7.
Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie.

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Die Geometrie der geraden Linie oder die Lineal-Geometrie, ein Ausdruck, dessen sich zuerst der scharfsinnige Lambert *) bedient zu haben scheint, enthält alle diejenigen geometrischen Aufgaben, die sich bloſs mit Hülfe des Lineals, ohne Anwendung des Zirkels, lösen lassen, und beschränkt sich eben so nur auf diejenigen Eigenschaften einer Figur, welche aus den Bedingungen hervorgehen, daſs drei oder mehrere gewisse Puncte der Figur in Einer Geraden liegen, oder daſs drei oder mehrere gewisse Gerade sich in Einem Puncte schneiden; auf Eigenschaften also, welche eine Figur unverändert beibehält, wie auch ihre Theile die Lage gegen einander ändern mögen, nur daſs jede drei oder mehrere Puncte, welche Anfangs in einer Geraden lagen, auch fortwährend in einer Geraden bleiben. Die Beziehung, welche zwischen der so geänderten Figur und der anfänglichen statt findet, habe ich in meinem *Barycentrischen Calcul* Collineations-Verwandtschaft genannt und von ihr im 2ten Abschnitt, 5. — 8. Cap. gehandelt.

Es ist diese Beziehung oder Verwandtschaft, so lange nur von ebenen Figuren die Rede ist, einerlei mit derjenigen, welche zwischen einer ebenen Figur und ihrer perspectivischen Projection auf eine andere Ebene obwaltet. Liegen nemlich drei Puncte der erstern Figur in einer Graden, so sind immer auch ihre Projectionen in einer Geraden enthalten, in derjenigen, worin die letztere Ebene von einer durch das Auge und die erstere Grade gelegten Ebene geschnitten wird. Und umgekehrt läſst sich zeigen, daſs von zwei ebenen Figuren, welche in jener Verwandtschaft zu einander stehen, die eine immer als perspectivische Projection der andern angesehen werden kann (*Bar. Calc.* §. 230. Anmerk.). Doch habe ich von dieser an sich sehr fruchtbaren Ansicht in genannter Schrift

*) Lamberts freie Perspective. Anmerkungen und Zusätze S. 162.

keinen Gebrauch gemacht, da mir theils der Hülfsbegriff des Augenpunctes zu fremdartig schien, theils diese Ansicht bei Figuren im Raume nicht füglich mehr anwendbar ist. Ich bin daher a. a. O. von der gegenseitigen Beziehung der Figuren nach der geraden Linie unmittelbar ausgegangen, habe damit die hierhergehörigen Relationen, die graphischen, so wie die metrischen, entwickelt, und habe, was insbesondere die metrischen anlangt, den allgemeinen Character derselben, ihre verschiedenen Formen und gegenseitige Abhängigkeit zu bestimmen gesucht.

Da ich mich aber bei diesen Entwickelungen der barycentrischen Rechnung bedient habe, und hierdurch, so wie durch die neuen dabei gebrauchten Ausdrücke, Mancher von einem näheren Eingehen in meine Untersuchungen zurückgehalten werden mag, gleichwohl aber die gefundenen Resultate für die Geometrie nicht ohne einigen Werth sein dürften, so hat es mir zweckmäfsig geschienen, die gedachten Gegenstände im Vorliegenden mittelst der gewöhnlichen Coordinatenmethode, und somit allgemein verständlich, von Neuem zu behandeln, und dieses um so mehr, da die linealgeometrischen Untersuchungen in neuester Zeit, besonders von französischen Mathematikern, mit einer Art Vorliebe betrieben zu werden scheinen.

Aufserdem aber, dafs hier nur die gewöhnliche Coordinatenmethode zum Grunde gelegt ist, unterscheidet sich gegenwärtiger Aufsatz von dem, was oben erwähnte Schrift über diese Gegenstände enthält, durch mehrere neu hinzugekommene Bemerkungen, besonders aber durch die am Schlusse aufgestellten metrischen Relationen bei Kegelschnitten, die ich erst neuerdings gefunden habe. Um übrigens diesem Aufsatze einen nicht zu grofsen Umfang zu geben, habe ich mich blofs auf ebene Figuren beschränkt. — Die citirten §§. beziehen sich auf den *Baryc. Calcul.*

1) Von zwei Ebenen, deren gegenseitige Lage hierbei nicht in Rücksicht kommt, entspreche jedem Puncte der einen Ebene ein Punct in der andern so, dafs für jede drei Puncte der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, die entsprechenden drei Puncte der andern ebenfalls in einer Geraden enthalten sind; dafs folglich, wenn man in der einen Ebene eine Gerade zieht, die den Puncten dieser Geraden in der andern Ebene entsprechenden Puncte gleichfalls eine Gerade bilden; oder kürzer, dafs jeder Geraden in der einen eine Gerade in der andern (folglich auch jeder krummen Linie in der einen eine krumme, nicht gerade Linie in der anderen) entspricht.

2) Um dieses gegenseitige Entsprechen der Puncte beider Ebenen analytisch auszudrücken, ziehe man in jeder derselben zwei sich unter beliebigem Winkel schneidende Coordinatenaxen, und nenne x, y die Coordinaten irgend eines Punctes der einen Ebene; t, u die Coordinaten des entsprechenden Punctes der andern. Hiernach müssen t sowohl als u Functionen von x und y sein:

$$t = F(x, y), \quad u = G(x, y).$$

Um die Formen dieser Functionen auszumitteln, nehme man an, es sei in der Ebene der t, u irgend eine gerade Linie gezogen, deren Gleichung:

$$\alpha t + \beta u + \gamma = 0.$$

Die Gleichung für die entsprechende Linie in der Ebene der x, y wird sein:

$$(1.) \quad \alpha F(x, y) + \beta G(x, y) + \gamma = 0.$$

Da nun diese Linie ebenfalls gerade sein soll, so mufs die Gleichung (1.), so wie sie nach α, β, γ linear ist, auch nach x und y linear sein. Die allgemeinste Form einer solchen Gleichung ist aber:

$$(2.) \quad \alpha(ax + by + c) + \beta(fx + gy + h) + \gamma(x + my + n) = 0,$$

wo in dem letzten Gliede der Coefficient von x weggelassen ist, indem man sich mit demselben alle übrigen Coefficienten a, b, . . m, n dividirt vorstellen kann. Aus der Identität der Gleichungen (1.) und (2.) für alle Werthe, welche man den Constanten α, β, γ ertheilen mag, folgt aber:

$$(3.) \quad F(x, y) = t = \frac{ax + by + c}{x + my + n}, \quad G(x, y) = u = \frac{Fx + gy + h}{x + my + n},$$

und hiermit sind die Formen der Functionen, welche t und u von x, y sein müssen, vollkommen bestimmt.

3) Drückt man mittelst der Gleichungen (3.) umgekehrt x und y durch t, u aus, so wird man Ausdrücke von derselben Form wie die vorigen erhalten, nemlich Brüche, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von t und u, und deren Nenner überdies einander gleich sind; woraus zu schliefsen, dafs wenn jeder Geraden in der Ebene der t, u eine Gerade in der Ebene der x, y entspricht, auch umgekehrt jede Gerade der letztern Ebene eine Gerade in der erstern zur entprechenden Linie hat.

Eben so erhellet, dafs die Gleichungen (3.) ihre Form nicht ändern, wenn statt x und y oder statt t und u Ausdrücke von der Form $\delta x + \varepsilon y + \zeta$ oder $\lambda t + \mu u + \nu$ gesetzt werden, d. h. wenn man statt der anfänglichen Coordinatenaxen beliebige andere Linien zu Axen wählt; wie dies auch schon aus der Natur der Sache folgt.

Aus der Gleichung (3.) geht weiter hervor, dafs einem in endlicher Entfernung vom Anfangspuncte der Coordinaten gelegenen Puncte der einen Ebene, in der andern auch ein unendlich entfernter Punct entsprechen kann, und dafs einem unendlich entfernten Puncte der einen Ebene im Allgemeinen ein endlich gelegener in der andern entspricht. Ueberhaupt nemlich werden alle unendlich entfernten Puncte der Ebene der t, u, in der Ebene der x, y durch die Puncte der Geraden vorgestellt, deren Gleichung $x + my + n = 0$ ist; und eben so giebt es eine gewisse Gerade in der Ebene der t, u von der Beschaffenheit, dafs jeder Punct der Ebene der x, y, welcher einem Puncte dieser Geraden entspricht, unendlich entfernt ist. — Bei der perspectivischen Projection ist diese Gerade einerlei mit derjenigen, in welcher eine durch das Auge, parallel mit der abzubildenden Ebene, gelegte Ebene die Tafelebene schneidet.

Von zwei oder mehreren Linien, welche mit einander parallel laufen, sind daher die entsprechenden Linien nicht ebenfalls einander parallel, sondern schneiden sich in einem Puncte. Jedem Systeme paralleler Linien in der einen Ebene gehört daher in der andern Ebene ein Punct zu: der Durchschnittspunct der den Parallelen des jedesmaligen Systems entsprechenden Geraden. Alle diese Puncte aber sind in einer und derselben Geraden enthalten, in der Geraden, deren Puncte den unendlich entfernten Puncten der erstern Ebene entsprechen.

4) In den zwei Gleichungen (3.) kommen acht von einander unabhängige Constanten a, b, c, f, g, h, m, n vor. Sie lassen sich bestimmen, wenn man von vier Puncten in der einen und den vier ihnen entsprechenden Puncten in der andern Ebene die Coordinaten kennt. Substituirt man diese der Reihe nach für x, y, t, u in den Gleichungen (3.), so erhält man 4 solcher Paare von Gleichungen, woraus sich die 8 Constanten, durch die Coordinaten der vier Paare sich entsprechender Puncte ausgedrückt, ableiten lassen. Auch können nunmehr für jeden fünften durch seine Coordinaten gegebenen Punct der einen Ebene die Coordinaten des entprechenden Punctes in der andern gefunden werden. Man bemerke nur noch, dafs, wenn jene Bestimmung der 8 Constanten ausführbar sein soll, von den anfänglichen vier Puncten in der einen, und folglich auch von den

vier ihnen entsprechenden in der andern Ebene, keine drei in gerader Linie liegen dürfen.

