

zur quantitativen Festlegung der geänderten Verhältnisse jeweils einige Stichmessungen genügen.

Von besonderer Bedeutung wird wohl meist die Trennung zwischen Gleitkorona und Gleitfunkenkorona sein, speziell also die Kenntnis der beide trennenden Durchbruchspannung P_0 (nicht zu verwechseln mit Durchschlagspannung, bei der der Isolator durchschlagen wird). Will man z. B. Gleitfunkenbildung technisch verwenden (zu Zündungen, Momentanbeleuchtung), so wird Kleinhalten von P_0 z. B. durch Anwendung besonders dünner Glimmerplatten od. dgl. wichtig. In der Isolatortechnik andererseits wird man sich mit der harmlosen Gleitkorona abfinden und nur die gefährlichere weithinreichende Gleitfunkenkorona vermeiden (Kurzschlüsse). Isolatoren möchten also in erster Linie so gebaut sein, daß ihre Durchspannung P_0 höher liegt als die größte Betriebsspannung. Läßt sich aber das Auftreten von Gleitfunkenkorona nicht hintanhalten, so ist zu berücksichtigen, daß dann zu scheiden ist zwischen stromstarker Elektrizitätszufuhr mit langen Gleitergüssen und stromschwächerer, bei der infolge ausgesprochener Funkenbüschelbildung die Gleitlängen nicht mehr proportional P^4 bzw. P^3 zunehmen. Die Überschlagspannung bei stromschwachem Transformator kann also höher ausfallen als bei stromstarkem, eine Prüfung mit ersterem sichert also nicht für letzteren.

Wurde vorangehend die Gleitfigur in ihrer Abhängigkeit von der Polspannung besprochen, so kann man nach Kenntnis dieser natürlich auch umgekehrt aus gegebener Gleitspur, aus ihrer Größe, Zahl der Einkerbungen, Zahl der Gleitdurchbrüche, Ruckstufenbildung u. a. m. auf Höhe und vor allem auch auf das zeitliche Verhalten der Polspannung schließen. Vielleicht läßt sich z. B. so der Verlauf plötzlicher Überspannungen in Stromnetzen feststellen.

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die ungeheure Wachstumsgeschwindigkeit der leicht erkennbaren und fixierbaren Ladungsergüsse zur Messung kleinster Zeitintervalle (bis 10^{-9} sec, wie Pedersen zeigte) zu benutzen.

Dresden, Physikal. Inst. d. Techn. Hochschule, den 30. 12. 1920.

Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchronmaschinen.

Von

J. Biermanns.

1. Allgemeines. Die durch den plötzlichen Kurzschlußstrom großer Wechselstromerzeuger hervorgerufenen, oft verheerenden Wirkungen haben wohl die meisten der in der Praxis stehenden Ingenieure schon erfahren müssen. Man hat sich seit der letzten Zeit leidlich gegen die auftretenden Erscheinungen zu schützen gewußt, nicht zuletzt, seitdem die Theorie derselben auf eine gesicherte Grundlage gestellt worden ist.

Nicht so glücklich sind wir bisher bei der Form des plötzlichen Kurzschlusses gewesen, die die denkbar schwersten Beanspruchungen der Maschine selbst und der betroffenen Leitungsteile im Gefolge hat, und die durch das falsche Parallelschalten von Synchronmaschinen realisiert wird. Wenn dieses letztere sich auch durch gute Betriebsführung im allgemeinen vermeiden läßt, so lehrt doch die Erfahrung, daß es selbst in gut geleiteten Zentralen immer wieder vorkommt, und die dann auftretenden schweren Maschinenschäden und Betriebsstörungen erheischen gebieterisch eine Lösung auch dieses Problems. Wir können uns jedoch gegen eine

Gefahr am besten schützen, wenn wir sie erst genau kennen, und ich habe es deshalb im folgenden unternommen, die beim falschen Parallelschalten von Synchronmaschinen auftretenden Ausgleichsvorgänge einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Auf diesen Punkt allein soll die Arbeit sich jedoch nicht beschränken, anschließend an die Theorie sollen vielmehr verschiedene Schutz- bzw. Vorbeugungsmaßnahmen einer kritischen Betrachtung unterworfen werden.

Wenn ich mich dabei im mathematischen Teil der Arbeit möglichst kurz fasse, so hoffe ich, da der Rechnungsvorgang dem bei der Untersuchung des plötzlichen Kurzschlusses mehrfach benützten entspricht, dennoch verständlich zu bleiben.

2. Die Differentialgleichungen des Problems und ihre Lösung. Um die entgegenstehenden mathematischen Schwierigkeiten überhaupt überwinden zu können, sind wir zunächst gezwungen, das Problem in einigen wichtigen Punkten zu vereinfachen, wobei wir natürlich streng darauf achten müssen, daß das Verhalten der idealisierten Maschine dem der wirklichen Maschine nicht gerade in wesentlichen Punkten widerspricht.

Wir denken uns eine Maschine von einfachster Bauart, die nach Art eines Turbogenerators mit konstantem Luftraum und verteilter Erregerwicklung ausgeführt ist. Stator und Induktor seien lamelliert, so daß Wirbelstromerscheinungen von nennenswerter Bedeutung ausgeschlossen sind. Der Induktor besitze ferner eine Dämpferwicklung mit gleichem Kupfergewicht, also gleicher Zeitkonstante wie die Erregerwicklung, deren Achse senkrecht auf derjenigen der Erregerwicklung steht. Außerdem sei die Maschine während des ganzen Ausgleichsvorganges ungesättigt, d. h. ihre magnetische Charakteristik sei eine Gerade und ihre Selbst- und Gegeninduktivitätskoeffizienten konstante Größen. Die Vernachlässigung sämtlicher Eisenverluste will daneben wenig bedeuten.

Von den begangenen Vereinfachungen ist am folgenschwersten die Vernachlässigung der Eisensättigung, denn sie ist geeignet, uns ein etwas abweichendes Bild von der vor allem interessierenden Höhe der zu erwartenden Überströme zu geben. Dagegen beeinflussen alle übrigen vereinfachenden Annahmen, so die Vernachlässigung der Wirbelstromverluste und die Annahme einer Dämpferwicklung auf dem Induktor, welch letztere gerade die wesentlichste Eigenschaft der Wirbelströmung im massiven Induktoreisen, nämlich ein Querfeld in der Polachse auszubilden, zur Geltung bringen soll, lediglich den zeitlichen Verlauf der Überströme in unbedeutendem Maße.

Die betrachtete Maschine denken wir uns entgegen dem Uhrzeigersinne mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (in Polteilungsgraden) angetrieben und mit einem Strome i_e erregt; die Klemmen des zweiphasig bewickelten Stators mögen an die Klemmen eines unendlich ergiebigen Zweiphasen-Netzes angeschlossen sein, das seine Phasenspannungen

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} e_1 &= E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \\ e_2 &= E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

unbekümmert um den von der Maschine entnommenen Strom unveränderlich aufrecht erhält. Es bezeichnen ferner

$$L_1 = L_{11} \cdot (1 + r_1) \quad (1b)$$

den Selbstinduktionskoeffizienten je einer der unter sich gleichen Statorphasen, r_1 den entsprechenden Ohmschen Widerstand,

$$L_2 = L_{22} \cdot (1 + r_2) \quad (1c)$$

den Selbstinduktionskoeffizienten der Erregerwicklung und der dieser völlig gleichen Dämpferwicklung, r_2 den entsprechenden Ohmschen Widerstand,

$$L_{24} = L_{13} = M \cdot \cos \omega \cdot t \quad (1d)$$

den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Statorphase 2 und Erregerwicklung bzw. Statorphase 1 und Dämpferwicklung,

$$L_{23} = L_{14} = -M \cdot \sin \omega \cdot t \quad (1 e)$$

den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Statorphase 2 und Dämpferwicklung bzw. Statorphase 1 und Erregerwicklung,

$$\tau = 1 - \frac{1}{(1 + \tau_1) \cdot (1 + \tau_2)} = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \quad (1 f)$$

endlich den totalen Streufaktor der Maschine, wo τ_1 und τ_2 die Streufaktoren der Statorwicklungen bzw. Induktorwicklungen allein sind. Nach den obigen Festlegungen gibt α die Phasenverschiebung des Vektors der Netz-EMK gegenüber dem Vektor der Maschinen-EMK an, α ist also ein Maß für die Güte des Parallelschaltens der Maschine, und zwar muß bei richtigem Parallelschalten $\alpha = 0$ sein. $\alpha = \pi$ bedeutet Schalten in Phasenopposition. Wie bereits gesagt, betrachten wir zunächst ω und damit α als konstante Größen, d. h. das Polrad verharre während des betrachteten Ausgleichsvorganges starr in seiner einmal zum Netzvektor eingenommenen relativen Lage.

Mit den gegebenen Bezeichnungen lauten nun die Differentialgleichungen unseres Problems, wenn noch i_1 , i_2 , i_3 und i_4 die Momentanwerte der Ströme in beiden Stator- bzw. Induktorphasen bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{d(L_{31} \cdot i_3)}{dt} + \frac{d(L_{41} \cdot i_4)}{dt} + r_1 \cdot i_1 &= -e_1, \\ L_1 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{d(L_{32} \cdot i_3)}{dt} + \frac{d(L_{42} \cdot i_4)}{dt} + r_1 \cdot i_2 &= -e_2, \\ L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{d(L_{13} \cdot i_1)}{dt} + \frac{d(L_{23} \cdot i_2)}{dt} + r_2 \cdot i_3 &= 0, \\ L_2 \cdot \frac{di_4}{dt} + \frac{d(L_{14} \cdot i_1)}{dt} + \frac{d(L_{24} \cdot i_2)}{dt} + r_2 \cdot i_4 &= r_2 \cdot i_e. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Um dieses System von 4 nicht linearen, simultanen Differentialgleichungen auf eine integrierbare Form zu bringen, sind eine ganze Reihe von Umformungen erforderlich. Dabei werden wir uns zunächst auf die Ermittlung der freien Ausgleichsströme beschränken, d. h. wir setzen zunächst die rechte Seite der letzten der Gleichungen (I) gleich Null.

