),\quad y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_2(\xi),\quad z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_3(\xi),$$

woraus genau dieselben Schlüsse, wie in α) folgen, nämlich dass den verschiedenen Richtungen μ ($\mu \neq 0$) durch Π die Punkte einer Geraden Γ_1 entsprechen, längs deren $AB' - BA'$ zu 0 wird, etc.

γ'') Sei nun $\mu = 0$; und η und ζ wie in β'').

Dann hat man

$$\chi_i = (\mu_1 k_i + a_0 m_i + r_i)\xi^3 + \cdots,$$

also

$$x = \frac{\mu_1 k_1 + (a_0 m_1 + r_1)}{\mu_1 k_4 + (a_0 m_4 + r_4)} + \xi\sigma_1(\xi),$$

und analog y und z. Dies liefert, den verschiedenen Werthen von μ_1 entsprechend, eine zweite Gerade Γ_2 von F, welche mit der ersten Geraden Γ_1 den Punkt P mit $\mu = 0$, $\mu_1 = \infty$, d. h. mit

$$x_0 = \frac{k_1}{k_4},\quad y_0 = \frac{k_2}{k_4},\quad z_0 = \frac{k_3}{k_4},$$

gemeinsam hat, einen Punkt, den wir in γ''') weiter betrachten werden. Für einen von $\mu_1 = \infty$ verschiedenen Punkt dieser Geraden Γ_2 gelten genau dieselben Schlüsse, wie in β'').

γ''') $\mu = 0$, $\mu_1 = \infty$. Zur Untersuchung des in γ'') genannten Punktes P:

$$x_0 = \frac{k_1}{k_4},\quad y_0 = \frac{k_2}{k_4},\quad z_0 = \frac{k_3}{k_4}$$

kann, wegen $\mu_1 = \infty$, nicht mehr eine Entwicklung von η nach ganzen Potenzen von ξ dienen; vielmehr tritt hier der, schon oben zu (16) bemerkte Fall ein, dass man für ξ und η Reihen setzen muss, die nach ganzen Potenzen eines Parameters t fortlaufen. Es genügt hier, wo $\lim \frac{\eta}{\xi} = 0$, $\lim \frac{\eta}{\xi^2} = \infty$, zu setzen:

$$\xi = t^2,\quad \eta = \varrho t^3 + \varrho_1 t^4 + \cdots,$$

wonach

$$\zeta = a_0 t^4 + \varrho a_1 t^5 + \cdots$$

Ferner wird

$$\chi_i = \varrho k_i t^5 + (\varrho k_i + \varrho^2 l_i + a_0 m_i + r_i)t^6 + \cdots$$

also

$$x - x_0 = \frac{1}{k_4^2}\left\{k_4(l_1\varrho^2 + a_0 m_1 + r_1) - k_1(l_4\varrho^2 + a_0 m_4 + r_4)\right\}\frac{t}{\varrho} + \cdots$$

und analog $y - y_0$ und $z - z_0$. Diese Entwicklungen gehen also fort nach ganzen Potenzen von ϱt und $\frac{t}{\varrho}$, oder auch nach solchen von

$$\frac{\eta}{\xi} \quad \text{und} \quad \frac{\xi^2}{\eta},$$

und fangen mit linearen Gliedern in beiden Grössen an, so dass der Punkt P im Allgemeinen ein *einfacher* Punkt von f wird.

Diese Grössen lassen sich also auch umgekehrt in Reihen nach ganzen Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln, welche mit linearen Gliedern anfangen, von der Form:

$$\frac{\eta}{\xi} = \lambda_1 (x - x_0) + \lambda_2 (y - y_0) + \cdots,$$
$$\frac{\xi^2}{\eta} = \lambda_1' (x - x_0) + \lambda_2' (y - y_0) + \cdots,$$

so dass man erhält:

$$\xi = \{\lambda_1 (x - x_0) + \lambda_2 (y - y_0)\} \cdot \{\lambda_1' (x - x_0) + \lambda_2' (y - y_0)\} + \cdots,$$
$$\eta = \{\lambda_1 (x - x_0) + \lambda_2 (y - y_0)\}^2 \cdot \{\lambda_1' (x - x_0) + \lambda_2' (y - y_0)\} + \cdots.$$

Für die Integrale hat man, wenn man noch

$$\varrho t = t_1, \quad \frac{t}{\varrho} = t_2$$

setzt:

$$u - u_0 = \alpha t^2 + \beta \varrho t^3 + \cdots = \alpha t_1 t_2 + \beta t_1^2 t_2 + \cdots,$$
$$u' - u_0' = \alpha' t^2 + \beta' \varrho t^3 + \cdots = \alpha' t_1 t_2 + \beta' t_1^2 t_2 + \cdots,$$

demnach

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{\partial u'}{\partial t_2} - \frac{\partial u}{\partial t_2} \frac{\partial u'}{\partial t_1} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial x} \right)$$
$$= \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2) \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} (AB' - BA') = (\alpha' \beta - \alpha \beta') t_1^2 t_2 + \cdots$$
$$= (\alpha' \beta - \alpha \beta') \varrho t^3 + \cdots,$$

d. h. die Fläche $Q = 0$ trifft $F = 0$ im einfachen Punkt P wie eine Fläche mit 3-fachem Punkt.

Nimmt man z. B. die direct, ohne Hülfe von $f = 0$, eindeutig umkehrbare Substitution

$$x = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = l \frac{\eta}{\xi} + \frac{\xi^2}{\eta}, \quad z = m \frac{\eta}{\xi} + \frac{\zeta}{\xi},$$

woraus

$$\xi = x(y - lx), \quad \eta = x^2 (y - lx), \quad \zeta = x(y - lx)(z - mx),$$

deren Determinante

$$\Delta = -x^3 (y - lx)^2,$$

so geht eine Fläche

$$0 = f(\xi, \eta, \zeta) \equiv \zeta + f_2 + f_3 + \cdots,$$

nach Weglassung des Factors

$$M = x(y - lx)$$

über in

$$0 = F(x, y, z) \equiv (z - mx) + F_2 + F_3 + \cdots$$

wo die F_i homogen von der i^{ten} Dimension in x, y, z sind und den

Factor $x(y-lx)$ besitzen. Ist dann $Q'(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die zu f gehörige Fläche φ_f, so wird Q' für $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ nicht verschwinden; sei also

$$Q'(\xi, \eta, \zeta) = K(x, y, z),$$

so wird auch K für die beiden entsprechenden Geraden von F:

$$\Gamma_1 : z - mx = 0, \quad y - lx = 0$$

und

$$\Gamma_2 : z = 0, \quad x = 0$$

nicht verschwinden. Die zu F gehörige Fläche φ_F wird dann:

$$Q(x, y, z) = \frac{K \cdot \Delta}{M} = -Kx^2(y-lx) = 0;$$

diese Fläche geht also in der That durch Γ_1 und berührt F längs Γ_2 in erster Ordnung, im Schnittpunkte $(x=0, y=0, z=0)$ von Γ_1 und Γ_2 in zweiter Ordnung.

Erlangen, 1886.