Wenn daher die Puncte zweier Ebenen in die jetzt in Rede stehende lineare Beziehung zu einandar gesetzt werden sollen, so nehme man irgend 4 Puncte A, B, C, D in der einen und beliebige 4 Puncte A', B', C', D' in der andern Ebene, — nur dafs weder von den 4 erstern, noch von den 4 letztern irgend 3 in einer Geraden sind, — und setze sie einander entsprechend: A' dem A, ... D' dem D. Hiermit ist für jeden fünften Punct E der einen Ebene der Ort des entsprechenden fünften E' in der andern vollkommen bestimmt. Zwischen je vier Puncten, — dies folgt daraus schlüfslich, — und den ihnen entsprechenden, wo weder von jenen noch von diesen vier Puncten irgend drei in einer Geraden sind, kann daher keine hierhergehörige metrische Relation noch nicht statt finden, wohl aber wenn ein fünftes oder noch mehrere Paare sich entsprechender Puncte hinzu kommen.

5) Um jetzt diese Relationen zu entwickeln, wollen wir von dem speciellen Falle ausgehen, wo die in Betracht zu ziehenden Puncte der einen, und folglich auch die entsprechenden in der andern Ebene, in gerader Linie liegen. Heifsen X, X', X'', ... die Puncte in der Ebene der x, y, und T, T', T'', ... die ihnen entsprechenden in der Ebene der t, u. Weil in jeder der beiden Ebenen die Coordinatenaxen nach Willkühr gelegt werden können, so werde die Axe der x durch die Puncte X, X', ... und die Axe der t durch die Puncte T, T', ... gezogen. Seien hiernach die Abscissen von X, X', ... resp. $= x, x', \ldots$; und von T, T', ... resp. $= t, t', \ldots$, so hat man, weil die Ordinaten (y und u) für die einen sowohl als die andern Puncte null sind, folgende Gleichungen:

$$t = \frac{ax+c}{x+n}, \quad t' = \frac{ax'+c}{x'+n}, \quad t'' = \frac{ax''+c}{x''+n}, \text{ etc.}$$

Da in jeder derselben von den obigen acht Constanten nur drei noch vorkommen, so wird man durch Verbindung irgend vier solcher Gleichungen eine Gleichung zwischen den Abscissen von vier Paaren sich entsprechender Puncte allein erhalten können. Da ferner durch Annahme anderer Anfangspuncte in den Axen der x und t jene Gleichungen zwischen t und x ihrer Form nach offenbar unverändert bleiben und nur die darin vorkommenden Constanten a, c, n andere Werthe erhalten, so wird auch die durch Elimination dieser Constanten hervorgehende Gleichung von den Anfangspuncten der Abscissen unabhängig sein und nur solche Gröfsen enthalten, wodurch die gegenseitige Lage der Puncte X, X', ... und T, T', ... selbst bestimmt wird.

Liegen daher die in Betracht gezogenen Puncte der einen und folglich auch die entsprechenden Puncte der andern Ebene in gerader Linie, so wird zwischen je vier Paaren derselben eine metrische Relation obwalten. Die zu ihrer Herleitung erforderliche Elimination von a, c, n läfst sich durch folgende Rechnung bewerkstelligen.

Zuerst hat man:

$$t'-t=\frac{(an-c)(x'-x)}{(x+n)(x'+n)},\quad t''-t'=\frac{(an-c)(x''-x')}{(x'+n)(x''+n)},$$

und daher

$$\frac{t'-t}{t''-t'}=\frac{x''+n}{x+n}\cdot\frac{x'-x}{x''-x'},$$

und eben so

$$\frac{t'''-t}{t''-t'''}=\frac{x''+n}{x+n}\cdot\frac{x'''-x}{x''-x'''},$$

folglich

$$\frac{t'-t}{t''-t'}:\frac{t'''-t}{t''-t'''}=\frac{x'-x}{x''-x'}:\frac{x'''-x}{x''-x'''}.$$

Ist nun M der Anfangspunct in der Axe der t, so hat man $t=MT$, $t'=MT'$, $t''=MT''$, etc., von welchen Linien je zwei, wie MT und MT', einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem die Puncte T und T' auf einerlei oder verschiedenen Seiten von M liegen. Hierdurch wird $t'-t=TT'$, $t''-t'=T'T''$, etc., von denen man daher wiederum je zwei, wie TT' und $T'T''$, mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu nehmen hat, je nachdem die durch die Stellung der Buchstaben zugleich angedeuteten Richtungen, von T nach T' und von T' nach T'', in der Axe der t einerlei oder einander entgegengesetzt sind. Auf gleiche Art ist $x'-x=XX'$, etc. in der Axe der x; die gefundene Proportion aber erhält die Gestalt:

$$\frac{TT'}{T'T''}:\frac{TT'''}{T'''T''}=\frac{XX'}{X'X''}:\frac{XX'''}{X'''X''}.$$

6) Für drei Puncte A, B, C der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, können daher, — so lange noch keine andere Paare sich entsprechender Puncte angenommen worden, — die entsprechenden Puncte A', B', C' in der andern Ebene nach Belieben gewählt werden, nur dafs

sie ebenfalls in einer Geraden sind. Für jeden vierten Punct D in der Geraden ABC ist alsdann der entsprechende Punct D' in der Geraden $A'B'C'$ durch die Proportion bestimmt:

$$\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=\frac{A'B'}{B'C'}:\frac{A'D'}{D'C'},$$

wo nur die vorigen T, T', X, X', mit A, B, ... A', B', ... vertauscht sind.

Das erste Glied $\frac{AB}{BC}$ ist, wie aus dem vorhin Gesagten erhellet, positiv oder negativ, nachdem B zwischen oder aufserhalb A und C liegt, und drückt das Verhältnifs aus, nach welchem die Linie AC im Puncte B geschnitten wird. Dasselbe ist auch auf die drei übrigen Glieder der Proportion anzuwenden.

Das Verhältnifs $\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}$ ist daher nichts anderes, als das Verhältnifs zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Gerade AC das eine Mal in B und das andere Mal in D geschnitten wird. Ein solches aus vier Puncten in einer Geraden sich bildende Verhältnifs habe ich (§. 182.) Doppelschnitts-Verhältnifs genannt.

Da, wie die Folge zeigen wird, alle bei der Lineal-Geometrie vorkommenden metrischen Relationen aus D.Verhältnissen (Doppelschnitts-Verhältnissen) zusammengesetzt sind, oder sich doch auf solche zurückführen lassen, so sah ich mich zur Einführung einer abgekürzten Schreibart veranlafst. Zu dem Ende drückte ich ein D.Verhältnifs blofs dadurch aus, dafs ich die vier Puncte, als den ersten und zweiten Grenzpunct der geschnittenen Linie, den ersten und zweiten Schneidepunct in der genannten Ordnung neben einander setzte, sie durch Commata unterschied und mit Haken einschlofs (§. 183.) und hiernach das vorige D.Verhältnifs also darstellte: (A, C, B, D).

Das einfachste Beispiel eines D.Verhältnisses giebt die bekannte harmonische Theilung. Eine Linie AB wird in C und D harmonisch getheilt, wenn sie in C und D nach gleichen Verhältnissen getheilt wird, nur dafs die Exponenten dieser Verhältnisse entgegengesetzte Zeichen haben, dafs mithin von den zwei Puncten C und D der eine innerhalb, der andere aufserhalb A und B liegt; also in Zeichen, wenn

$$AC:CB=-(AD:DB),\quad \text{d. i.}\quad \frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1;$$

oder, nach der kürzeren Schreibart, wenn

$$(A, B, C, D) = -1.$$

7) Das in Nr. 5. erhaltene Resultat können wir jetzt kürzlich so ausdrücken: **Jedes D. Verhältnifs zwischen vier Puncten einer Geraden in der einen Ebene ist dem aus den entsprechenden Puncten der andern gebildeten D. Verhältnisse gleich.** Haben daher A, B, . . ., A', B', . . . dieselbe Bedeutung wie in Nr. 6., so ist:

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Hiemit kann, wie schon dort bemerkt wurde, wenn von diesen 8 Puncten 7 gegeben sind, der 8te gefunden werden. Auf eben die Art mufs nun auch sein:

$$(A, C, B, D) = (A', C', B', D'), \quad (B, A, C, D) = (B', A', C', D') \text{ etc.},$$

wie auch die Buchstaben in jedem der zwei einander gleichen D. Verhältnisse mit einander vertauscht werden, wenn es nur in beiden auf gleiche Art geschieht. Da aber hierdurch keine neuen Bestimmungen für den achten Punct hervorgehen können, so müssen die D. Verhältnisse (A, C, B, D), (B, A, C, D) etc., und wie auch sonst noch die vier Elemente A, . . . D permutirt werden mögen, insgesammt Functionen von (A, B, C, D), also auch von einander abhängig sein. Und in der That findet sich leicht, dafs wenn man $(A, B, C, D) = a$ setzt:

$$\text{I. } (B, A, C, D) = \frac{1}{a}, \quad \text{II. } (A, C, B, D) = 1 - a, \quad \text{III. } (A, B, D, C) = \frac{1}{a}$$

ist, woraus man alle übrigen Permutationen berechnen kann. Denn von irgend einer der 24 Permutationen, welche aus 4 Elementen sich bilden lassen, kann man schrittweise zu jeder andern von ihnen gelangen, indem man nach und nach bald die zwei ersten, bald die zwei mittleren, bald die zwei letzten Elemente mit einander vertauscht. Durch Vertauschung der zwei ersten (I.) oder der zwei letzten (III.) erhält man aber den reciproken Werth des vorhergehenden, und durch Vertauschung der zwei mittleren Elemente (II.) die Ergänzung des vorhergehenden Werthes zur Einheit. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs jedes der 24 D. Verhältnisse, welche sich aus den 4 Puncten bilden lassen, einen der 6 Werthe hat:

$$1)\ a, \quad 2)\ \frac{1}{a}, \quad 3)\ \frac{a-1}{a}, \quad 4)\ \frac{a}{a-1}, \quad 5)\ \frac{1}{1-a}, \quad 6)\ 1-a. \quad (\S.\ 184.)$$

NB. Setzt man diese 6 Werthe in ihrer Folge $= a, b, c, d, e, f$, o ist: $ab = cd = ef = 1$ und $b + c = d + e = f + a = 1$. Eine unendliche Reihe, deren erstes Glied $= a$, und wo das Product aus jedem ungeraden Gliede in das nächtsfolgende gerade $= 1$, so wie die Summe jedes geraden Gliedes und des nächstfolgenden ungeraden $= 1$ sein sollte, würde daher nichts anderes, als eine continuirliche Wiederholung jener 6 Werthe $a, \frac{1}{a}, \ldots 1-a$ sein.