Führen wir in das angeschriebene System von Differentialgleichungen die durch die Gleichungen (I) gegebenen Beziehungen ein und differenzieren wir die Klammern aus, so folgt

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{di_3}{dt} - M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{di_4}{dt} - i_3 \cdot \omega \cdot M \sin \omega \cdot t - i_4 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t + i_1 \cdot r_1 = -E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha), \quad (2 a)$$

$$L_1 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{di_4}{dt} + i_3 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t - i_4 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_2 \cdot r_1 = -E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (2 b)$$

$$L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{di_2}{dt} - i_1 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_2 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t + i_3 \cdot r_2 = 0, \quad (2 c)$$

$$L_2 \cdot \frac{di_4}{dt} - M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{di_2}{dt} - i_1 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t - i_2 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_4 \cdot r_2 = 0. \quad (2 d)$$

Nun müssen eine Reihe von Rechenoperationen vorgenommen werden, die bezwecken, die trigonometrischen Funktionen fortzuschaffen, das vorstehende Gleichungssystem also in ein lineares umzugestalten. Zu dem Zwecke bilden wir zunächst

$$(2 a) \cdot \sin \omega \cdot t - (2 b) \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (3 a)$$

$$(2 a) \cdot \cos \omega \cdot t + (2 b) \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (3 b)$$

$$(2 c) \cdot \sin \omega \cdot t + (2 d) \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (3 c)$$

$$(2 c) \cdot \cos \omega \cdot t - (2 d) \cdot \sin \omega \cdot t. \quad (3 d)$$

Ferner bilden wir die folgenden Differenzen:

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d(2a)}{dt} - \frac{1}{L_2} \cdot \frac{d(3d)}{dt}, \quad (4a)$$

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d(2b)}{dt} - \frac{1}{L_2} \cdot \frac{d(3c)}{dt}, \quad (4b)$$

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d(2c)}{dt} - \frac{1}{L_1} \cdot \frac{d(3b)}{dt}, \quad (4c)$$

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d(2d)}{dt} + \frac{1}{L_1} \cdot \frac{d(3a)}{dt}. \quad (4d)$$

Bilden wir endlich noch die folgenden Beziehungen:

$$(4a) + \frac{\omega}{M} \cdot (2b) + \frac{r_2}{L_2 \cdot M} \cdot (2a), \quad (5a)$$

$$(4b) - \frac{\omega}{M} \cdot (2a) + \frac{r_2}{L_2 \cdot M} \cdot (2b), \quad (5b)$$

$$(4c) - \frac{\omega}{M} \cdot (2d) + \frac{r_1}{L_1 \cdot M} \cdot (2c), \quad (5c)$$

$$(4d) + \frac{\omega}{M} \cdot (2c) + \frac{r_1}{L_1 \cdot M} \cdot (2d), \quad (5d)$$

so ergibt die tatsächliche Ausführung dieses Rechenschemas:

$$\tau \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2} \right) \cdot \frac{d i_1}{dt} + \omega \cdot \tau \cdot \frac{d i_2}{dt} + \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot i_1 + \omega \cdot \frac{r_1}{L_1} \cdot i_2 = -E \cdot \frac{r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha), \quad (5a)$$

$$\tau \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2} \right) \cdot \frac{d i_2}{dt} - \omega \cdot \tau \cdot \frac{d i_1}{dt} + \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot i_2 - \omega \cdot \frac{r_1}{L_1} \cdot i_1 = -E \cdot \frac{r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (5b)$$

$$\tau \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2} \right) \cdot \frac{d i_3}{dt} - \omega \cdot \tau \cdot \frac{d i_4}{dt} + \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot i_3 - \omega \cdot \frac{r_2}{L_2} \cdot i_4 = 0, \quad (5c)$$

$$\tau \cdot \frac{d^2 i_4}{dt^2} + \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2} \right) \cdot \frac{d i_4}{dt} + \omega \cdot \tau \cdot \frac{d i_3}{dt} + \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2} \cdot i_4 + \omega \cdot \frac{r_2}{L_2} \cdot i_3 = 0. \quad (5d)$$

Damit haben wir ein System von je 2 linearen simultanen Differentialgleichungen zweiten Grades gewonnen, die leicht zu der gesuchten Differentialgleichung unseres Problems führen. Durch wiederholte Differentiation und Subtraktion der Gleichungen (5a) und (5b) bzw. (5c) und (5d) folgt nämlich eine für i_1 , i_2 , i_3 und i_4 vollständig gleiche lineare Differentialgleichung vierten Grades von der Form:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + a \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} + b \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot \frac{d x}{dt} + d \cdot x = F(t), \quad (II)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \cdot \left(\frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} + \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} \right), \\ b &= \left(\frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} + \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} \right)^2 + 2 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot \tau} + \omega^2, \\ c &= 2 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot \tau^2} \cdot \left(\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2} \right) + 2 \cdot \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} \cdot \omega^2, \\ d &= \left(\frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{r_1}{L_1} \right)^2 + \omega^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (IIa)$$

Die Zeitfunktion $F(t)$ rührt von den an den Stator angelegten äußeren Spannungen her und führt zu den erzwungenen Schwingungen unserer Maschine. Da diese uns jedoch zunächst nicht interessieren, setzen wir die rechte Seite der Gleichung (II) gleich Null, die sich dann in bekannter Weise durch eine Funktion von der Form

$$x = A_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} + A_3 \cdot e^{\alpha_3 \cdot t} + A_4 \cdot e^{\alpha_4 \cdot t} \quad (6)$$

integrieren läßt, wobei die Exponenten α sich als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^4 + a \cdot \alpha^3 + b \cdot \alpha^2 + c \cdot \alpha + d = 0 \quad (6a)$$

ergeben. Die eben angeschriebene algebraische Gleichung vierten Grades liefert nun¹⁾ vier Wurzeln von der Form

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,2} &= -a_1 \mp j \cdot q \\ \alpha_{3,4} &= -a_2 \mp j \cdot p \\ j &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

und
mit

Besitzt nun die charakteristische Gleichung einer linearen Differentialgleichung je 2 konjugiert komplexe Wurzeln von der eben angeschriebenen Form, so heißt dies nichts anderes, als daß der betrachtete Ausgleichsvorgang zwei Sinusschwingungen enthält. Und zwar bestimmt der imaginäre Anteil der Wurzeln deren Winkelgeschwindigkeit, während der reelle Teil das zeitliche Absterben der Schwingungen charakterisiert.

Wir erhalten somit folgende Gleichungen für die freien Ausgleichsströme:

$$\left. \begin{aligned} i_{1f} &= A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_1) + A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_2), \\ i_{2f} &= -A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_1) - A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_2), \\ i_{3f} &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_4), \\ i_{4f} &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_4), \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

in welchen die $A_1 \div A_4$ und die $\psi_1 \div \psi_4$ die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten sind, während die Dämpfungskonstanten a_1 und a_2 und die Winkelgeschwindigkeiten p und q aus den Gleichungen (6) zu berechnen sind.

Die Gleichung (6a) liefert folgende Wurzeln, wenn wir in sie die Werte aus den Gleichungen (IIa) einführen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,2} &= -\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \right)^2} \right] \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{\tau}} \right] \\ \alpha_{3,4} &= -\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \right)^2} \right] \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{\tau}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und

Diese Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \\ u &= \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \right)^2 \\ v &= \omega \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \end{aligned} \right\} \quad (IV a)$$

auch kürzer schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,2} &= -w \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} - \sqrt{u \pm j \cdot v} \right], \\ \alpha_{3,4} &= -w \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} + \sqrt{u \pm j \cdot v} \right]. \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ Da infolge gewisser Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten a , b , c und d die Gleichung (6a) sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen läßt, deren jeder für sich verschwinden muß.

Nun ist nach dem Moivreschen Lehrsatz:

$$\sqrt{u \pm j \cdot v} = \sqrt{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2} \pm j \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

mit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}$$

und

$$\varphi = \arctg \frac{v}{u}.$$

Es ist aber

$$\cos \varphi = \frac{u}{r},$$

oder

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot r}} \cdot \sqrt{r + u}.$$

Ferner ist

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot r}} \cdot \sqrt{r - u},$$

und damit wird

$$\sqrt{u \pm j \cdot v} = \sqrt{\frac{u}{2}} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1 \pm j \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1 \right].$$

Wir erhalten somit die folgenden, von den imaginären Teilen befreiten Ausdrücke für die Dämpfungskonstanten und Winkelgeschwindigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= w + \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1 \right)}, \\ a_2 &= w - \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1 \right)}, \\ p &= \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1 \right)}, \\ q &= \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1 \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Die eben angeschriebenen Gleichungen lassen sich für alle praktisch vorkommenden Fälle noch wesentlich vereinfachen. In den Gleichungen (7) kann nämlich die Wurzel auch geschrieben werden:

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} \cdot \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} + \frac{r_2}{L_2} \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} - \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \cdot \tau}\right)^2 \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{r_1 - r_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot \tau}},$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \pm j \cdot \frac{r_1 - r_2}{2 \cdot \tau}\right)^2 - \frac{r_2}{L_2} \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)}.$$

Nun ist bei allen größeren Synchronmaschinen die reziproke Zeitkonstante $\frac{r_2}{L_2}$ der Erregerwicklung eine sehr kleine Größe, so daß wir in der eben angeschriebenen Wurzel den zweiten Summanden gegenüber dem ersten ohne großen Fehler vernachlässigen können. Damit geht die Wurzel über in

$$\sqrt{\frac{\omega}{2} \pm j \cdot \frac{r_1 - r_2}{2 \cdot \tau}},$$

und es folgen durch Einsetzen in die Gleichung (7) die Näherungswerte:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau}, \\ a_2 &= \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau}, \\ p &= \omega, \\ q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV b})$$

Mit diesen vereinfachten Werten wollen wir im folgenden weiterrechnen.

Die Gleichungen (III) und (IV) sind die formelle Lösung unseres Problems, ihnen gehorcht jeder in der betrachteten Maschine unter den gegebenen äußeren Bedingungen sich abspielende Ausgleichsvorgang, gleichviel, durch welchen fremden Eingriff er ausgelöst worden sein mag. Unbestimmt sind lediglich noch die Integrationskonstanten, in welchen eben die Natur dieses Eingriffes zum Ausdruck kommt und die aus den gerade vorliegenden Anfangsbedingungen zu berechnen sind.

3. Der stationäre Zustand. Bevor wir in der Untersuchung der beim Parallelschalten sich abspielenden Ausgleichsvorgänge weiterschreiten, wollen wir noch den stationär gewordenen Zustand betrachten. Und zwar interessiert uns in erster Linie der nach Abklingen des Ausgleichsvorganges in der Maschine fließende stationäre Strom, wobei wir die noch vorläufig geltende Voraussetzung beachten müssen, wonach die Maschine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben wird, der Winkel α sich im Verlaufe des Ausgleichsvorganges also nicht ändert.