8) Um, wenn die Puncte A, B, C, D einer Geraden a, und von den entsprechenden Puncten $A', B', \ldots$ der entsprechenden Geraden a' drei Puncte A', B', C' gegeben sind, den vierten D' zu finden, kann man sich folgender einfachen Construction bedienen.

Man setze die Linien a und a' (Fig. 1. Taf. II.) unter einem beliebigen Winkel an einander, so dafs die Puncte A und A' zusammenfallen. Hierauf ziehe man BB' und CC', welche sich in O schneiden, so ist dieser Durchschnitt von OD mit a' der gesuchte Punct D'.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, ist nur darzuthun, dafs $(A, B', C', D') = (A, B, C, D)$. Man denke sich zu dem Ende eine der eben construirten Figur entsprechende gezeichnet; die den Puncten $A, B, \ldots B', \ldots O$ entsprechenden seien darin $\alpha, \beta, \ldots, \beta', \ldots o$, und daher $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D)$, $(\alpha, \beta', \gamma', \delta') = (A, B', C', D')$. Werde nun, was immer geschehen kann (Nr. 3.), der Punct O unendlich entfernt angenommen, so sind $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ mit einander parallel, und es verhält sich $\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\gamma' : \gamma'\beta'$, $\alpha\delta : \delta\beta = \alpha\delta' : \delta'\beta'$. Mithin ist

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta', \gamma', \delta'),$$

also auch

$$(A, B, C, D) = (A, B', C', D').$$

9) Seien jetzt in der Geraden AB aufser den 4 Puncten $A, \ldots D$ noch mehrere andere $E, F, G, \ldots$ gegeben. Die ihnen entsprechenden in der Geraden $A'B'$ heifsen $E', F', G', \ldots$ So wie nun nach willkührlicher Annahme von A', B', C', der Punct D' durch die Gleichheit der D. Verhältnisse

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = d$$

bestimmt wurde (Nr. 6.), so werden auch die übrigen Puncte $E', F', G', \ldots$ mittelst der Gleichungen

$$(A, B, C, E) = (A', B', C', E') = e,$$
$$(A, B, C, F) = (A', B', C', F') = f,$$
u. s. w, u. s. w.

sich finden lassen, und es werden nach verrichteter Construction auch je zwei andere D.Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Puncten, z. B.

$$(B, C, E, F) \text{ und } (B', C', E', F')$$

einander gleich sein, jedes derselben $= x$. Da nun zur Construction des Systems der Puncte $A', B', \ldots E', F', \ldots$, wegen der willkührlichen Bestimmung der drei ersten, auch schon die Kenntnifs der Exponenten $d, e, f, \ldots$ hinreicht, und sich alsdann aus der Construction der Werth von x selbst ergiebt, so mufs x eine Function von $d, e, f, \ldots$ sein. Hat man also ein System von m Puncten $A, B, C, D, \ldots$ in einer geraden Linie, so ist von den $m-3$ D.Verhältnissen $(d, e, f, \ldots)$, welche die drei ersten Puncte A, B, C mit jedem der $m-3$ übrigen bilden, jedes andere D.Verhältnifs (x) des Systems eine Function. Denkt man sich daher alle möglichen D.Verhältnisse zwischen den m Puncten als Functionen dieser $m-3$ Gröfsen $d, e, f, \ldots$ ausgedrückt, so kann man, wenn irgend $m-3$ von einander unabhängige dieser D.Verhältnisse gegeben sind, daraus die Werthe von $d, e, f, \ldots$ und somit den Werth jedes andern D.Verhältnisses finden. Also:

Aus irgend $m-3$ von einander unabhängigen D.Verhältnissen eines Systems von m Puncten in einer geraden Linie kann jedes andere D.Verhältnifs dieses Systems gefunden werden. (§. 187.)

So findet sich, wenn bei den 5 Puncten $A, \ldots E$ die zwei D.Verhältnisse $(A, B, C, D) = p$ und $(B, C, D, E) = q$ gegeben sind, jedes dritte als Function von p und q, z. B. $(A, E, B, D) = (1-p)(1-q)$.

10) Die durch die Gleichheit der D.Verhältnisse ausgedrückte Relation zwischen zwei Systemen von Puncten in geraden Linien läfst sich auch noch auf eine andere merkwürdige Art darstellen. — Man hat:

$$d = (A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

und daher

$$AD.CB.d = AC.DB,$$

oder

$$AD(AB - AC)d = AC(AB - AD),$$

und wenn man mit $AB.AC.AD$ dividirt:

$$\frac{1-d}{AB} + \frac{d}{AC} = \frac{1}{AD},$$

und wenn man noch $1-d : d = \beta : \gamma$ setzt:

$$(a.) \quad \frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} = \frac{\beta + \gamma}{AD},$$

so wie umgekehrt hieraus die Gleichung:

$$(A, B, C, D) = d = \frac{\gamma}{\beta+\gamma},$$

und hieraus weiter die Gleichung:

$$(A', B', C', D') = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

folgt. Besteht daher zwischen den Abschnitten AB, AC, AD die Relation (a.), so mufs auch für die entsprechenden Abschnitte $A'B'$, etc.

$$(a'.) \quad \frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} = \frac{\beta+\gamma}{A'D'}$$

sein; d. h. ist AD das harmonische Mittel von AB und AC für die Coefficienten β und γ, so ist es auch $A'D'$ von $A'B'$ und $A'C'$ für dieselben Coefficienten.

Dafs diese Relation auf jede gröfsere Zahl von Paaren sich entsprechender Puncte in geraden Linien ausgedehnt werden kann, so dafs, wenn

$$\frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} + \frac{\delta}{AD} + \ldots = \frac{\beta+\gamma+\delta+\ldots}{AM}$$

ist, dieselbe Gleichung noch besteht, wenn man für A, B, ... M die entsprechenden Puncte A', B', ... M' setzt, dies zeigt Poncelet in seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* im 3ten Hefte des 3ten Bandes dieses Journals, Seite 240.

Um diese Erweiterung des vorigen Satzes mit Hülfe der Lehre von den D.Verhältnissen zu beweisen, so folgt aus der angenommenen Gleichung:

$$\beta\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AM}\right) + \gamma\left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AM}\right) + \delta\left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{AM}\right) + \ldots = 0,$$

d. i.

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB \,.\, AM} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC \,.\, AM} + \delta \cdot \frac{DM}{AD \,.\, AM} + \ldots = 0,$$

also auch

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC} : \frac{PM}{AP} + \delta \cdot \frac{DM}{AD} : \frac{PM}{AP} + \ldots = 0,$$

wo P einen beliebigen Punct der Geraden $AB\ldots$ bezeichnet; und weil

$$\frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} = \frac{AP}{PM} : \frac{AB}{BM} = (A, M, P, B), \text{ etc.},$$

so kommt:

$$\beta(A, M, P, B) + \gamma(A, M, P, C) + \delta(A, M, P, D) + \ldots = 0.$$

Wegen der Unveränderlichkeit der D.Verhältnisse von dem einen Systeme zum andern ist daher auch:

$$\beta(A', M', P', B') + \gamma(A', M', P', C') + \ldots = 0,$$

woraus sich auf umgekehrtem Wege

$$\frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} + \ldots = \frac{\beta + \gamma + \ldots}{A'M'}$$

ergiebt.

11) Wir gehen nunmehr zu den Relationen zwischen zwei Systemen von Puncten über, wo die Puncte jedes Systems für sich nicht mehr, wie bisher, blofs in einer Geraden, sondern in einer Ebene überhaupt liegen. Seien demnach A, B, C, D (Fig. 2.) irgend vier Puncte der einen Ebene, von denen keine drei in einer Geraden sind, und A', B', C', D' die ihnen entsprechenden Puncte in der andern, von denen ebenfalls keine drei in einer Geraden liegen. Aufser diesen negativen Bedingungen finden zwischen beiden Systemen keine weiteren statt, und die erstern vier Puncte sowohl, als die vier letztern, können ganz nach Willkühr genommen werden. Mit jedem fünften Puncte E aber, der zu den vier erstern hinzukommt, wird auch der entsprechende Punct E' in der Ebene der vier letztern bestimmt sein (Nr. 4.).

Um nun E' zu finden, wenn E gegeben ist, hat man auch hier blofs das Prinzip von der Gleichheit der D.Verhältnisse in Anwendung zu bringen.