Da die betrachtete Maschine als symmetrische Drehstrom-Maschine ein synchron mit dem Induktor umlaufendes Ankerrückwirkungs-Drehfeld konstanter Amplitude ausbildet, können wir von vornherein annehmen, daß die Dämpferwicklung im stationär gewordenen Zustand stromlos ist, während die Erregerwicklung den vorher eingestellten Gleichstrom i_e führt. Die beiden Phasen des Stators werden ferner einen stationären Kurzschlußstrom führen, der folgendem Gesetz gehorcht:

$$\left. \begin{aligned} i_{1st} &= J \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi), \\ i_{2st} &= -J \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi), \\ i_{3st} &= 0, \\ i_{4st} &= i_e. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V a})$$

ferner hatten wir

Führen wir nun diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (2 a) und (2 b) ein, so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen zur Berechnung der Konstanten J und ψ :

$$\begin{aligned} J \cdot [L_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi) + r_1 \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi)] &= i_e \cdot M \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t - E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha), \\ J \cdot [L_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) - r_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi)] &= i_e \cdot M \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t - E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $t=0$, erhebt die so entstehenden Gleichungen beiderseitig ins Quadrat und addiert bzw. subtrahiert die neu entstandenen Gleichungen voneinander, so erhält man endlich folgende Ausdrücke für die gesuchten Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} J &= J_k \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2}}, \\ \text{tg } \psi &= \frac{\tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \kappa \cdot \sin \alpha}{1 - \kappa \cdot \cos \alpha - \tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot \kappa \sin \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V b})$$

mit

$$J_k = i_e \cdot \frac{M \cdot \omega}{\sqrt{(L_1 \cdot \omega)^2 + r^2}} = \sim i_e \cdot \frac{M}{L_1}$$

und

$$\kappa = \frac{E}{i_e \cdot M \cdot \omega}.$$

Hierin ist J_k der stationäre Kurzschlußstrom des direkt an seinen Klemmen kurzgeschlossenen Generators, α ein Koeffizient, der, da $i_e \cdot M \cdot \omega$ die Leerlaufspannung des Generators ist, den Erregungszustand der betrachteten Maschine charakterisiert.

Man erkennt, daß im ungünstigsten Falle also Schalten in Phasenopposition der in den Statorwicklungen sich ausbildende stationäre Strom gerade doppelt so groß ausfällt als der stationäre Kurzschlußstrom des betrachteten Generators. Es darf natürlich nicht ausser acht gelassen werden, daß unsere Betrachtungen ein Netz mit unendlich großer Ergiebigkeit voraussetzen.

4. Die freien Ausgleichströme beim Parallelschalten. Das Schalten unserer Maschine ans Netz erfolge zur Zeit $t = 0$. Die zu dieser Zeit in unserer Maschine fließenden Ströme wollen wir durch den Index i_3 kennzeichnen. Wir haben also

$$\left. \begin{aligned} i_{10} &= 0, \\ i_{20} &= 0, \\ i_{30} &= 0, \\ i_{40} &= i_e, \end{aligned} \right\} \text{ für } t < 0. \quad (8a)$$

Ferner ist der nach dem Absterben der Ausgleichströme in der Maschine sich einstellende stationäre Endzustand durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} i_{1st} &= J \cdot \sin(-\psi) = J'_1, \\ i_{2st} &= J \cdot \cos \psi = J'_2, \\ i_{3st} &= 0, \\ i_{4st} &= i_e. \end{aligned} \right\} \text{ für } t > 0. \quad (8b)$$

Somit haben die freien Ausgleichsströme den folgenden Anfangsbedingungen zu genügen:

$$\left. \begin{aligned} i_{1f} &= -J'_1, \\ i_{2f} &= -J'_2, \\ i_{3f} &= 0, \\ i_{4f} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ für } t = 0, \quad (8c)$$

wo, wie die Gleichung (Va) ergeben

$$J'_1 = J_k \cdot \left. \frac{\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot (1 - \alpha \cdot \cos \alpha) + \alpha \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \right)^2} \right\} \quad (8d)$$

und

$$J'_2 = -J_k \cdot \left. \frac{1 - \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot \alpha \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \right)^2} \right\}$$

Nun setzen wir die Werte aus den Gleichungen (III) in die Differentialgleichungen (2) ein und entwickeln sämtliche Glieder in ihre Sinus- und Kosinuskomponenten. Die rechte Seite der sich ergebenden 4 Gleichungen muß, da wir nur die freien Schwingungen betrachten, Null sein; dies ist aber nur möglich, wenn jeweils die Summe aller mit $\sin \omega \cdot t$ oder mit $\cos \omega \cdot t$ multiplizierten Glieder für sich verschwindet. Das Gleichungssystem zerfällt also in die folgenden 8 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \cdot A_1 \cdot q \cos \psi_1 + (L_1 \cdot a_1 - r_1) \cdot A_1 \cdot \sin \psi_1 - M \cdot A_3 \cdot q \cdot \cos \psi_3 - M \cdot A_3 \cdot a_1 \cdot \sin \psi_3 &= 0, \\ L_1 \cdot A_1 \cdot q \sin \psi_1 - (L_1 \cdot a_1 - r_1) \cdot A_1 \cdot \cos \psi_1 - M \cdot A_3 \cdot q \cdot \sin \psi_3 + M \cdot A_3 \cdot a_1 \cdot \cos \psi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2 \cdot A_3 \cdot p \cdot \cos \psi_3 + (L_2 \cdot a_1 - r_2) \cdot A_3 \cdot \sin \psi_3 - M \cdot A_1 \cdot p \cdot \cos \psi_1 - M \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot \sin \psi_1 &= 0, \\ L_2 \cdot A_3 \cdot p \cdot \sin \psi_3 - (L_2 \cdot a_1 - r_2) \cdot A_3 \cdot \cos \psi_3 - M \cdot A_1 \cdot p \cdot \sin \psi_1 + M \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot \cos \psi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} (9b)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 \cdot A_2 \cdot p \cdot \cos \psi_2 + (L_1 \cdot a_2 - r_1) \cdot A_2 \cdot \sin \psi_2 - M \cdot A_4 \cdot p \cdot \cos \psi_4 - M \cdot A_4 \cdot a_2 \cdot \sin \psi_4 &= 0, \\ L_1 \cdot A_2 \cdot p \cdot \sin \psi_2 - (L_1 \cdot a_2 - r_1) \cdot A_2 \cdot \cos \psi_2 - M \cdot A_4 \cdot p \cdot \sin \psi_4 - M \cdot A_4 \cdot a_2 \cdot \cos \psi_4 &= 0, \end{aligned} \right\} (9c)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2 \cdot A_4 \cdot q \cdot \cos \psi_4 + (L_2 \cdot a_2 - r_2) \cdot A_4 \cdot \sin \psi_4 - M \cdot A_2 \cdot q \cdot \cos \psi_2 - M \cdot A_2 \cdot a_2 \cdot \sin \psi_2 &= 0, \\ L_2 \cdot A_4 \cdot q \cdot \sin \psi_4 - (L_2 \cdot a_2 - r_2) \cdot A_4 \cdot \cos \psi_4 - M \cdot A_2 \cdot q \cdot \sin \psi_2 + M \cdot A_2 \cdot a_2 \cdot \cos \psi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (9d)$$

Ferner führen wir die Anfangsbedingungen (8 c) in die Differentialgleichungen (2) ein, diese ergeben dann für $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cdot \sin \psi_1 + A_2 \cdot \sin \psi_2 &= J_1', \\ A_1 \cdot \cos \psi_1 + A_2 \cdot \cos \psi_2 &= J_2', \\ A_3 \cdot \sin \psi_3 + A_4 \cdot \sin \psi_4 &= 0, \\ A_3 \cdot \cos \psi_3 + A_4 \cdot \cos \psi_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9e)$$

Wir haben damit 12 Gleichungen zur Bestimmung des Integrationskonstanten gewonnen, da deren Zahl jedoch nur 8 beträgt, scheinen diese überbestimmt zu sein.

Dieser Zwiespalt löst sich jedoch sofort, wenn wir bedenken, daß die Gleichungen (9a) ÷ (9d) nicht unabhängig voneinander sind, sondern vielmehr durch die Beziehungen (IV) miteinander verknüpft sind. Wir dürfen von den 8 angegebenen Gleichungen also nur 4 benutzen, und zwar wählen wir die Gleichung (9b) und (9c); wir könnten wenn uns die Gleichungen (IV) noch nicht bekannt wären, die übrig bleibenden Gleichungen (9a) und (9d) umgekehrt zur Berechnung der Konstanten a_1 , a_2 , p und q benutzen, wie Dreyfus¹⁾ dies auf vektoriellen Wege getan hat.

Für die nun folgenden Rechnungen führen wir der Kürze halber neue Unbekannte

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \cos \psi_1, & x_2 &= A_1 \cdot \sin \psi_1, \\ x_3 &= A_2 \cdot \cos \psi_2, & x_4 &= A_2 \cdot \sin \psi_2, \\ x_5 &= A_3 \cdot \cos \psi_3, & x_6 &= A_3 \cdot \sin \psi_3, \\ x_7 &= A_4 \cdot \cos \psi_4, & x_8 &= A_4 \cdot \sin \psi_4. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

ein, mit deren Hilfe die Gleichungen (9b), (9c) und (9e) in das folgende Gleichungssystem übergehen, wenn wir seiner Geringfügigkeit halber die mit q multiplizierten Glieder vernachlässigen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{L_2} \cdot p \cdot x_1 + \frac{M}{L_2} \cdot a_1 \cdot x_2 - p \cdot x_5 - \left(a_1 - \frac{r_2}{L_2}\right) \cdot x_6 &= 0, \\ -\frac{M}{L_2} \cdot a_1 \cdot x_1 + \frac{M}{L_2} \cdot p \cdot x_2 + \left(a_1 - \frac{r_2}{L_2}\right) \cdot x_5 - p \cdot x_6 &\approx 0, \\ p \cdot x_3 + \left(a_2 - \frac{r_1}{L_1}\right) \cdot x_4 - \frac{M}{L_1} \cdot p \cdot x_7 - \frac{M}{L_1} \cdot a_2 \cdot x_8 &= 0, \\ -\left(a_2 - \frac{r_1}{L_1}\right) \cdot x_3 + p \cdot x_4 + \frac{M}{L_1} \cdot a_2 \cdot x_7 - \frac{M}{L_1} \cdot p \cdot x_8 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= J_2', \\ x_2 + x_4 &= J_1', \\ x_5 + x_7 &= 0, \\ x_6 + x_8 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Man löst dieses System von 8 linearen Gleichungen am einfachsten mittels Determinanten auf, und zwar lassen sich bekanntlich die Unbekannten aus der sich ergebenden Determinante und den Unterdeterminanten wie folgt zusammensetzen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, & x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 &= J_2' - x_1, & x_4 &= J_1' - x_2, \\ x_5 &= \frac{\Delta_5}{\Delta}, & x_6 &= \frac{\Delta_6}{\Delta}, \\ x_7 &= -x_5, & x_8 &= -x_6. \end{aligned} \right\} \quad (10c)$$

Im vorliegenden Falle genügt also die Berechnung von 4 Unterdeterminanten, und zwar ergibt die Ausrechnung folgende Werte:

¹⁾ Ausgleichsvorgänge beim plötzlichen Kurzschluß von Synchronmaschinen. A. f. E. Band 6.

$$\left. \begin{aligned} A &= i^2 \cdot (p^2 + a_1^2)^2, \\ A_1 &= J_1' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) + J_2' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\ A_2 &= J_1' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) - J_2' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\ A_5 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)^2 \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) + J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1 - \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\ A_6 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1 - \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) - J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)^2 \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2). \end{aligned} \right\} (11)$$

Die Unbekannten $x_1 \div x_8$ ergeben sich hiermit zu

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= J_1' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_2 &= J_1' \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - J_2' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_3 &= -J_1' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - J_2' \cdot \frac{p^2 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_4 &= -J_1' \cdot \frac{p^2 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_5 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)^2}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{(p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_6 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{(p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)^2}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\ x_7 &= -x_5, \quad x_8 = -x_6. \end{aligned} \right\} (11)$$

Unter Beachtung der Gleichung. (10a) errechnen sich nun die Integrationskonstanten A und ψ endlich zu

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau^2}{p^2 + a_1^2}}, \\ A_2 &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2} = \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2}{p^2 + a_1^2}}, \\ A_3 &= A_4 = \frac{L_1}{M} \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau^2}{p^2 + a_1^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi_1 &= \operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg} \psi_3 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{J_1' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) - J_2' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{J_1' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau) + J_2' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau)}, \\ \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{x_4}{x_3} = \frac{J_1' \cdot p - J_2' \cdot a_1}{J_1' \cdot a_1 + J_2' \cdot p}, \end{aligned} \right\} (12)$$

doch lassen sich die erhaltenen Ausdrücke noch wesentlich vereinfachen. Beachten wir nämlich die Gleichung (IVb) und setzen wir für J_1' und J_2' die Worte aus den Gleichungen (8d) ein, so erhalten wir endgültig folgende Ausdrücke für die gesuchten Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\ A_2 &= J_k \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\ A_3 &= -A_4 = -i_e \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \end{aligned} \right\} (VIa)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 = \operatorname{tg} \psi_3 = \operatorname{tg} \psi_4 &= -\frac{\frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \kappa \cdot \sin \alpha}{1 - \kappa \cdot \cos \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \kappa \sin \alpha}, \\ \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{\frac{a_1}{\omega} \cdot (1 + \tau) \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \left(1 - \tau \cdot \frac{a_1^2}{\omega^2}\right) \cdot \kappa \cdot \sin \alpha}{\left(1 - \tau \cdot \frac{a_1^2}{\omega^2}\right) \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) - \frac{a_1}{\omega} \cdot \kappa \cdot (1 + \tau) \cdot \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIa})$$

Die vollständigen Gleichungen für den Verlauf der in der betrachteten Maschine sich ausbildenden Ströme ergeben sich endlich durch Addition der freien Ausgleichsströme und der im stationär gewordenen Zustand fließenden Ströme zu:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_1) + A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_2) + J \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi), \\ i_2 &= -A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_1) - A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_2) - J \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi), \\ i_3 &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_4), \\ i_4 &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_4) + i_e. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIb})$$

Wir gewinnen am leichtesten einen Überblick über die eben angeschriebenen Gleichungen, wenn wir sie mit den für den plötzlichen Kurzschluß der Synchronmaschine sich ergebenden Ausdrücken vergleichen. Denn die Gesetzmäßigkeiten, denen jener gehorcht, sind uns bekannt, und wir können uns ein näheres Eingehen auf dieselben an dieser Stelle ersparen.

Wir sehen nun, daß die den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen charakterisierenden Gleichungen (VIb) mit den für den plötzlichen Kurzschluß geltenden Gesetzen völlig identisch sind, worüber wir uns im Grunde genommen nicht wundern dürfen. Denn das Typische des Ausgleichsvorganges liegt darin, daß das magnetische Feld der Maschine im Momente des Schaltens zwischen die kurzgeschlossenen Wicklungen des Stators und Induktors gerät und dort, indem sich seine Energie zum größten Teil in Joulesche Wärme umwandelt, dem Vernichtungsprozeß ausgeliefert wird. Es sind also lediglich die gegenseitige Lage der Wicklungen und deren elektrische Eigenschaften, die den zeitlichen Verlauf des Ausgleichsvorganges bestimmen; die den Klemmen des Stators aufgedrückte fremde Spannung kann nur zur Ausbildung eines weiteren magnetischen Feldes führen, das sich jedoch nicht anders als das eigene Feld der Maschine verhalten kann. Es ist also lediglich eine größere Heftigkeit des Ausgleichsvorganges, d. h. eine größere Amplitude der auftretenden Ströme zu erwarten. Natürlich nur beim Parallelschalten in einem entsprechend ungünstigen Moment. Denn wenn bei richtiger Erregung ($\kappa = 1$) und gleicher Lage des Vektors der Netz-EMK und jenes der Maschinen-EMK ($\alpha = 0$) parallelgeschaltet wird, kann, da die Maschine sich von vornherein im richtigen Betriebszustande befindet, überhaupt kein Ausgleichsvorgang auftreten; die Wicklungen der Maschine bleiben in diesem Falle also von jeglichen Überstromerscheinungen verschont.

Die Gleichungen (VIa) bestätigen nun die Richtigkeit der eben angestellten Überlegungen. Sie gehen in die für den plötzlichen Kurzschluß gültigen Gleichungen über, wenn wir in ihnen $E = 0$ also $\kappa = 0$ setzen. Dann ergibt sich beispielsweise für die Amplitude A_1 :

$$A_1 = -\frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}} = -\frac{J_k \cdot L_1 \cdot \omega}{\sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega)^2 + r_1^2}} = -\frac{E_i}{\sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega)^2 + r_1^2}}.$$

Im letzten Ausdruck bedeutet E_i die durch den Erregerstrom i_e in der Maschine induzierte EMK, $L_1 \cdot \tau \cdot \omega$ die Kurzschlußreaktanz des Stators und r_1 dessen Ohmschen Widerstand.

Für den Fall, daß die EMK der Maschine genau so groß ist als die Netz-EMK ($\alpha = 1$), ergeben nun die Gleichungen (VIa), daß beim Parallelschalten in richtiger Phasenlage ($\alpha = 0$) überhaupt keine Ströme auftreten. Die Ströme werden genau so groß wie beim plötzlichen Kurzschluß, wenn im Augenblick des Parallelschaltens zwischen Netz-EMK und Maschinen-EMK eine Phasenverschiebung von 60° besteht ($\alpha = 60^\circ$). Die gefährlichsten Überströme treten beim Schalten in Phasenopposition ($\alpha = 180^\circ$) auf. In diesem ungünstigen Falle werden die Überströme genau doppelt so hoch als beim plötzlichen Kurzschluß.

Das eben Gesagte gilt natürlich nur dann, wenn, wie vorausgesetzt, die Ergiebigkeit des Netzes unendlich groß ist. Wird unsere Maschine an ein Netz mit nur endlicher Ergiebigkeit geschaltet, so fallen die auftretenden Überströme natürlich geringer aus, und zwar läßt sich ohne Schwierigkeiten voraussagen, um wieviel die Ströme in jedem Falle verringert werden. Denn der Ausgleichsvorgang verläuft ebenso, wenn wir uns den inneren Widerstand des Netzes in die Statorwicklungen unserer Maschine verlegt denken, wir brauchen also nur mit einem resultierenden Streufaktor

$$\kappa' = 1 - \frac{M}{(L_1 + \lambda) \cdot L_2} \quad (13a)$$

und einem resultierenden Widerstand

$$r_1' = r_1 + \varrho \quad (13b)$$

zu rechnen, wo λ die der inneren Impedanz des Netzes entsprechende Selbstinduktion und ϱ dessen inneren Widerstand bedeutet.

5. Der Schutzwert des Vorstufenschalters. Die Betrachtungen des vorigen Abschnittes lehrten uns, daß bei schlechtem Parallelschalten in der betroffenen Maschine gewaltige Überströme auftreten können, die im ungünstigsten Falle gerade doppelt so hoch ausfallen als der plötzliche Kurzschlußstrom der betreffenden Maschine. Dies gilt natürlich sowohl für das Gleichstromglied als auch für das sogenannte Wechselstromglied des Ausgleichstromes. Doppelte Ströme bedeuten aber vierfache Kräfte, die auf die Wickelköpfe usw. ausgeübt werden, und da unsere heutigen schnelllaufenden Maschinen die mit dem plötzlichen Kurzschluß verbundenen Beanspruchungen gerade aushalten, so folgt, daß sie dem ungehinderten Einfluß des schlechten Parallelschaltens unter allen Umständen entzogen werden müssen.

Man kann hier nun an verschiedene Schutzmaßnahmen denken. Das einfachste und sicherste Mittel ist natürlich das unbedingte Vermeiden des schlechten Parallelschaltens. In der letzten Zeit sind verschiedene recht brauchbare automatische Synchronisiereinrichtungen auf den Markt gebracht worden und ihre Anwendung bedeutet nach dem Gesagten eine willkommene Verbesserung des Überstromschutzes unserer Anlagen. Ein weiteres auch für die Begrenzung der plötzlichen Kurzschlußströme gebrauchtes Mittel sind die sogenannten Schutzreaktanzen. Auch ihr Schutzwert ist unzweifelhaft, doch stehen ihrer ausreichenden Dimensionierung häufig die hohen Anschaffungskosten oder die zu starke Einengung des Regulierbereiches der Generatoren im Wege. Als drittes Schutzmittel ist in letzter Zeit der sogenannte Vorstufenschalter empfohlen worden. Hier sollen jedoch die folgenden Ausführungen zeigen, daß auf seine Schutzwirkung keine übertriebenen Hoffnungen gesetzt werden dürfen und daß die mit seiner Anwendung verbundene Verteuerung und Komplikation der Anlage nicht in Einklang mit dem erzielten Schutzwert zu bringen ist.

Der Vorstufenschalter besitzt bekanntlich eine derartige Kontakthanordnung, daß beim Ein- bzw. Ausschalten kurzzeitig ein Ohmscher Widerstand in die Strombahn eingeschaltet wird. Man hat beim Einschaltprozeß also zwei Etappen zu unterscheiden, das Schalten auf die Vorstufe (Widerstand eingeschaltet) und das Schalten auf die Hauptstufe (Widerstand überbrückt). Die Einschaltdauer des Widerstandes ist bei dem üblichen Schalten ziemlich kurz und kann höchstens zu $\frac{1}{30}$ Sekunde

angenommen werden; der eben genannte Wert bezieht sich auf Schalter mit Fernbetätigung, die allein für größere Maschinen in Frage kommen.

Um den beim Schalten auf die Vorstufe sich einstellenden Stromverlauf zu erhalten, brauchen wir lediglich auf die Gleichungen (VI) zurückzugreifen, in die wir nur einen um den Ohmwert des Vorstufenwiderstandes vergrößerten Statorwiderstand einzuführen haben. Die Gleichungen (VIa) lassen zunächst erkennen, daß unter dem Einfluß des Vorstufenwiderstandes alle Amplituden kleiner ausfallen, ferner wird aber, wie die Gleichungen (VIb) lehren, die Dämpfung des Gleichstromgliedes¹⁾ stark vergrößert, so daß wir annehmen können, daß dasselbe während der Einschalt-dauer des Vorstufenwiderstandes auf Null abklingt.