Man ziehe zu dem Ende BD, BE, welche AC in M, P treffen, und AD, AE, welche BC in N, Q schneiden. Auf dieselbe Art werden M', P', N', Q' in der andern Ebene bestimmt, wo E', und damit P', Q', einstweilen als schon bekannt vorausgesetzt werden. Da nun B, B' und D, D' zwei Paare sich entsprechender Puncte sind, so wird auch jedem andern Puncte der Linie BD ein Punct in $B'D'$, und eben so jedem Puncte in AC ein Punct in $A'C'$, folglich dem Puncte M, als dem gemeinschaftlichen Puncte der BD und AC, der Durschnittspunct M' von $B'D'$ und $A'C'$ entsprechen. Auf gleiche Art sind auch N und N', P und P', Q und Q' Paare sich entsprechender Puncte. Es liegen aber A, C, M, P und die ihnen entsprechenden Puncte A', C', M', P' in geraden Linien. Mithin mufs sein:

$$\text{I.}\quad \frac{AM}{MC} : \frac{AP}{PC} = \frac{A'M'}{M'C'} : \frac{A'P'}{P'C'},$$

woraus sich P finden läfst, da alle übrigen in dieser Proportion vorkommenden Puncte gegeben sind. — Eben so wird Q' durch die Gleichheit der D-Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') gefunden. Hiermit ergiebt sich endlich E' als der gegenseitige Durchschnitt von $B'P'$ und $A'Q'$.

12) So wie der Punct E', so kann auch für jeden andern Punct in der ersten Ebene der entsprechende Punct in der zweiten durch zwei Gleichungen zwischen D-Verhältnissen gefunden werden, woraus nothwendig folgt, daſs alle metrischen Relationen zwischen beiden Systemen auf die Gleichheit ihrer D-Verhältnisse hinauskommen, und daſs eine solche Relation im allgemeinen Falle, wo von den in Betracht kommenden Puncten keine drei in einer Geraden liegen, zwischen nicht weniger als fünf Paaren sich entsprechender Puncte bestehen kann.

Die zur Aufstellung einer solchen Relation im Vorigen angewendeten Hülfspuncte M, P oder N, Q und die ihnen entsprechenden M', P', etc. können folgendergestalt beseitigt werden. Es ist ein bekannter Satz, daſs wenn eine Gerade AC von einer andern BD im Puncte M geschnitten wird, das Verhältniſs, nach welchem dieses geschieht,

$$AM:CM = \text{dem Verhältnisse der Dreiecke } ABD:CBD$$

ist. Auf gleiche Art hat man, weil BE die AC in P schneidet,

$$AP:CP = ABE:CBE$$

und eben so in der andern Figur:

$$A'M':C'M' = A'B'D':C'B'D', \quad A'P':C'P' = \text{etc.}$$

Hierdurch aber verwandelt sich die obige Proportion I. in:

$$\text{II.} \quad \frac{ABD}{CBD}:\frac{ABE}{CBE} = \frac{A'B'D'}{C'B'D'}:\frac{A'B'E'}{C'B'E'}.$$

Sind demnach $A, \ldots E$ irgend fünf Puncte der einen Ebene, und $A', \ldots E'$ die ihnen entsprechenden in der andern, so findet zwischen den durch ihre Verbindung gebildeten Dreiecken immer die Proportion II. statt.

Da die fünf Paare sich entsprechender Puncte ganz nach Belieben zu nehmen sind, so können auch die in II. sie bezeichnenden Buchstaben willkührlich, nur in beiden Systemen auf einerlei Weise, mit einander vertauscht werden. So folgt z. B. durch Verwechselung des A mit B und des A' mit B':

$$\frac{BAD}{CAD}:\frac{BAE}{CAE} = \frac{B'A'D'}{C'A'D'}:\frac{B'A'E'}{C'A'E'},$$

eine Proportion, welche auch geradezu aus der Gleichung der D-Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') (Nr. 11.) entspringt.

13) Wenn es nicht darauf ankommt, bei Angabe der von der einen Ebene zur andern constant bleibenden Verhältnisse nur die möglich kleinste Anzahl (= 5) willkührlich genommener Puncte zuzulassen, so kann man diesen Verhältnissen noch mehrere andere Formen geben, die ihrer symmetrischen Bildung wegen angeführt zu werden verdienen. — Werde die Linie AB (Fig. 3.) von den Linien CD und EF in den Puncten M und N geschnitten, so ist, wie in Nr. 12.:

$$AM : BM = ACD : BCD,$$
$$AN : BN = AEF : BEF,$$

und folglich das Verhältnifs

$$\text{II.}^* \quad (ACD : BCD) : (AEF : BEF)$$

dem D. Verhältnisse $(AM : MB) : (AN : NB)$ gleich, und daher das eben so aus den 6 entsprechenden Puncten $A', \ldots F'$ gebildete von gleichem Werthe; wobei man noch bemerke, dafs von den 4 Dreiecken des Verhältnisses II.* die zwei ersten und die zwei letzten einerlei Grundlinien (CD und EF), das erste und dritte aber, so wie das zweite und vierte einerlei Spitzen (A und B) haben.

Kürzer noch kann man daher dieses Verhältnifs ausdrücken durch

$$(Aa : Ba) : (Ab : Bb) = \frac{Aa}{Ba} : \frac{Bb}{Ab},$$

wo a, b für die Linien CD, EF gesetzt sind, und somit Aa das Dreieck bezeichnet, welches A zur Spitze und a zur Grundlinie hat, etc.

14) Seien jetzt $A, B, C, \ldots$ mehrere Puncte und $a, b, c, \ldots$ mehrere gerade Linien von bestimmter Länge in der einen Ebene, so ist, wie wir eben gesehen haben, von dieser Ebene zur andern das Verhältnifs

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Bb}{Ab} = \alpha$$

constant; und eben so müssen es auch die Verhältnisse

$$\frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Ac} = \beta, \quad \frac{Ac}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ad} = \gamma, \quad \frac{Ad}{Ed} : \frac{Ee}{Ae} = \delta, \quad \text{etc.}$$

sein. Bildet man aus ihnen die Producte $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$, etc., so bekommt man:

$$\text{III.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Ac},$$

$$\text{IV.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ad},$$

$$\text{V.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ed} \cdot \frac{Ee}{Ae}, \quad \text{etc.,}$$

zusammengesetzte Verhältnisse, die daher gleichfalls von der einen Ebene zur andern constant sein müssen.

Es lassen sich aber diese Verhältnisse noch anschaulicher darstellen, wenn man statt der Linien a, b, c, ... ihre Durchschnitte mit den, die Puncte A, B, C, ... unter einander verbindenden Linien einführt. Werde nemlich die Linie AB von a im Puncte M, BC von b in N, CA und CD von c in O und P, DA und DE von d in Q und R, EA von e in S, etc. geschnitten, so ist, nach dem in Nr. 12. angeführten Satze:

$$\frac{Aa}{Ba}=\frac{AM}{BM}, \quad \frac{Bb}{Cb}=\frac{BN}{CN}, \quad \frac{Cc}{Ac}=\frac{CO}{AO}, \quad \frac{Cc}{Dc}=\frac{CP}{DP}, \quad \frac{Dd}{Ad}=\frac{DQ}{AQ}, \quad \text{etc.}$$

und die Verhältnisse III., IV., V., etc. werden damit:

$$\text{III.}^* \quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CO}{OA},$$

$$\text{IV.}^* \quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA},$$

$$\text{V.}^* \quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DR}{RE}\cdot\frac{ES}{SA}, \quad \text{etc. *)},$$

wobei jeder einzelne Factor, wie $\frac{AM}{BM}$, das Verhältnifs ausdrückt, nach welchem der zweimal gesetzte Punct M die Linie schneidet, welche die zwei andern Puncte A und B verbindet, und wo daher die drei in jedem Factor vorkommenden Puncte immer in einer Geraden liegen.

Hiernach ist das Verhältnifs III.* zusammengesetzt aus den drei Verhältnissen, nach welchen die drei Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC von den resp. in ihnen liegenden Puncten M, N, O getheilt werden. Eben so ist IV.* das Verhältnifs, nach welchem die vier Seiten AB, ... DA des Vierecks $ABCD$ resp. in M, N, P, Q geschnitten werden; u. s. w. Ich habe daher die solcher Gestalt gebildeten Verhältnisse III.*, IV.*, V.* u. s. w. Dreieck-, Viereck-, Fünfeckschnitts-Verhältnisse u. s. w. und überhaupt Vieleckschnitts-Verhältnisse genannt (§. 215.).

15) Jedes Vieleckschnitts-Verhältnifs ist daher von der einen Ebene zur andern constant; d. h. sind A und A', B und B', ... I und I' mehrere Paare sich entsprechender Puncte, also

*) Dafs hierbei die Buchstaben in den Nennern der einzelnen Factoren in umgekehrter Folge geschrieben worden, MB statt des vorigen BM, etc., ist deshalb geschehen, um diese Formeln mit denen im *Baryc. Calcul* übereinstimmend darzustellen. Die absoluten Werthe derselben ändern sich dadurch nicht, sondern nur von III., V., VII. etc. die Vorzeichen.

$AB, \ldots I$ und $A'B', \ldots I'$ zwei sich entsprechende Vielecke, sind ferner $M, N, \ldots X$ resp. in den Seiten $AB, BC, \ldots IA$ der erstern Vielecks nach Belieben genommene Puncte, und $M', N', \ldots X'$ die entsprechenden Puncte, die daher resp. in den Seiten $A'B', B'C', \ldots I'A'$ des andern Vielecks liegen werden, so ist das Product aus den Verhältnissen $AM:MB$, $BN:NC$, etc. $IX:XA$, nach welchen die Seiten AB, $BC, \ldots IA$ des einen Vielecks von den in ihnen gewählten Puncten M, $N, \ldots X$ getheilt werden, von derselben Gröfse, als das Product, welches aus den entsprechenden Verhältnissen $A'M':M'B'$, $B'N':N'C'$, etc. $I'X':X'A'$ des andern Vielecks zusammengesetzt wird.

Dieser Satz gilt immer, wie auch die Puncte $A, B, \ldots I$ oder die Spitzen des Vielecks liegen mögen, selbst wenn sie alle, und folglich auch die Schneidepuncte $M, N, \ldots X$, in einer und derselben Geraden enthalten sind; er gilt immer, welches auch die Zahl der Spitzen sein mag, selbst wenn deren nur zwei sind, und mithin das Vieleck zum Zweieck wird. Denn seien A, B die beiden Spitzen und folglich AB, BA die beiden Seiten, M, N ihre Schneidepuncte, so reducirt sich das Vielecksverhältnifs auf $(AM:MB)(BN:NA)$, welches einerlei mit dem D. Verhältnifs $(AM:MB):(AN:NB)$, und mithin von der einen Ebene zur andern ebenfalls constant ist. Ein D. Verhältnifs läfst sich daher auch als das einfachste Vielecksverhältnifs, nemlich als ein Zweieckschnittsverhältnifs, betrachten.

Der Begriff des Vielecks ist demnach hier in ganz allgemeiner Bedeutung zu nehmen und darunter eine Figur zu verstehen, die von einer in sich zurückkehrenden, gebrochenen geraden Linie gebildet wird. Die Rückkehr in sich selbst, welche daran erkannt wird, dafs bei jeder der Formeln III*, IV.*, V.*, etc. die Vielecksspitze im Zähler des ersten Factors zugleich im Nenner des letzten vorkommt, und das überhaupt von je zwei nebeneinander stehenden Factoren die Spitzen im Nenner des vorangehenden und im Zähler des nachfolgenden einerlei sind, — diese Rückkehr ist etwas wesentlich Nothwendiges, indem mit Weglassung irgend eines der Factoren, als wodurch die Schliefsung des Vielecks unterbrochen würde, auch die Unveränderlichkeit des Verhältnisses von der einen Ebene zur andern nicht mehr statt finden würde.

16. Sind in einer Ebene m Puncte gegeben, und sollen in einer andern Ebene die ihnen entsprechenden Puncte gefunden werden, so kann

man von letzteren irgend 4 nach Willkühr nehmen, worauf jeder der $m-4$ übrigen Puncte dadurch gefunden wird, dafs man zwei die Lage des Punctes in der ersten Ebene bestimmende D.Verhältnisse in der andern Ebene von gleicher Gröfse macht (Nr. 11.). Zur Construction des ganzen Systems in der andern Ebene sind daher nicht mehr als $2(m-4)$ D.Verhältnisse überzutragen nöthig, und es werden sodann auch je zwei andere D.Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Puncten beider Ebenen einander gleich sein. — Es folgt hieraus, wie in Nr. 9., dafs von den gedachten $2(m-4)$ D.Verhältnissen alle andern in den Figuren noch vorkommenden D.Verhältnisse abhängig sind, und überhaupt, weil jedes Vielecksverhältnifs als eine Function von D.Verhältnissen, und jedes D.Verhältnifs zugleich als Vielecksverhältnifs betrachtet werden kann (Nr. 15.):

Sind bei einem Systeme von m Puncten in einer Ebene von den aus der gegenseitigen Verbindung der Puncte durch gerade Linien entstehenden Vielecksverhältnissen irgend $2m-8$ von einander unabhängige gegeben, so kann daraus jedes andere Vielecksverhältnifs der Figur gefunden werden (§. 233.). Oder mit andern Worten:

Zwischen je $2m-7$ Vielecksverhältnissen, welche durch geradlinige Verbindung von m Puncten in einer Ebene entstehen, findet immer wenigstens eine Gleichung statt.

Uebrigens ist diese geradlinige Verbindung keinesweges blofs auf die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Linien zu beschränken, welche die m Puncte zu zweien mit einander verknüpfen. Denn die hierdurch in beiden Ebenen entstehenden Durchschnittspuncte entsprechen sich wiederum (Nr. 11.); die durch je zwei derselben, die noch nicht durch eine Gerade verbunden waren, von Neuem gezogenen Geraden sind daher gleichfalls sich entsprechende Linien, und folglich die neuen durch sie gebildeten D.- und Vielecks-Verhältnisse von der einen Ebene zur andern einander gleich. Wie weit man daher auch die Verbindung der m Puncte fortsetzen mag, so dafs immer die entstehenden Durchschnitte von Neuem unter sich und mit den anfänglichen m Puncten oder den schon vorhandenen Durchschnitten verbunden werden, so können doch alle hiermit sich bildenden Vielecksverhältnisse aus irgend $2m-8$ derselben, die von einander unabhängig sind, gefunden werden.

17) Eine ganz besondere Aufmerksamkeit verdient der so eben erhaltene Satz für den Fall, wo m seinen möglich kleinsten Werth $=4$ hat, und daher $2m-8=0$ wird. Bei einem Systeme von 4 Puncten in einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, werden daher alle durch fortgesetzte Verbindung dieser Puncte entstehenden *D.*- und Vielecks-Verhältnisse sich finden lassen, ohne dafs ein einziges von ihnen gegeben zu sein braucht. Dieses merkwürdige Resultat erhellet auch schon daraus, dafs bei der Construction eines entsprechenden Systems die ersten vier, also gegenwärtig alle Puncte nach Willkühr genommen werden können, und dafs dann alle durch geradlinige Verbindung der Puncte in beiden Systemen auf gleiche Art sich bildenden Vielecksverhältnisse von gleicher Gröfse sind; dafs also diese Verhältnisse, oder vielmehr die Exponenten derselben, keinesweges von der gegenseitigen Lage der anfänglichen 4 Puncte, sondern blofs von der Art und Weise abhängen, wie die 4 Puncte nach und nach mit einander verbunden worden sind.

Aber noch mehr: diese Exponenten müssen immer rational sein. Denn sind die vier Puncte gegeben und aufserdem noch die Art ihrer Verbindung durch gerade Linien, wodurch man zu den irgend ein Vielecksverhältnifs bildenden Puncten gelangt, so kann man damit die letztern Puncte immer ohne Zweideutigkeit finden. Der Exponent des Vielecksverhältnisses, der nach dem Vorigen nicht von der gegenseitigen Lage der erstern vier Puncte, sondern blofs von ihrer Verbindungsart durch gerade Linien abhängt, kann daher ebenfalls keine zwei- oder mehrdeutigen Ausdrücke, also keine Wurzelgröfsen enthalten, und noch weniger irrationale Zahlen, die aus transcendenten Operationen entspringen; er mufs folglich eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch sein.

18) Die Figur, welche hervorgeht, wenn man vier Puncte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, durch Gerade verbindet, die drei damit entstehenden Durchschnitte abermals zu zweien durch Gerade zusammenzieht, und diese geradlinige Verbindung der immer neu entstehenden Durchschnitte unter sich und mit den schon vorhandenen, so weit als man will, fortsetzt, diese Figur habe ich ein Netz genannt (§. 200.), die Linien selbst und ihre gegenseitigen Durchschnitts-

puncte, die Linien und Puncte des Netzes, und die vier Puncte, von denen die Construction ausgeht, die Hauptpuncte des Netzes.

Das in dem Vorhergehenden erhaltene Resultat läſst sich hiermit einfach so ausdrücken:

Jedes in dem Netze sich bildende Vielecksverhältniſs hat einen rationalen, bloſs von der Constructionsart und nicht zugleich von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpuncte abhängigen Werth (§. 202. und §. 215.).

Sind daher A, B, C, D die vier Hauptpuncte, P irgend ein Netzpunct, so sind auch die Durchschnitte von PD mit AB und BC, welche M und N heiſsen, Netzpuncte, und folglich das D.Verhältniſs:

$$(PM:MD):(PN:ND),$$

also auch das ihm gleiche Verhältniſs zwischen Dreiecken:

$$(PAB:ABD):(PBC:BCD)$$

rational, und dieses letztere, wie man auch die vier Hauptpuncte darin mit einander vertauschen mag. Die Rationalität dieses Verhältnisses kann als die characteristische Eigenschaft eines Netzpunctes P in Bezug auf die vier Hauptpuncte betrachtet werden, indem sich zeigen läſst (§. 203.), daſs umgekehrt jeder Punct der Ebene, für welchen jene Verhältnisse von Dreiecken zwischen ihm und den Hauptpuncten rational sind, ein Punct des Netzes ist, und mithin durch fortgesetzte Verbindung der Hauptpuncte gefunden werden kann.

Hieraus läſst sich weiter die nicht weniger merkwürdige Eigenschaft eines Netzes folgern (§. 205.), daſs, wenn nächst den vier Hauptpuncten noch irgend ein fünfter Punct der Ebene gegeben ist, man durch fortgesetzte Verbindung der vier ersteren einen Punct finden kann, der mit dem fünften entweder zusammenfällt, oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene; — daſs folglich, wenn daſs Weben des Netzes ohne Aufhören fortgesetzt wird, die Ebene in allen ihren Theilen und nach allen Richtungen mit Puncten und Linien des Netzes angefüllt wird.

19) Wir wollen jetzt die in Nr. 17. erwiesene Rationalität der Vielecksverhältnisse im Netze durch einige Beispiele erläutern.

1. Man verbinde die vier Puncte A, B, C, D (Fig. 4.) zu zweien, durch gerade Linien, und nenne die Durchschnitte von AD mit BC, von BD mit CA, von CD mit AB resp. F, G, H, so gehören diese Puncte dem

aus A, B, C, D entstehenden Netze an. Ohne daher noch den Exponenten des Dreieckschnitts-Verhältnisses

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB)$$

zu kennen, kann man doch schon im Voraus behaupten, dafs er eine rationale Zahl sein werde. Nun weifs man aus den ersten Elementen, dafs, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck, und D der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ist, F, G, H die Mittelpuncte der Seiten sind, und folglich der Exponent jenes Verhältnisses $= 1$ ist. Mithin mufs er auch für jede andere Lage der vier Puncte $A \ldots D$, $= 1$ sein.