Um die beim Überschalten auf die Hauptstufe auftretenden Stromstöße berechnen zu können, müssen wir zunächst die Anfangsbedingungen aufstellen. Kurz vor dem Überschalten sei

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = J_1'', \quad i_2 = J_2'', \\ i_3 = J_3'', \quad i_4 = J_4'' + i_e \end{array} \right\} \text{ für } t < 0. \quad (14a)$$

Ferner sei der nach dem Überschalten sich einstellende stationäre Zustand gekennzeichnet durch

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = J_1, \quad i_2 = J_2, \\ i_3 = 0, \quad i_4 = i_e \end{array} \right\} \text{ für } t > 0. \quad (14b)$$

Somit lauten die Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} i_1' = J_1'' - J_1, \quad i_2' = J_2'' - J_2, \\ i_3' = J_3'', \quad i_4' = J_4'' \end{array} \right\} \text{ für } t = 0. \quad (14c)$$

Nach dem oben Gesagten können wir annehmen, daß a_1 so groß, dagegen a_2 so klein ist, daß zur Zeit der Berührung der Hauptkontrakte $e^{-a_1 \cdot t_0} = 0$ und $e^{-a_2 \cdot t_0} = 1$ gesetzt werden können. Setzen wir in den so erhaltenen Gleichungen (VIb) $t = 0$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_1'' &= -A_2 \cdot \sin \psi_2 - J \cdot \sin \psi, \\ J_2'' &= -A_2 \cdot \cos \psi_2 - J \cdot \cos \psi, \\ J_3'' &= -A_4 \cdot \sin \psi_4, \\ J_4'' &= A_4 \cdot \cos \psi_4. \end{aligned}$$

Ferner ergeben die Gleichungen (V)

$$\begin{aligned} J_1 &= -J' \cdot \sin \psi', \\ J_2 &= -J' \cdot \cos \psi', \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß bei der Berechnung von J' und ψ' aus Gleichung (Vb) wegen des verschwindenden Widerstandes der Statorwicklung $r_1 = 0$ gesetzt werden kann. Wir erhalten somit, wenn wir außerdem noch die Gleichungen (10a) beachten, folgende Anfangsbedingungen für das Überschalten auf die Hauptstufe:

$$\left. \begin{aligned} i_1' &= -x_1 + \frac{i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha - E \cdot \sin \alpha \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega}}{\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1}, \\ i_2' &= -x_2 + \frac{(i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega} + E \cdot \sin \alpha}{\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1}, \\ i_3' &= -x_3, \quad i_4' = x_7. \end{aligned} \right\} \quad (14d)$$

Die so erhaltenen Anfangsbedingungen enthalten die stillschweigende Voraussetzung, daß die Stellung des Polrades relativ zum Vektor der Netz-EMK, also der Winkel α sich während der Einschalt-dauer des Vorstufenwiderstandes nicht ändert. In einem späteren Abschnitt wird gezeigt werden, daß dies unter praktisch vorkommenden Verhältnissen in der Tat zutrifft.

¹⁾ Als solches bezeichnen wir die Glieder mit dem Argument $q \cdot t$ in den Gleichungen (VIb), da die Winkelgeschwindigkeit q mit großer Annäherung gleich Null gesetzt werden kann.

Die im folgenden zu betrachtenden Vorgänge spielen sich bei überbrücktem Vorstufenwiderstand ab, im Kreise der Ausgleichströme liegt also lediglich der natürliche Widerstand der Maschinenwicklungen. Da dieser nun bei größeren Maschinen sehr geringfügig ist, können wir ihn bei der Berechnung der Integrationskonstanten unbedenklich vernachlässigen. Dieselben sind natürlich genau so wie im vorigen Abschnitt zu berechnen, nur daß wir in dem Gleichungssystem (10b) die mit a_1 , a_2 , $\frac{r_1}{L_1}$ und $\frac{r_2}{L_2}$ multiplizierten Glieder vernachlässigen können. Führen wir ferner in dasselbe die neuen Anfangsbedingungen ein und kennzeichnen wir die neuen Unbekannten durch Stricheln, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_5' \cdot L_2 - x_1' \cdot M &= 0, & x_2' + x_4' &= -i_{f1}', \\ x_6' \cdot L_2 - x_2' \cdot M &= 0, & x_1' + x_3' &= -i_{f2}', \\ x_3' \cdot L_1 - x_7' \cdot M &= 0, & x_6' + x_8' &= -i_{f3}', \\ x_4' \cdot L_1 - x_8' \cdot M &= 0, & x_5' + x_7' &= -i_{f4}', \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystem führt nun zu folgendem Ergebnis, wenn wir für die i_f' die entsprechenden Werte aus den Gleichungen (14 d) und (11) einführen, wobei die Konstanten a_1 und r_1 sich auf den Stromkreis mit eingeschaltetem Vorstufenwiderstand beziehen:

$$x_1' = -J_1' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{a_1^2 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - \frac{(i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega} + E \cdot \sin \alpha}{\tau \cdot \left(\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1 \right)},$$

$$x_2' = J_1' \cdot \frac{a_1^2 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1 - \tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - \frac{i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha - E \cdot \sin \alpha \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega}}{\tau \cdot \left(\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1 \right)},$$

$$x_3' = -J_2' \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} + \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \frac{(i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega} + E \cdot \sin \alpha}{\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1},$$

$$x_4' = -J_1' \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} + \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \frac{i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha - E \cdot \sin \alpha \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \omega}}{\frac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1},$$

$$\left. \begin{aligned} x_5' &= \frac{M}{L_2} \cdot x_1', & x_6' &= \frac{M}{L_2} \cdot x_2', \\ x_7' &= \frac{M}{L_2} \cdot \frac{1}{1 - \tau} \cdot x_3', & x_8' &= \frac{M}{L_2} \cdot \frac{1}{1 - \tau} \cdot x_4'. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Unter Beachtung der Gleichung (8 d) folgt weiterhin für die ersten 4 der eben angeschriebenen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= - \frac{E \cdot \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2}{\omega^2} \cdot \tau^2 \right) + (i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \omega \cdot a_1 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2}{\omega^2} \cdot \tau^2 \right)}{\tau^2 \cdot (\omega^2 + a_1^2) \cdot (L_1^2 \cdot \omega^2 + r_1^2)} \cdot r_1, \\ x_2' &= - \frac{(i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2}{\omega^2} \cdot \tau^2 \right) - E \cdot \sin \alpha \cdot \omega \cdot a_1 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2}{\omega^2} \cdot \tau^2 \right)}{\tau^2 \cdot (\omega^2 + a_1^2) \cdot (L_1^2 \cdot \omega^2 + r_1^2)} \cdot r_1, \\ x_3' &= \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \frac{i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha}{L_1 \cdot \omega}, \\ x_4' &= - \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \frac{E \cdot \sin \alpha}{L_1 \cdot \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

Daraus berechnet sich nun

$$\left. \begin{aligned} A_1' &= -\frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\ A_2' &= J_k \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}, \\ A_3' &= i_e \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\ A_4' &= i_e \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} \cdot \sqrt{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}, \\ \operatorname{tg} \psi_1' &= \operatorname{tg} \psi_3' = \frac{1 - \kappa \cdot \cos \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \kappa \sin \alpha}{\frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \kappa \cdot \sin \alpha}, \\ \operatorname{tg} \psi_2' &= \operatorname{tg} \psi_4' = -\frac{\kappa \cdot \sin \alpha}{1 - \kappa \cdot \cos \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII})$$

Der zeitliche Verlauf der Ströme erfolgt natürlich genau, wie es die Gleichungen (VIb) angeben, an Stelle der Konstanten A , J und ψ , p , q und a sind natürlich die gestrichelten Werte einzusetzen, ferner sind a_1' und a_2' auf den Stromkreis ohne Vorstufenwiderstand zu beziehen.

Die Gleichungen (VII) lassen nun folgendes erkennen: Das Wechselstromglied der Ausgleichströme im Stator kann durch den Vorstufenwiderstand überhaupt nicht beeinflusst werden. Dies ist auch ohne weiteres einleuchtend, denn dieses verdankt seine Entstehung dem magnetischen Felde des Induktors, dessen zeitliches Abklingen, wie die Gleichungen (IVb) lehren, lediglich von der Zeitkonstante der Erregerwicklung abhängt. Das Induktorfeld ist also noch in voller Stärke vorhanden, wenn das Überschalten auf die Hauptstufe erfolgt, und das diesem proportionale Wechselstromglied des Ausgleichsstromes muß infolgedessen ebenfalls in voller Stärke erscheinen.

Durch den Vorstufenwiderstand kann lediglich das Gleichstromglied in seiner Höhe herabgedrückt werden. Und zwar wird die günstigste Wirkung zweifellos dann erreicht, wenn die Stromstöße beim Schalten auf die Vorstufe und beim Überschalten auf die Hauptstufe gleich hoch ausfallen.

Beim Schalten auf die Vorstufe erreicht der Strom sein Maximum in der Phase 2 zur Zeit $\omega \cdot t = \pi$. Der erreichte Höchstwert ist

$$\begin{aligned} i_{2\max} &= A_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot e^{-\frac{a_1}{\omega} \cdot \pi} - A_2 \cdot \cos \psi_2 - J \cdot \cos \psi \\ &= A_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot \left(1 + e^{-\frac{a_1}{\omega} \cdot \pi}\right) \\ &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}{\left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)^2}} \cdot \left(1 + e^{-\frac{a_1}{\omega} \cdot \pi}\right). \end{aligned} \quad (17a)$$

Beim Überschalten auf die Hauptstufe erfolgt der größte Stromstoß in der Phase 1 angenähert zur Zeit $\omega \cdot t = \frac{3}{2} \cdot \pi$. Sein Betrag ist angenähert

$$\begin{aligned} i_{1\max} &= A_1' \cdot \sin \psi_1' \cdot e^{-1.5 \cdot \frac{a_1'}{\omega} \cdot \pi} - A_2 - J \\ &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{a_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot e^{-1.5 \cdot \frac{a_1'}{\omega} \cdot \pi}\right). \end{aligned} \quad (17b)$$

Die auftretenden Überströme fallen nach dem eben Gesagten am niedrigsten aus, wenn

$$i_{2\max} = i_1'_{\max},$$

woraus

$$\frac{\omega}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_1}{\omega} \cdot \pi} = \frac{a_1}{\omega} = e^{-1,5 \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot \pi}. \quad (\text{VIII a})$$

In dieser Gleichung ist a_1' die aus dem Oszillogramm des plötzlichen Kurzschlusses zu ermittelnde natürliche reziproke Kurzschluß-Zeitkonstante der Statorwicklung (ohne Vorstufenwiderstand).