2. Ein anderes bei dieser Figur vorkommendes Dreiecksverhältnifs ist

$$(BC:CF)(FD:DA)(AH:HB),$$

nach welchem die Seiten BF, FA, AB des Dreiecks ABF in C, D, H geschnitten werden. Auch dieses Verhältnifs mufs daher einen constanten, rationalen Werth haben. Es ist aber in dem vorhin zu Hülfe genommenen speciellen Falle $FD = DH$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AHD, AFB: $DH:DA = BF:BA = 1:2$, also auch $FD:DA = \frac{1}{2}$; ferner $BC:CF = -2$ und $AH:HB = 1$. Hierdurch wird der Werth jenes Dreieckverhältnisses bei dieser und folglich auch bei jeder andern Lage von $A, \ldots D$, $= \frac{1}{2} . -2 . 1 = -1$; d. h.

Das Product aus den drei Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines Dreiecks von einer Transversale geschnitten werden, ist immer der negativen Einheit gleich.

Anmerkung. Daraus, dafs dieses Product immer negativ sein soll, erkennt man, dafs von den drei Factoren desselben entweder einer oder alle drei negativ sein müssen; dafs folglich die Transversale entweder zwei Seiten selbst und die dritte in ihrer Verlängerung, oder alle drei Seiten in ihren Verlängerungen schneidet. Vergl. Nr. 5. — Eben so ist bei dem vorhergehenden Dreiecksverhältnisse

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB),$$

weil es der positiven Einheit gleich gefunden wurde, entweder jeder der drei Factoren, oder nur einer positiv, und daher sind entweder alle drei Puncte F, G, H in ihren resp. Seiten selbst, oder nur einer derselben in seiner Seite, die beiden andern in den Verlängerungen der ihrigen enthalten, und aufserdem kein dritter Fall möglich. — Wiewohl sich nun dieses auch aus höchst einfachen geometrischen Betrachtungen ergiebt, so ist doch eine solche, bis jetzt wohl noch nicht angestellte Vergleichung der Formel mit der Figur schon an sich bemerkenswerth, und kann bei weniger einfachen Figuren selbst Nutzen bringen, indem man dadurch zu Resultaten über die gegenseitige Lage der Theile geführt wird, die man auf anderem Wege nicht eben so leicht erhalten haben würde.

So findet sich z. B. (§. 199. *c.*), dafs jedes Vielecksverhältnifs, bei welchem die Schneidepuncte in einer Geraden liegen, der Einheit gleich ist, und zwar der positiven oder negativen, nachdem die Seitenzahl des Vielecks gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt auf ähnliche Weise, dafs, wenn ein Vieleck, dieses in der allgemeinen Bedeutung wie Nr. 15. genommen, von einer Transversale geschnitten wird, die Anzahl der in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten beim Vieleck mit gerader Seitenzahl gerade, mit ungerader ungerade ist; dafs folglich, welches auch die Seitenzahl sein mag, die Anzahl der innerhalb ihrer Endpuncte geschnittenen Seiten immer gerade ist. — Läfst man die Seiten des Vielecks unendlich klein werden, so entsteht eine in sich zurücklaufende Curve, die daher von einer Geraden immer in einer geraden Anzahl von Puncten geschnitten wird. Auch gilt dieses noch, wenn man statt der Geraden eine zweite Curve setzt, die sich entweder über alle Grenzen ausdehnt, oder ebenfalls in sich zurückläuft.

3. Man ziehe GH, welche BC in K schneide. Um den Werth des damit entstehenden nothwendig rationalen D. Verhältnisses

$$(BF:FC):(BK:KC)$$

zu finden, so ist, unter der in 1. gemachten Annahme, $BF:FC=1$, HG mit BC parallel, und daher BK der CK gleich zu achten, also $BK:KC=-1$, wodurch der Werth jenes D. Verhältnisses $=-1$ wird; d. h. BC wird in F und K harmonisch getheilt (Nr. 6.).

4. Schneide GH die AD in L.

Man ziehe noch FG, welche AB, CD in M, N treffe, und werde der Exponent des Viereckschnitts-Verhältnisses:

$$(AM:MB)(BK:KC)(CN:ND)(DL:LA)$$

verlangt, nach welchem die Seiten des Vierecks $ABCD$ in M, K, N, L geschnitten werden. Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man sich A, B, C, D als die Spitzen eines Parallelogramms vorstellt. Denn alsdann werden, wie man bald aus (Fig. 5.) wahrnimmt, M, K, N, L die Mittelpuncte der Seiten desselben, und mithin der gesuchte Exponent $=1$.

Dafs übrigens, und wie mit Hülfe dieser neuen Ansicht der Figur die Werthe der vorigen Doppel- und Dreiecksverhältnisse hätten gefunden werden können, bedarf keiner Erörterung.

5. Sei O der Durchschnitt von AC mit BL, so findet sich das Dreiecksverhältnifs:

$$(BL:LO)(OC:CG)(GD:DB) = -2.$$

Zeichnet man nemlich $ABCD$ als Parallelogramm und nennt Z den Durchschnitt von BL mit GM, so verhält sich:

$$LO:OZ = AO:OG = LA:GZ = KB:GZ = LK:LG = 2:1.$$

Da ferner $LZ = ZB$, so ist $LO = 2OZ = \frac{2}{3}LZ = \frac{1}{3}LB$; $OG = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{3}AG = \frac{1}{3}GC$; $OC = \frac{4}{3}GC$; und endlich $GD = \frac{1}{2}BD$, woraus der angegebene Werth des Dreiecksverhältnisses hervorgeht.

6. Sei P der Durchschnitt von FH mit BL, so hat man:

$$(BL:LO)(OP:PB) = 3.$$

Denn beim Parallelogramm ist $LB = 3LO$ und $OP = BP$, weil F und H, also auch P, unendlich entfernte Puncte sind.

7. Dividirt man das Zweiecksverhältnifs 6. in das Dreiecksverhältnifs 5., so kommt das Dreiecksverhältnifs:

$$(OC:CG)(GD:DB)(BP:PO) = -\tfrac{2}{3}.$$

20) Werden fünf willkührlich in einer Ebene genommene Puncte durch Gerade verbunden, oder was dasselbe ist: construirt man ein Netz, indem man von diesen 5 Puncten, als Hauptpuncten ausgeht, so sind nicht mehr alle damit sich bildenden Vielecksverhältnisse blofs von der Art der Verbindung abhängig; wohl aber wird jedes von ihnen sich bestimmen lassen, wenn man irgend $2.5-8=2$ von einander unabhängige derselben kennt (Nr. 16.).

Beispiel. Seien A, B, C, D, E (Fig. 6.) fünf beliebige Puncte in einer Ebene. Man ziehe die 5 Geraden AB, BC, CD, DE, EA, welche sich in F, G, H, I, K schneiden, wie die Figur zeigt. Zwischen den 4 Puncten, in denen jede der 5 Geraden von den jedesmal 4 übrigen geschnitten wird, bilden sich mehrere D.Verhältnisse, die aber, in jeder Geraden für sich, von einander abhängig sind (Nr. 8.). Werde daher verlangt: aus einem der D.Verhältnisse in BC und aus einem in DE ein D.Verhältnifs in CD zu finden.

Weil die Seiten FC, CD, DF des Dreiecks CDF von EA in I, G, E und von AB in B, K, H geschnitten werden, so hat man (Nr. 19. 2.):

$$(FI:IC)(CG:GD)(DE:EF) = -1,$$
$$(FB:BC)(CK:KD)(DH:HF) = -1,$$

und wenn man die letztere Gleichung in die erstere dividirt:

$$\left(\frac{FI}{IC}:\frac{FB}{BC}\right)\left(\frac{FH}{HD}:\frac{FE}{ED}\right) = \left(\frac{CK}{KD}:\frac{CG}{GD}\right).$$

Setzt man daher die D. Verhältnisse:

$$(F, C, I, B) = p, \quad (F, D, H, E) = q,$$

so ist

$$(C, D, K, G) = pq;$$

und eben so muſs jedes andere D.- und Vielecksverhältniſs dieser Figur durch p und q ausgedrückt werden können. So finde ich mittelst baryc. Rechnung, daſs die beiden Fünfeckschnitt-Verhältnisse:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HE}\cdot\frac{EI}{IA} \text{ und } \frac{AG}{GE}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CI}{IB}\cdot\frac{BH}{HA}$$

einander gleich sind, jedes von ihnen

$$= \frac{pq-1}{pq(p-1)(q-1)}.$$

21) Hat man ein System von 6, 7, 8, ... willkührlich in einer Ebene genommenen Puncten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein System von eben so vielen in der Ebene beliebig gezogenen Linien, so müssen 4, 6, 8, ... von einander unabhängige Vielecksverhältnisse gegeben sein, um die Werthe aller übrigen finden zu können. Indessen sind die hierher gehörigen Aufgaben zu complicirt, als daſs ein Beispiel an diesem Ort gegeben werden könnte. Auch möchten die Hülfsmittel, welche man in der Geometrie gewöhnlich in Anwendung zu bringen pflegt, bei Aufgaben solcher Art nur mühsam zum Ziele führen. Die Vortheile, welche der barycentrische Calcul hierbei gewährt, der sich zu diesem Zweck noch besonders vereinfachen läſst, habe ich in dem 8ten Capitel des 2ten Abschnitts auseinander gesetzt, worauf ich daher Diejenigen, welche sich mit diesem Gegenstande näher beschäftigen wollen, verweise. — Hat man es bloſs mit einem Systeme beliebig gezogener Geraden zu thun, deren Durchschnittspuncte nicht wiederum durch Gerade verbunden werden, so reicht auch diejenige Methode aus, die im 5ten Capitel desselben Abschnitts erklärt worden, und welche in einem besondern Algorithmus mit D. Verhältnissen besteht.