Für Werte des Verhältnisses $\frac{a_1'}{\omega}$ zwischen 0,0 und 0,1, also innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen ergibt die eben angeschriebene Gleichung für $\frac{a_1}{\omega}$ also, für

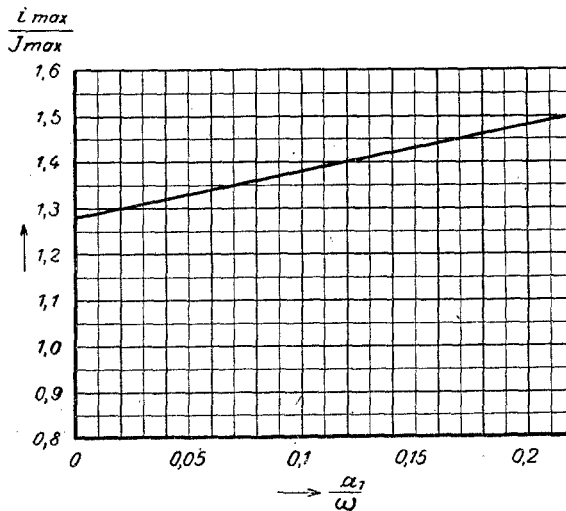


Bild 1.

das Verhältnis des Ohm'schen Widerstandes im Statorkreis zur Kurzschlußreaktanz der Statorwicklung die Grenzen 0,3 und 0,35. Um also die geringsten Überströme zu erhalten, ist der Vorstufenwiderstand etwa gleich dem dritten Teil der Kurzschlußreaktanz der Statorwicklung zu machen und die mit diesem Widerstand erzielte recht bescheidene Schutzwirkung zeigt das Bild 1¹⁾. Die Gleichung (VIII a) läßt übrigens erkennen, daß die Schutzwirkung des Vorstufenschalters unabhängig von der Stellung des Polrades ist, in welcher die Parallelschaltung erfolgt. Bezüglich des Bildes 1 ist noch zu

sagen, daß für Schalten ohne Vorstufenschalter das Verhältnis $\frac{i_{\max}}{J_{\max}} = 2$ wird.

Außer der Beanspruchung durch Überströme erfährt der Generator bei schlechtem Parallelschalten eine nicht zu unterschätzende Überspannungsbeanspruchung. Und zwar handelt es sich hier in erster Linie um die Schaltwellen, die beim Schalten in Phasenopposition besonders hoch ausfallen können; sie besitzen in diesem Falle gerade die doppelte Höhe wie die beim plötzlichen Kurzschluß in die Maschinenwicklung einziehende Entladewelle, während sie beim Parallelschalten unter einem Winkel von 60° ebenso hoch ausfallen. Man könnte nun auch hier daran denken, die Höhe der erwähnten Entladewellen durch Anwendung eines Vorstufenschalters auf ein zulässiges Maß herunterzudrücken. Die folgenden Betrachtungen werden jedoch zeigen, daß auch bezüglich der Überspannungsbeanspruchung nur eine recht bescheidene Schutzwirkung zu erzielen ist.

Wir werden im folgenden so rechnen, als wenn die Maschinenwicklung sich gegenüber Sprungwellen ebenso verhielte wie ein gestreckter Leiter. Die neueren Untersuchungen haben gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, wir können jedoch in grober Annäherung, insbesondere wenn uns nur der allererste Anfang der Erscheinungen interessiert, so rechnen und werden demgemäß der Wicklung der zuzuschaltenden Maschine einen wohldefinierten Wellenwiderstand W_1 und den parallelgeschalteten

¹⁾ Dieses entspricht der Abb. 5 von „Technische Probleme der elektrischen Großwirtschaft“ ETZ. 1921, Heft 2, 3 u. 4.

Maschinen des Netzes bzw. den Zuleitungen einen Wellenwiderstand W_2 zuschreiben. Der Ohmwert des Vorstufenwiderstandes sei R .

Sei e die Spannungsdifferenz zwischen den Kontakten des Schalters kurz vor der Parallelschaltung, wo

$$e = E \cdot \sqrt{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2}, \quad (18)$$

so ist die Höhe der in die zuzuschaltende Maschine einziehenden Sprungwelle beim Schalten auf die Vorstufe:

$$e_1' = e \cdot \frac{W_1}{R + W_1 + W_2}. \quad (19a)$$

Sei ferner i der kurz vor der Berührung der Hauptkontakte im Vorstufenwiderstand fließende Strom, so ist die Höhe der beim Überschalten auf die Hauptstufe auftretenden Sprungwelle:

$$e_1'' = i \cdot R \cdot \frac{W_1}{W_1 + W_2}.$$

Nun ist in unserm Falle, wie die Gleichungen (VIb) erkennen lassen

$$i = A_2 + J$$

zu setzen, da wir annehmen, daß das Gleichstromglied beim Berühren der Hauptkontakte bereits abgeklungen ist und da wir ferner annehmen, daß der Winkel α sich in der Zeit der Berührung der Vorkontakte nicht geändert hat. Es ist also gemäß Gleichungen (VIa)

$$i = \frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + \kappa \cdot \sin \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}$$

und wir erhalten hiermit

$$e_1'' = e \cdot \frac{W_1}{W_1 + W_2} \cdot \frac{R}{\sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega)^2 + R^2}}. \quad (19b)$$

Auch hier ergibt sich die geringste Beanspruchung für den Fall, daß die Spannungsprünge beim Schalten auf Vorstufe und Hauptstufe gleich groß ausfallen. Diese Forderung ergibt nach Gleichsetzen der Ausdrücke (19a) und (19b) unter Beachtung der Gleichung (18) folgende Bedingungsgleichung für den günstigsten Wert des Vorstufenwiderstandes:

$$R^4 + R^3 \cdot 2 \cdot (W_1 + W_2) = [L_1 \cdot \tau \cdot \omega \cdot (W_1 + W_2)]^2. \quad (VIIIb)$$

Diese Gleichung besitzt nur eine reelle positive Wurzel, für die die Beziehung

$$R > \sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega)^2 \cdot \frac{W_1 + W_2}{2}}$$

einen oberen Grenzwert festlegt. Der tatsächliche Widerstandswert stimmt um so mehr mit diesem Grenzwert überein, je kleiner R gegenüber $2 \cdot (W_1 + W_2)$ ist, eine Forderung, die in den meisten Fällen erfüllt sein wird.

Als Beispiel betrachten wir einen Turbogenerator von 20000 kVA, 6300 Volt, 50 Perioden mit $E = 3650$ Volt, $J_k = 2000$ Amp, $\tau = 0,1$, $\frac{a_1}{\omega} = 0,05$, $L_1 \cdot \tau \cdot \omega = \frac{E \cdot \tau}{J_k} = 0,1825$ Ohm, der auf ein unendlich großes Netz geschaltet werde.

Für $\frac{a_1}{\omega} = 0,05$ ergibt die Forderung eines möglichst geringen Stromstoßes folgenden Wert des Vorstufenwiderstandes

$$R = 0,325 \cdot L_1 \cdot \tau \cdot \omega = \sim 0,06 \text{ Ohm.}$$

Die Überströme überschreiten damit, wie Bild 1 zeigt, den beim plötzlichen Kurzschluß möglichen maximalen Wert noch um 33%.

Dagegen ergibt die Forderung eines möglichst niedrigen Spannungssprunges einmal für $W_1 + W_2 = 500$

$$R = \sim 2 \text{ Ohm,}$$

dann für $W_1 + W_2 = 50$

$$R = \sim 0,93 \text{ Ohm.}$$

Der Schutzwert dieses Widerstandes, worunter wir den Ausdruck

$$\frac{R + W_1 + W_2}{W_1 + W_2} - 1$$

verstehen, ergibt sich im ersteren Falle zu $\frac{502}{500} - 1 = 0,4\%$, im letzteren Falle zu

$$\frac{50,93}{50} - 1 = \sim 2\%$$

Die Parallelschaltung erfolge nun auf der Oberspannungsseite eines mit dem vorliegenden Generator direkt verbundenen Transformators 6300/110000 Volt gleicher Leistung mit 5% Streuspannung. Es ist also jetzt

$$E = 63\,500 \text{ Volt, } J_k = 110 \text{ Amp, } \tau = 0,15, \frac{a_1'}{\omega} = 0,05, L_1 \cdot \tau \cdot \omega = 86,5 \text{ Ohm.}$$

Mit diesen Werten ergibt die Forderung eines möglichst geringen Stromstoßes

$$R = 0,325 \cdot L_1 \cdot \tau \cdot \omega = 28 \text{ Ohm.}$$

Hingegen ist der für die Spannungsbeanspruchung günstigste Widerstandswert einmal für $W_1 + W_2 = 5000$:

$$R = 260 \text{ Ohm,}$$

dann für $W_1 + W_2 = 500$:

$$R = 110 \text{ Ohm.}$$

Der Schutzwert des Widerstandes ist im ersteren Falle 5,3%, im letzteren Falle 22%. Hierzu ist zu bemerken, daß für Transformatoren der erwähnten Spannung $W_1 + W_2$ sicher größer als 500 anzunehmen ist und daß demgemäß der Schutzwert des Vorstufenwiderstandes näher bei 5% als bei 20% liegen dürfte. Man sieht ferner, daß der für die Spannungsbeanspruchung günstigste Widerstand den Stromstoß nicht im geringsten zu beeinflussen vermag.

6. Die magnetischen Kontrastwirkungen zwischen Stator und Induktor. Es ist von der Theorie des plötzlichen Kurzschlusses der Synchronmaschinen her bekannt, daß im Verlaufe des Ausgleichsvorganges zwischen Stator und Induktor gewaltige magnetische Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte auftreten, die die ganze Maschine in gefährlicher Weise beanspruchen können. Es sind dies zunächst die Kontrastwirkungen zwischen den am Stator und am Induktor haftenden Anteilen des ursprünglichen gemeinsamen magnetischen Feldes der Maschine, die sich bald als Anziehungs- bzw. als Abstoßungskräfte äußern und in jeder Periode zweimal ihre Richtung ändern. Dann tritt ein durch die Cu-Verluste in der Statorwicklung bedingtes gleichgerichtetes bremsendes Drehmoment auf, das gleichfalls erhebliche Werte annehmen kann. Mit diesen Kraftäußerungen ist natürlich im vorliegenden Falle, der dem des plötzlichen Kurzschlusses sehr ähnlich ist, ebenfalls zu rechnen. Hier tritt aber noch eine weitere Kraftäußerung auf, nämlich ein gewaltiges synchronisierendes Drehmoment, das den Induktor alsbald nach dem Parallelschalten in seine richtige Lage relativ zum Vektor der Netz-EMK zu drehen sucht.