22) Den Beschluſs dieses Aufsatzes mögen einige Sätze über die metrischen Relationen machen, welche in der Lineal-Geometrie bei **Kegelschnitten** vorkommen.

Ist in der einen der beiden oft gedachten Ebenen eine Curve verzeichnet, und die Gleichung derselben zwischen den recht- oder schiefwinkligen Coordinaten t und u gegeben, so erhält man die Gleichung für die entsprechende Curve zwischen den Coordinaten x, y in der andern Ebene, wenn man in der Gleichung zwischen t und u,

$$t=\frac{ax+by+c}{x+my+n},\quad u=\frac{fx+gy+h}{x+my+n}$$

setzt (Nr. 2.). Da die Nenner in diesen Ausdrücken für t und u einander gleich sind, so ersieht man leicht, dafs die solchergestalt sich ergebende Gleichung zwischen x und y mit der Gleichung zwischen t und u von demselben Grade ist, dafs also je zwei sich entsprechende Curven immer zu derselben Ordnung gehören. So wie daher einer Geraden immer eine Gerade entspricht, so entspricht auch jedem Kegelschnitte ein Kegelschnitt, u. s. w.

Sind ferner A und A' zwei, in sich entsprechenden Curven liegende, sich entsprechende Puncte, so werden auch die in A und A' an die Curven gezogenen Tangenten zwei sich entsprechende Geraden sein. Denn ist B ein dem A unendlich nahe liegender Punct der einen Curve, so wird der ihm entsprechende B' in der andern Curve dem A' unendlich nahe sein, weil unendlich kleine Aenderungen von t und u auch nur unendlich kleine Aenderungen von x und y, im Allgemeinen wenigstens, zur Folge haben. Die Geraden AB und $A'B'$, so weit man will, verlängert gedacht, d. i. die an A und A' gezogenen Tangenten, werden sich daher gleichfalls entsprechen.

Werde nur noch erinnert, dafs einer Asymptote der einen Curve im Allgemeinen nicht auch eine Asymptote, sondern eine Tangente der andern entspricht, weil, wenn t, u unendlich grofs sind, deshalb nicht auch x, y unendlich sein müssen.

23) Ist in der einen Ebene ein Kegelschnitt gegeben, so kann man diesem, so lange noch keine andern Paare sich entsprechender Puncte bestimmt sind, nicht nur irgend einen beliebig in der andern Ebene verzeichneten Kegelschnitt entsprechend setzen, sondern noch irgend drei Puncten des einen Kegelschnitts drei willkührlich in dem andern genommene Puncte sich entsprechen lassen.

Seien, um dieses zu beweisen, k und k' (Fig. 7.) zwei beliebige Kegelschnitte, k in der einen, k' in der andern Ebene; A, B, C irgend drei Puncte in k; A', B', C' in k', die man den ersteren A, B, C resp. entsprechend setze. Man ziehe noch an k in A und B zwei Tangenten, welche sich in D schneiden, und an k' in A' und B' zwei Tangenten, welche sich in D' schneiden, und setze D und D' sich entsprechend, so hat man jetzt vier Paare sich entsprechender Puncte: A und A', ... D und D', und es ist damit für jeden fünften Punct der einen Ebene der entsprechende in der andern bestimmt (Nr. 4.). Ich behaupte nun, dafs nach Voraussetzung dieser vier Paare sich entsprechender Puncte jedem Puncte in k ein Punct in k' entsprechen wird, oder kürzer, dafs k und k' sich entsprechende Curven sein werden. Denn entspräche dem Kegelschnitte k nicht k', sondern die Curve l, so müfste diese erstlich nach Nr. 22. wieder ein Kegelschnitt sein.

Da ferner k durch A, B, C geht und von AD und BD berührt wird, so müssen auch A', B', C' in l liegen und $A'D'$, $B'D'$ Tangenten von l sein. Diese Eigenschaften von l kommen aber auch dem Kegelschnitte k' zu.

Da nun ein Kegelschnitt durch drei in ihm liegende Puncte und durch die an zwei derselben gezogene Tangenten immer und ohne Zweideutigkeit bestimmt ist, so kann l von k' nicht verschieden sein.

Hat man daher zwei Kegelschnitte k und k', und setzt drei Puncte A, B, C des ersten, dreien Puncten A', B', C' des letztern entsprechend, so wird auch jedem andern Puncte in k ein Punct in k' entsprechen, d. h. k und k' werden sich entprechende Curven sein, wenn man noch als viertes Paar sich entsprechender Puncte die Durchschnitte D und D' der in A, B und A', B' an k und k' gezogenen Tangenten hinzufügt. Je zwei Kegelschnitte k und k' lassen sich daher immer als sich entsprechende Curven betrachten, und überdies noch irgend dreien Puncten A, B, C des einen beliebige drei Puncte A', B', C' des andern entsprechend annehmen.

24) Man ziehe noch an C, C' Tangenten, welche AB, $A'B'$ in E, E' schneiden, ziehe CD, $C'D'$, welche AB, $A'B'$ in F, F' treffen, so sind E, E' und F, F' zwei neue Paare sich entsprechender Puncte, und folglich die D.Verhältnisse (A, B, E, F) und $(A', B', E', F',)$ einander gleich. Wie daher auch in einem Kegelschnitte die drei Puncte A, B, C genommen werden mögen, so mufs immer, wenn E und F auf die besagte Weise daraus abgeleitet worden, der Exponent des D.Verhältnisses

$$(AE:EB):(AF:FB)$$

denselben Werth haben, also eine bestimmte und zwar rationale Zahl sein, weil E und F aus A, B, C nur auf eine Weise gefunden werden können. Es ist aber, wenn man für den Kegelschnitt einen Kreis und C zum Mittelpuncte des Bogens AB nimmt, E in der Geraden AB unendlich entfernt, und F der Mittelpunct dieser Geraden; folglich $AE:EB = -1$, $AF:FB = 1$, und daher der Exponent des D.Verhältnisses in diesem speciellen Falle, also auch in allen andern Fällen, $= -1$; d. h. AB wird in E und F harmonisch getheilt. —

Schneide ferner AC die BD in G, GF den Kegelschnitt in H, DH die AB in K, so muſs, nach derselben Art wie vorhin zu schlieſsen, der Exponent des dadurch sich bildenden D.Verhältnisses (A, B, F, K) eine bestimmte Zahl sein, die aber nicht mehr rational ist, sondern eine Quadratwurzel enthält, weil die Gerade FG den Kegelschnitt nothwendig zweimal trifft, wodurch der Punct H, und somit auch der Punct K, zweideutig wird. In der That findet sich

$(A, B, F, K) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ und folglich $(A, B, F, K_1) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$,

wenn FG dem Kegelschnitt zum zweiten Male in H_1 begegnet, und DH_1, die AB in K_1 schneidet.

Um sich hiervon auf das Einfachste zu überzeugen, nehme man für den Kegelschnitt einen Kreis, A, B als Endpuncte eines Durchmessers und C als Mittelpunct des Halbkreises ACB. Alsdann sind FC, KH, BG auf AB normal, F ist der Mittelpunct des Kreises, und $AF = FB = FC = FH =$ dem Halbmesser, den man $= 1$ setze.

Hieraus folgt weiter $BG = 2$, $FG = \sqrt{5}$, und es verhält sich

$$FB:FK = FG:FH = \sqrt{5}:1,$$

also

$$FB + FK:FB - FK = \sqrt{5} + 1:\sqrt{5} - 1,$$

d. i.

$$AK:KB = 5 - 1:(\sqrt{5} - 1)^2 = 2:3 - \sqrt{5}.$$

Da ferner $AF:FB = 1:1$, so hat man

$$(AF:FB):(AK:KB) = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

wie zu erweisen war.

Auf eben die Art wird nun auch jedes andere durch ferneres Ziehen gerader Linien in unserer Figur entstehende D.- oder Vieleckschnitts-Verhältniſs einen bestimmten Werth haben, und wir erhalten somit folgenden merkwürdigen Satz:

„Verbindet man drei in einem Kegelschnitte liegende Puncte durch gerade Linien, und zieht in denselben Puncten Tangenten an den Kegelschnitt; erweitert man hierauf die Figur, indem man immer die schon vorhandenen Durchschnitte, welche die Geraden mit einander und mit dem Kegelschnitte machen, durch neue Geraden verbindet und von den aufserhalb des Kegelschnitts fallenden Durchschnitten Tangenten an denselben zieht, deren Berührungspuncte man wiederum unter sich und mit jenen Durchschnitten verbindet: so ist, wie weit man auch diese Construction fortsetzen mag, der Werth jedes somit sich bildenden Vieleckschnitts-Verhältnisses weder von den Parametern des Kegelschnittes noch von der Lage der anfänglichen drei Puncte in denselben, sondern blofs von der Art und Weise abhängig, auf welche man, von jenen drei Puncten ausgehend, zu den Puncten des Vieleckschnitts-Verhältnisses gelangt ist. Der Werth eines solchen ist daher immer eine bestimmte Zahl. Weil aber jede durch einen Punct innerhalb des Kegelschnittes geführte Gerade denselben in **zwei** Puncten schneidet, und weil von jedem Puncte aufserhalb des Kegelschnitts **zwei** Tangenten an ihn gezogen werden können, so wird diese Zahl im Allgemeinen nicht rational sein, sondern Quadratwurzeln enthalten."

25) Die so eben beschriebene Figur kann, analog dem Obigen (Nr. 18.), ein Netz heifsen, dessen Construction von einem Kegelschnitte und drei in demselben enthaltenen Puncten A, B, C ausgeht. Wir wollen jetzt dieser Construction noch einen vierten, willkührlich in dem Kegelschnitte anzunehmenden Punct M zum Grunde legen. Um den entsprechenden Punct M' in der andern Ebene zu finden, ziehe man DM, welche AB in N schneide; bestimme hierauf in $A'B'$ den Punct N' so, dafs $(A', B', E', N') = (A, B, E, N)$, und ziehe $D'N'$, welche den Kegelschnitt $A'B'C'$ in zwei Puncten schneiden wird. Um zu entscheiden, welcher von ihnen der dem M entsprechende M' ist, denke man sich den Kegelschnitt ABC von einem Puncte so durchlaufen, dafs dieser, von A ausgehend, nach B kommt, ohne dem C zu begegnen, wo er dann, nach derselben Richtung von B fortgehend, nach C kommen wird, ohne A zu treffen, und von C nach A zurück, ohne B zu treffen *).

*) Wie dieser Forderung bei der **Ellipse** immer Genüge geschehen kann, sieht man ohne Weiteres. — Eine **Parabel** hat man sich hierbei als eine sich in das Unendliche erstreckende **Ellipse** zu denken, so dafs der beschreibende Punct, nachdem er unendlich weit in dem einen Schenkel fortgegangen ist, in den andern Schenkel aus dem Unendlichen zurückkehrt. — Bei einer

Man bezeichne die drei somit durchlaufenen Theile durch $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so sind ihnen die auf gleiche Art in dem andern Kegelschnitte bestimmten und durch $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ zu bezeichnenden Theile resp. entsprechend; und wenn daher M z. B. in $\overline{BC}$ liegt, wie dies in unserer Figur der Fall ist, so muſs auch M' in $\overline{B'C'}$ begriffen sein.

Irgend zwei *Vl.* Verhältnisse, die in beiden Ebenen aus den Kegelschnitten und aus den in jedem derselben liegenden 4 Puncten durch Construction von Netzen auf gleiche Art sich bilden, werden nunmehr einander gleich sein, woraus wir zunächst schlieſsen, daſs mit dem *D.* Verhältnisse (A, B, E, N) des einen Netzes auch alle übrigen in demselben vorkommenden *D.*- und *Vl.* Verhältnisse gegeben sind; und überhaupt:

Alle *Vl.* Verhältnisse eines Netzes, das aus einem Kegelschnitte und vier in ihm liegenden Puncten construirt ist, lassen sich finden, wenn irgend eines derselben, das von allen vier Puncten zugleich abhängt, gegeben ist.

26) So wie der Punct M, so wird auch jeder andere willkührliche Punct des Kegelschnitts, in Bezug auf die drei ersten A, B, C, durch ein *D.* Verhältniſs bestimmt. Für jeden neu hinzukommenden willkürlichen Punct des Kegelschnitts muſs daher ein *D.*- oder *Vl.* Verhältniſs mehr gegeben sein. Da nun bei vier Puncten ein *Vl.* Verhältniſs nöthig war, so ziehen wir die allgemeine Folgerung:

Hat man einen Kegelschnitt und beliebige m in demselben liegende Puncte, so müssen in dem daraus construirten Netze irgend $m-3$ von einander unabhängige *Vl.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können.

Es ist dieser Satz als Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 9. zu betrachten, wo bei einem Systeme von m Puncten in einer geraden Linie, ebenfalls $m-3$ *Vl.* Verhältnisse gegeben sein muſsten. — Man bemerke noch, daſs bei einem Kegelschnitte und 5 Puncten desselben $5-3=2$ *Vl.* Verhältnisse erfordert werden, eben so, als wenn man ein System von 5 Puncten in einer Ebene überhaupt hat (Nr. 20.). Der Grund davon liegt in dem bekannten Satze, daſs durch 5 Puncte einer Ebene immer ein Kegelschnitt und nur einer beschrieben werden kann.

Hyperbel muſs der Punct beide Male, wenn er sich unendlich weit nach der Richtung einer Asymptote entfernt hat, nach dem entgegengesetzten, unendlich entfernten Ende derselben Asymptote überspringen und in das Endliche zurükkehren.

dafs folglich mit irgend 5 Puncten der Ebene immer auch schon der Kegelschnitt, in welchem sie liegen, vollkommen bestimmt ist. Sechs Puncte einer Ebene liegen im Allgemeinen nicht in einem Kegelschnitte. Soll daher auch der sechste Punct in dem Kegelschnitte enthalten sein, welcher durch die 5 ersten geht, so ist eben damit eine Bedingung für die Lage des sechsten in der Ebene gegeben, und da zur vollkommenen Bestimmung eines Punctes in einer Ebene zwei Bedingungen erfordert werden, so bedarf es noch einer zweiten Bedingung für den sechsten, und so für jeden andern Punct des Kegelschnitts. Diese zweite Bedingung ist aber das für jeden sechsten Punct hinzuzufügende *Vl.* Verhältnifs.

27) Man habe in einer Ebene einen Kegelschnitt und aufserhalb desselben m beliebig genommene Puncte, wo $m > 1$. Von jedem derselben ziehe man an den Kegelschnitt zwei Tangenten, so erhält man $2m$ Berührungspuncte, die ebenfalls von einander unabhängig sein werden, und aus denen man hinwiederum die ersten m Puncte finden kann. Construirt man nun aus den letztern $2m$ Puncten in Verbindung mit dem Kegelschnitte ein Netz, so sind nach dem Vorigen alle *Vl.* Verhältnisse desselben bekannt, wenn $2m-3$ derselben gegeben sind. Dieselbe Anzahl von *Vl.* Verhältnissen mufs daher auch gegeben sein, wenn man aus dem Kegelschnitte und den erstern m Puncten ein Netz construirt, in dem dieses Netz mit dem vorigen aus $2m$ Puncten construirten identisch ist.

Man denke sich jetzt in der Ebene eines Kegelschnitts n beliebige Puncte innerhalb desselben, wo $n > 2$. Man nehme diese Puncte in einer gewissen Ordnung und verbinde hiernach den ersten mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten u. s. w., den $n$ten mit dem ersten durch gerade Linien, deren jede den Kegelschnitt in zwei Puncten schneiden wird. Dies giebt ein System von n von einander unabhängigen Geraden und von $2n$ sich gegenseitig nicht bestimmenden Puncten im Kegelschnitte, aus welchen letzteren man umgekehrt die n Geraden und aus diesen die n anfänglichen Puncte finden kann. Das aus dem Kegelschnitte und den n anfänglichen Puncten construirte Netz ist daher einerlei mit demjenigen, welchem der Kegelschnitt und die darin enthaltenen $2n$ Puncte zum Grunde liegen, und ist folglich seinen *Vl.* Verhältnissen nach vollkommen bestimmt, wenn $2n-3$ derselben gegeben sind.

Hat man also endlich in der Ebene eines Kegelschnitts $m+n$ Puncte, von denen m aufserhalb, n innerhalb der Curve liegen, so erhält man auf die eben besagte Weise ein System von $2m+2n$ von einander unabhängigen Puncten im Kegelschnitte selbst, aus denen sich hinwiederum die anfänglichen $m+n$ Puncte finden lassen; — und damit ein System von $2(m+n)-3$ von einander unabhängigen *Vl.* Verhältnissen. Daſs dieses gilt, auch wenn, gegen die vorhin gemachte Annahme, in $m+n$ entweder $m=1$ oder $n=1$ oder 2 ist (nur muſs $m+n>1$ sein) davon überzeugt man sich leicht selbst, und kann somit den Satz folgendergestalt ganz allgemein ausdrücken:

Wird aus einem Kegelschnitte und irgend m in seiner Ebene, nicht in ihm selbst, liegenden Puncten ein Netz construirt, so müssen $2m-3$ von einander unabhängige *Vl.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können, — also fünf *Vl.* Verhältnisse mehr, als wenn die m Puncte bloſs unter sich, nicht auch mit dem Kegelschnitte, in Verbindung gesetzt werden.

Beispiel. A, B (Fig. 8.) sind zwei Puncte innerhalb eines Kegelschnitts; die Gerade AB schneide ihn in C und D. Man ziehe in diesen Puncten Tangenten, welche sich in E treffen; ziehe EA, EB, welche dem Kegelschnitte in F, G begegnen; ziehe endlich DF, CG, welche CE, DE in H, I schneiden.

Hier ist also die Zahl der anfänglichen Puncte, $m=2$. Damit wird $2m-3=1$, und es braucht daher bei dieser Figur nur ein *Vl.* Verhältniſs gegeben zu sein, um die Werthe aller übrigen zu kennen; d. h. zwischen je zwei *Vl.* Verhältnissen wird eine Gleichung obwalten.

So ist z. B. die zwischen den zwei Dreieckschnitts-Verhältnissen

$$(CA:AD)(DI:IE)(EH:HC)=p,$$
$$(CB:BD)(DI:IE)(EH:HC)=q$$

statt findende Gleichung: $pq=1$,

ein Resultat, welches sich auch durch die Proportion darstellen läſst:

$$\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DB}{BC}=\left(\frac{CH}{HE}\right)^2:\left(\frac{DI}{IE}\right)^2.$$

Eben so muſs jedes andere *Vl.* Verhältniſs durch p oder q ausgedrückt werden können, wie das *D.* Verhältniſs

$$(CA:AD):(CB:BD)=p:q=p^2$$

und das ihm gleiche *Vr.* Verhältniſs:

$$(CE:EH)(HF:FD)(DE:EI)(IG:GC)=p^2.$$

Druckfehler. In dieser Abhandlung steht einigemahl „Dreieck-Verhältniſs, Vieleck-Verhältniſs etc." Man lese statt dessen „Dreieckschnitts-Verhältniſs, Vieleckschnitts-Verhältniſs etc."