Um die Summe aller auf den Induktor wirkenden magnetischen Kräfte zu erhalten, bilden wir die resultierende Längs- bzw. Querfeldamperenwindungsverteilung des Stators relativ zur Längs- bzw. Querachse der Erregerwicklung. Und zwar ist der aus der Wirkung sämtlicher Amperenwindungen des Stators und Induktors sich ergebende resultierende Erregerstrom in der Längsachse der Erregerwicklung:

$$i_m = i_a - \frac{M}{L_1} \cdot (i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) - i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)). \quad (20a)$$

Ferner ist der resultierende Erregerstrom in der Querachse der Erregerwicklung, also in der Längsachse der Dämpferwicklung:

$$i_q = i_s + \frac{M}{L_1} \cdot (i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)). \quad (21b)$$

Eine Drehmomentenbildung kann nur zwischen um 90° auseinanderliegenden Komponenten der Induktor- bzw. Statoramperenwindungen auftreten. Nun ist die

magnetische Kontrastwirkung zwischen den resultierenden Längsamperwindungen des Induktors und den Queramperwindungen des Stators:

$$D_m = \text{konst} \times i_m \cdot (i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)). \quad (20b)$$

Ferner ist die magnetische Kontrastwirkung zwischen den resultierenden Queramperwindungen des Induktors und den Längsamperwindungen des Stators:

$$D_q = \text{konst} \times i_q \cdot (-i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)). \quad (21b)$$

Die resultierende magnetische Kontrastwirkung zwischen Induktor und Stator ist somit:

$$D = D_m + D_q \\ = \text{konst} \times [i_1 \cdot (i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)) + i_2 \cdot (i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) - i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha))]. \quad (22a)$$

Das normale Vollastdrehmoment des Generators ist

$$D_{\text{norm}} = \frac{M \cdot m}{9,81} \cdot \xi \cdot i_e \cdot J_{1/2} (\cos \varphi = 1) = \xi \cdot \frac{E \cdot J_{1/2}}{9,81 \cdot \omega} \cdot m,$$

wo m die Polpaarzahl bedeutet und ξ ein Faktor ist, der bei Zweiphasenstrom = 1, bei Dreiphasenstrom = 1,5 zu setzen ist. Wir haben also

$$\text{konst} = \xi \cdot \frac{M \cdot m}{9,81}. \quad (22b)$$

Nun ist nach den Entwicklungen des 4. Abschnittes, wenn wir, was ja mit sehr großer Annäherung zutrifft, $q = 0$ und $p = \omega$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= x_2 \cdot e^{-a_1 \cdot t} + (x_3 \cdot \sin \omega \cdot t - x_4 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot e^{-a_2 \cdot t} + J_2' \cdot \sin \omega \cdot t - J_1' \cdot \cos \omega \cdot t, \\ i_2 &= x_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} - (x_4 \cdot \sin \omega \cdot t + x_3 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot e^{-a_2 \cdot t} - J_1' \cdot \sin \omega \cdot t - J_2' \cdot \cos \omega \cdot t, \\ i_3 &= x_8 \cdot e^{-a_2 \cdot t} - (x_5 \cdot \sin \omega \cdot t - x_6 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot e^{-a_1 \cdot t}, \\ i_4 &= -x_7 \cdot e^{-a_2 \cdot t} - (x_6 \cdot \sin \omega \cdot t + x_5 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot e^{-a_1 \cdot t} + i_e, \end{aligned} \right\} \quad (22c)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{1 - \kappa \cdot \cos \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \kappa \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}, \\ x_2 &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{\frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \kappa \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}, \\ x_3 &= x_1 - J_2', & x_4 &= x_2 - J_1', \\ x_5 &= \frac{M}{L_2} \cdot x_1, & x_6 &= \frac{M}{L_2} \cdot x_2, \\ x_7 &= -\frac{M}{L_2} \cdot x_1, & x_8 &= -\frac{M}{L_2} \cdot x_2, \\ J_1' &= J_k \cdot \frac{\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} (1 - \kappa \cdot \cos \alpha) + \kappa \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2}, \\ J_2' &= J_k \cdot \frac{1 - \kappa \cdot \cos \alpha - \frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot \kappa \cdot \sin \alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (22d)$$

Durch Vereinigung der Gleichungen (22) ergibt sich nun folgender Ausdruck für die magnetische Kontrastwirkung zwischen Stator und Induktor:

$$D = \frac{\xi \cdot E \cdot J_k}{9,81 \cdot m \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} \cdot \left[((1 - \kappa \cdot \cos \alpha)^2 + (\kappa \cdot \sin \alpha)^2) \cdot (\sin(\omega \cdot t - \delta)) \cdot e^{-(a_1 + a_2) \cdot t} \right]$$

$$+ (1 - \tau) \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot e^{-2 \cdot a_2 \cdot t} + \tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \Big) + (1 - \tau) \cdot x \cdot \sin \alpha \cdot e^{-2 \cdot a_2 \cdot t} + \tau \cdot x \cdot \sin \alpha \Big]. \quad (\text{IX})$$

Gewöhnlich reguliert man $i_e \cdot M \cdot \omega = E$ ein, macht also $x = 1$, ferner kann, da uns vor allem die erste Zeit kurz nach Beginn des Ausgleichsvorganges interessiert, a_2 in den Exponenten unbedenklich gleich Null gesetzt werden. Dann folgt

$$D = \frac{\xi \cdot E \cdot J_k}{\frac{9,81}{m} \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} \cdot \left[2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e^{-a_1 \cdot t} \left(\sin \omega \cdot t - \frac{a_1}{\omega} \cdot \cos \omega \cdot t \right) + \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \right]. \quad (\text{IX a})$$

In Gleichung (IX) ist übrigens

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \alpha + \frac{a_1}{\omega} \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \sin \alpha} \quad (\text{IX b})$$

zu setzen.

Die Gleichung (IX a) besitzt nun eine sehr übersichtliche Form. Das erste Glied in der eckigen Klammer entspricht der magnetischen Kontrastwirkung zwischen den am Stator und Induktor haftenden Anteilen des gemeinsamen magnetischen Feldes, der zweite Summand ergibt das durch die Wicklungsverluste bedingte bremsende Moment und der dritte Summand endlich das synchronisierende Moment. Für normale Fälle, also insbesondere Schalten ohne Vorstufenschalter, wo $\frac{a_1}{\omega}$ klein gegenüber 1 ist, läßt sich an Hand der Gleichung folgendes sagen.

Weitaus den höchsten Wert, und zwar den vierfachen Betrag des synchronisierenden Momentes kann der erste Summand erreichen. Die Kontrastwirkung zwischen Stator- und Induktorfeld wechselt ihre Richtung jedoch so schnell, daß sie fast vollkommen von der kinetischen Energie der einzelnen Pole bzw. der Induktorwalze aufgenommen wird und aus diesem Grunde die Maschine nur verhältnismäßig wenig beansprucht. Das bremsende Moment wird am größten beim Parallelschalten in Phasenopposition und verschwindet beim Schalten in der Nähe des Synchronismus, es verhält sich in dieser Beziehung genau so wie die eben betrachtete magnetische Kontrastwirkung. Das synchronisierende Moment dagegen wird beim Parallelschalten in Phasenopposition gleichfalls Null, es erreicht seinen größten Betrag bei Parallelschalten in der Mittelstellung zwischen Synchronismus und Phasenopposition ($\alpha = 90^\circ$).

Geschieht das Parallelschalten mittels Vorstufenschalters, so erkennt man, daß solange $\frac{a_1}{\omega} < 1$, das gesamte auf die Induktorwelle ausgeübte Drehmoment größer wird als beim Schalten mittels normalen Schalters. Während man also auf der einen Seite die Beanspruchung der Wickelköpfe etwas verringert, vergrößert man auf der andern Seite die Beanspruchung der Induktorwelle. Und zwar ist diese letztere Beanspruchung nicht zu unterschätzen, denn gerade bei Turbogeneratoren mögen manche Schaufeldefekte des Dampfteiles auf die durch schlechtes Parallelschalten hervorgerufene Verdrehung der Welle zurückzuführen sein.

7. Das Einschwingen des Induktors in die synchrone Lage. Die sämtlichen bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf die allererste Zeit nach dem Einlegen des Schalters, sie geben uns daher keinen Aufschluß über den ferneren Verlauf der Dinge, insbesondere darüber, welchem endgültigen stationären Zustande unsere Maschine zustrebt und wie das Einschwingen in diesen verläuft. Denn wir betrachteten sowohl die Winkelgeschwindigkeit ω als auch den Netzwinkel α als kon-

stante Größen, zwangen also dem Induktor eine gegenüber der Netz-EMK absolut starre Lage auf. Wir wollen diese Beschränkung nun im folgenden fallen lassen und zunächst zusehen, wieweit die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen dadurch eine Korrektur erfahren. Und zwar können wir die Winkelgeschwindigkeit ω weiterhin als Konstante betrachten, wenn wir nur den Winkel α als eine mit der Zeit veränderliche Größe auffassen.

Jede zusätzliche Bewegung $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ des Induktors gibt den Anlaß zu in den verschiedenen Wicklungen sich ausbildenden zusätzlichen Strömen. Diese letzteren werden nun um so mehr an Bedeutung zurücktreten, mit um so geringerer Geschwindigkeit $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ diese Bewegung erfolgt, denn um so geringer wird die Höhe der durch diese induzierten zusätzlichen EMK. Genauere Untersuchungen¹⁾, auf die wir hier aus Platzmangel nicht eingehen können, bestätigen denn auch die Richtigkeit dieser Überlegung. Die Ergebnisse der in den vorhergehenden Abschnitten angestellten Untersuchungen gelten mit um so größerer Genauigkeit auch für die Synchronmaschinen mit freischwingendem Induktor, je mehr die Bedingung erfüllt ist

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} \text{ und } \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \ll \omega^2. \quad (23)$$

Insbesondere die Gleichungen (VI) und (IX) geben für alle praktisch vorkommenden Fälle den zeitlichen Verlauf der Ströme, und der magnetischen Kontrastwirkungen für den vollständigen Vorgang des Einschwingens des Polrades in die synchrone Lage richtig wieder, wobei α nunmehr eine Funktion der Zeit ist, deren Erforschung die folgenden Betrachtungen gewidmet sind.

Bezeichnen wir mit \odot das Trägheitsmoment der sich drehenden Massen, so lautet die mechanische Bewegungsgleichung des Induktors:

$$\odot \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \gamma \cdot \frac{d\alpha}{dt} + D = 0. \quad (X)$$

Hierbei ist $\frac{d\alpha}{dt}$ als eine zur konstanten Winkelgeschwindigkeit ω zu addierende zusätzliche Geschwindigkeit aufzufassen, der Dämpfungskoeffizient γ wird sehr angenähert durch die Beziehung

$$\gamma = \frac{\xi \cdot E \cdot J_k}{\frac{9,81}{m} \cdot \tau \cdot \omega \cdot a_2 \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} \cdot \left[\kappa + \frac{2 \cdot \frac{a_1}{\omega}}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \left(\sin \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \cos \alpha\right) \right] \quad (Xa)$$

wiedergegeben, während die Größe des Drehmomentes D der Gleichung (IX) zu entnehmen ist.

Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten, eine allgemeine Lösung²⁾ der Gleichung (X) abzuleiten. Beschränken wir uns dagegen auf kleine Winkel α , nehmen wir also nicht gerade Schalten in Phasenopposition, sondern

¹⁾ Hier sei auf eine ähnlichen Untersuchungen gewidmete Arbeit von L. Dreyfus: „Einführung in die Theorie der selbsterregten Schwingungen von synchronen Maschinen“. E. u. M. 1911, Seite 352, verwiesen.

²⁾ Eine näherungsweise Lösung der Gleichung (X) gelingt mit Hilfe des folgenden Kunstgriffes. Wir ersetzen zunächst in Gleichung (IXa) die trigonometrischen Funktionen mit dem Argument α durch Trapeze mit gleichem Flächeninhalt, wir ändern also lediglich den zeitlichen Verlauf der entsprechenden Drehmomente um eine Kleinigkeit, nicht aber deren Arbeitsvermögen.

In Gleichung (Xa), wo $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ nur in Verbindung mit dem Faktor $\frac{a_1}{\omega}$ bzw. $\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2$ vorkommen, können wir, da $\frac{a_1}{\omega}$ in den uns interessierenden Fällen stets klein gegenüber 1 ist, noch

das praktisch übliche schlechte Synchronisieren an, so läßt sich die Gleichung (X) wesentlich vereinfachen. Wir können dann nämlich $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \alpha$ setzen und beim Ausdruck (Xa) für die Dämpfung noch einen Schritt weitergehen, indem wir, da es uns hauptsächlich auf den Mittelwert der Dämpfung in einem bestimmten Intervall ankommt, den Sinus des Winkels α gänzlich vernachlässigen. Die Gleichungen (IX) und (X) lassen sich dann zu folgender Gleichung zusammenfassen, die unter der Voraussetzung kleiner Winkel α (α höchstens $= 60^\circ$) das Einschwingen des Polrades in die synchrone Lage vollständig beschreibt:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \nu^2 \cdot \alpha = 0 \quad (\text{XIa})$$

mit

$$\nu^2 = \frac{\zeta \cdot E \cdot J_k}{\frac{9,81}{m^2} \cdot \odot \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} = \frac{4 \text{ (kVA)} \cdot m^2 \cdot 10^3}{(G \times D^2) \cdot X \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} \quad (\text{XIb})$$

In dem zuletzt angeschriebenen Ausdruck bedeutet (kVA) die normale scheinbare Leistung des Generators in kVA, $(G \times D^2)$ dessen Schwungmoment in $\text{kg} \times \text{m}^2$ und X dessen auf den Vallaststrom bezogenen Streufaktor.

Gleichung (XIa) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiten Grades, deren Lösung sich ohne weiteres in folgender Form anschreiben läßt

$$\alpha = e^{-\beta \cdot t} \cdot (A \cdot \sin \nu' \cdot t + B \cdot \cos \nu' \cdot t) \quad (\text{XIIa})$$

mit

einen Schritt weitergehen und diese Funktionen durch deren Mittelwerte in dem betrachteten Teilintervall ersetzen. Die Höhe des Ersatztrapezes ergibt sich zu

$$h = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \sqrt{\pi^2 - 8}) \approx 0,887.$$

Wir teilen dann das Intervall $0 - \pi$ in 3 Teile, in deren jedem wir die Sinuslinie durch je eine Gerade ersetzen können, und damit zerfällt die Gleichung (X) in 3 gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die für die verschiedenen Teilintervalle folgendermaßen lauten, wenn wir annehmen, daß die mit $e^{-a_1 \cdot t}$ multiplizierten Glieder nach Durchlaufen des ersten Teilintervalls abgestorben sind.

$$1. \quad \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 \mp \frac{a_1}{\omega} \cdot h + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2 \cdot (1 + 2 \cdot h)}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} - \nu^2 \cdot \alpha_1 = -\nu^2 \cdot \left[4 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \left(\sin \omega \cdot t - \left(\frac{a_1}{\omega}\right) \cdot \cos \omega \cdot t \right) + \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 + h) \mp \pi \right]$$

gültig im Intervall $\mp \pi < \alpha_1 < \mp (\pi - h)$;

$$2. \quad \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 \mp 2 \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot h + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} \mp \frac{a_1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot \nu^2 \cdot h}{\pi - 2 \cdot h} \cdot \alpha_2 = \nu^2 \cdot \left(\pm h - \frac{a_1}{\omega} \cdot \left(1 - \frac{h \cdot \pi}{\pi - 2 \cdot h} \right) \right)$$

gültig im Intervall $\mp (\pi - h) < \alpha_2 < \mp h$;

$$3. \quad \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2 \cdot (1 - 2 \cdot h)}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_3}{dt} + \nu^2 \cdot \alpha_3 = \nu^2 \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot (h - 1)$$

gültig im Intervall $-h < \alpha_3 < +h$.

und

$$\beta = \frac{\nu^2}{2 \cdot a_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}$$

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{4 \cdot a_2^2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \right)^2}$$

(XIII.)

Bei praktisch ausgeführten Maschinen ist sehr angenähert

$$\nu' = \nu, \quad (24)$$

Gleichung (XIb) gibt also die mechanische Eigenfrequenz des Polrades an, wobei allerdings zu beachten ist, daß bei der Ableitung der Gleichung (XI) das zeitliche Abklingen des magnetischen Feldes der Maschine nicht berücksichtigt wurde. Mit abnehmendem Felde sinkt das synchronisierende Moment und damit die Eigenfrequenz ν . Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß bei größeren Maschinen das Abklingen des magnetischen Feldes langsam im Vergleich zum Einschwingen des Polrades verläuft und daß aus diesem Grunde die eben erwähnte Vernachlässigung verhältnismäßig belanglos ist.

Aus den Anfangsbedingungen, wonach

und

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \bar{\alpha} \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t = 0 \quad (25)$$

— $\bar{\alpha}$ ist die relative Stellung des Polrades zur Achse der Statorwicklung, im Moment des Parallelschaltens — ergeben sich die willkürlichen Integrationskonstanten zu

$$A = 0$$

und

$$B = \bar{\alpha}$$

und die Gleichung (XIIa) geht damit über in

$$\alpha = \bar{\alpha} \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos \nu \cdot t. \quad (XIIc)$$

Die Gleichungen (XIb) und (XIIb) lassen nun folgendes erkennen:

Mit zunehmendem Statorwiderstand, also eingeschaltetem Vorstufenwiderstand nimmt die mechanische Eigenfrequenz des Polrades erst langsam und von $\frac{a_1}{\omega} > 1$ an schneller ab. Ferner wird die Dämpfung der freien Schwingungen zunächst geringer, wird für $\frac{a_1}{\omega} = 1$ Null und wird für $\frac{a_1}{\omega} > 1$ endlich negativ. Bei nennenswerter Größe des Vorstufenwiderstandes schwingt also das Polrad überhaupt nicht in die synchrone Lage ein, sondern das Polrad schwingt bei Stehenbleiben des Schalters auf der Vorstufe nach Durchgang durch die synchrone Lage über die Anfangsausweichung $\bar{\alpha}$ hinaus, um nach einer Reihe anschwellender Schwingungen vollständig außer Tritt zu fallen. Es wäre also aussichtslos, durch längeres Verweilen auf der Vorstufe das Synchronisieren der Maschine erleichtern zu wollen. Stärkere zusätzliche Beanspruchungen der Induktorwelle durch den Vorstufenwiderstand treten im Gegensatz zum Parallelschalten bei großen Winkelabweichungen $\bar{\alpha}$ bei Werten des Winkels $\bar{\alpha}$ unter 60° nicht auf.

Bei den im vorhergehenden Abschnitt angestellten, den Schutzwert des Vorstufenschalters betreffenden Rechnungen war vorausgesetzt worden, daß der Maschinenschalter flott durchgeschaltet wird und daß während der Einschaltzeit des Vorstufenwiderstandes das Polrad seine ursprüngliche relative Lage nicht nennenswert ändert. Daß dies letztere tatsächlich der Fall ist, soll anhand einiger Beispiele noch kurz gezeigt werden, wobei als Einschaltdauer für den Vorstufenwiderstand $\frac{1}{30}$ Sekunde angenommen wird, eine Zeit, die für elektrisch betätigte Schalter sehr hoch gegriffen erscheint. Soll eine auch nur nennenswerte Reduktion des ersten Spannungssprunges erfolgen, so muß, wie die durchgeführten Rechnungen zeigen, des Verhältnis $\frac{a_1}{\omega}$ mindestens 3,0 betragen. Der Vorstufenwiderstand muß also den dreifachen Wert der Kurzschlußreaktanz des Generators besitzen. Der zuletzt genannte Wert soll denn auch den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden.

Für mittlere und größere Maschinen kann der auf den Vollaststrom bezogene Streufaktor $X = 0,1$ angenommen werden, für $\omega = 314$ und $\frac{a_1}{\omega} = 3$ geht Gleichung (XIb) über in

$$\nu = 3,57 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{kVA}{G \times D^2}}$$

Es ergeben sich nun für verschiedene Fälle folgende Eigenschwingungszahlen:

1. Turbogenerator 1750 kVA, 3000 Umdr. p. M., 50 Perioden, Schwungmoment von Induktor und Schaufelrad zusammen $= G \times D^2 = 500 \text{ kg} \times \text{m}^2$:

$$\nu = 3,57 \cdot \sqrt{\frac{1750}{500}} = 7,0.$$

2. Turbogenerator 10000 kVA, 3000 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 2000 \text{ kg} \times \text{m}^2$:

$$\nu = 3,57 \cdot \sqrt{\frac{10000}{2000}} = 8,0.$$

3. Turbogenerator 23000 kVA, 1500 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 35000 \text{ kg} \times \text{m}^2$:

$$\nu = 7,15 \cdot \sqrt{\frac{25000}{35000}} = 5,7.$$

4. Wasser-Turbogenerator 11500 kVA, 500 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 160000 \text{ kg} \times \text{m}^2$:

$$\nu = 21,4 \cdot \sqrt{\frac{11500}{160000}} = 5,75.$$

Wie man sieht, macht die Bewegung des Polrades während der Überschaltzeit von $\frac{1}{30}$ Sekunde bei den größeren Maschinen nur etwa 10^0 aus, und es bedürfen daher die unter Vernachlässigung der Bewegung des Polrades durchgeführten Betrachtungen keiner nennenswerten Korrektur.