Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen.

Von

ADOLF HURWITZ in Königsberg i. Pr.

1.

Eine gelegentlich von Herrn Klein*) berührte Aufgabe, welche die Herstellung einer gewissen mit der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen im Zusammenhang stehenden Differentialgleichung verlangt, hat neuerdings in einer Note des Herrn Halphen**) ihre Erledigung gefunden. Im Folgenden möchte ich eine zweite Lösung desselben Problemes entwickeln, welche die verlangte Differentialgleichung in expliciter Form liefert und unmittelbar die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad gestattet.

Unter Beibehaltung der von Herrn Klein gebrauchten Bezeichnungen lässt sich die in Rede stehende Aufgabe — ganz abgesehen von ihrem Zusammenhange mit dem Transformationsprobleme — folgendermassen präcisiren.

Es seien

$$\lambda : \mu : \nu$$

Verhältnissgrössen, zwischen denen die Gleichung

$$F \equiv \lambda^3 \mu + \mu^3 \nu + \nu^3 \lambda = 0 \tag{1}$$

besteht. Ferner werde

$$J = -\frac{C^3}{12^3 \cdot \nabla^7} \tag{2}$$

gesetzt, wo

$$\nabla \equiv 5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda)$$

die (mit einem passenden Zahlenfactor versehene) Hesse'sche Determinante von F,

$$C = \lambda^{14} + \mu^{14} + \nu^{14} + \cdots$$

---

*) Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. Diese Annalen Bd. XIV, pag. 455.

**) Sur une équation différentielle du troisième ordre. Diese Annalen Bd. XXIV, pag. 461.

die mit den Differentialquotienten $\frac{\partial\nabla}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\nabla}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\nabla}{\partial\nu}$ geränderte Hesse'sche Determinante bedeutet.

Nun weiss man, dass die 168 Werthsysteme

$$\lambda : \mu : \nu,$$

welche vermöge der Gleichungen (1) und (2) zu einem gegebenen Werthe von J gehören, durch geeignete lineare Transformationen aus einem dieser Werthsysteme hervorgehen.*) Es muss folglich möglich sein eine homogene lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung mit J als unabhängiger Veränderlichen herzustellen, welche rationale Coefficienten besitzt und von welcher drei passend gewählte Particularlösungen sich wie

$$\lambda : \mu : \nu$$

verhalten. Die Aufgabe ist, eine solche Differentialgleichung zu bilden.

Zu dem Ende betrachte ich drei linear-unabhängige Integrale erster Gattung der Curve

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0.$$

Dieselben mögen mit

$$J_1, \; J_2, \; J_3$$

bezeichnet und so gewählt werden, dass

$$dJ_1 : dJ_2 : dJ_3 = \lambda : \mu : \nu \tag{3}$$

ist. Durchläuft J in seiner Ebene irgend einen geschlossenen Weg, so erfahren die Verhältnisse

$$\lambda : \mu : \nu$$

und also auch die Grössen

$$y_1 = \frac{dJ_1}{dJ}, \quad y_2 = \frac{dJ_2}{dJ}, \quad y_3 = \frac{dJ_3}{dJ} \tag{4}$$

eine lineare Substitution. Da diese Grössen überdies algebraische Functionen von J sind, deren Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte bei $J = \infty$, $J = 0$, $J = 1$ liegen, so sind sie die Lösungen einer Differentialgleichung von folgender Form**):

$$\frac{d^3y}{dJ^3} + \frac{aJ+b}{J(J-1)}\frac{d^2y}{dJ^2} + \frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2(J-1)^2}\frac{dy}{dJ} + \frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3(J-1)^3}\,y = 0, \tag{5}$$

in welcher nunmehr die Coefficienten $a, b, \ldots$ zu bestimmen sind.

---

*) Den Beweis der obigen Angaben sehe man bei Klein, l. c.

**) Fuchs, „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten." Crelle's Journal, Bd. 66, pag. 139—148, oder auch Bd. 68, pag. 354 ff.

Man vergleiche auch die denselben Gegenstand betreffenden Abhandlungen von Thomé, Crelle's Journal Bd. 74, p. 200 und Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 214.

Aus der citirten Abhandlung des Herrn Klein geht hervor, dass die Riemann'sche Fläche, welche die Verzweigung von y_1, y_2, y_3 in Bezug auf J darstellt, bei

$$J = \infty, \quad J = 0, \quad J = 1$$

so verzweigt ist, dass bezüglich

je 7, je 3, je 2

Blätter im Cyklus zusammenhängen.

Die Anfangsexponenten in den Entwicklungen der Fundamentalintegrale der Gleichung (5), werden daher die Werthe

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{7}+1, \quad \frac{\alpha_2}{7}+1, \quad \frac{\alpha_3}{7}+1 \quad \text{für} \quad J=\infty, \\ &\frac{\beta_1}{3}-1, \quad \frac{\beta_2}{3}-1, \quad \frac{\beta_3}{3}-1 \quad \text{für} \quad J=0, \\ &\frac{\gamma_1}{2}-1, \quad \frac{\gamma_2}{2}-1, \quad \frac{\gamma_3}{2}-1 \quad \text{für} \quad J=1, \end{aligned}$$

besitzen. Dabei sind die ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

nothwendig *positiv*, weil $\int y \, dJ$ eine überallendliche Function von J vorstellt. Ferner kann offenbar

$$(6) \qquad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3; \quad \beta_1 > \beta_2 > \beta_3; \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$$

angenommen werden. Nun ist nach einem allgemeinen Satze*) nothwendig:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{7} + \frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3} + \frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{2} = 6.$$

Es folgt hieraus, dass

$$\alpha_1=4, \ \alpha_2=2, \ \alpha_3=1; \quad \beta_1=3, \ \beta_2=2, \ \beta_2=1; \quad \gamma_1=3, \ \gamma_2=2, \ \gamma_3=1$$

ist, denn die letzte Gleichung hat keine andere mit den Bedingungen (6) verträgliche Auflösung.

Die nach Herrn Fuchs sogenannten determinirenden Fundamentalgleichungen, welche für die Gleichung (5) lauten:

$$\begin{aligned} &r(r+1)(r+2)-ar(r+1)+a'r-a'' = 0 \\ &\qquad \text{für } J=\infty, \\ &r(r-1)(r-2)-br(r-1)+c'r-d'' = 0 \\ &\qquad \text{für } J=0, \\ &r(r-1)(r-2)+(a+b)r(r-1)+(a'+b'+c')r+(a''+b''+c''+d'') = 0 \\ &\qquad \text{für } J=1, \end{aligned}$$

*) Fuchs, l. c.

müssen also bezüglich die Wurzeln

$$\frac{11}{7},\ \frac{9}{7},\ \frac{8}{7};\quad 0,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3};\quad \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}$$

besitzen. Daraus folgt:

$$(7)\qquad \begin{cases} a=7,\ a'=10+\frac{2}{7};\quad a''=2+\frac{2}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}, \\ b=-4,\ c'=2+\frac{2}{9},\ d''=0, \\ a'+b'+c'=\frac{3}{4},\ a''+b''+c''+d''=0. \end{cases}$$

Eine weitere Bestimmungsgleichung für die Coefficienten der Differentialgleichung (5) ergiebt sich auf folgende Weise:

Bekanntlich können in den zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalintegralen einer Differentialgleichung Logarithmen auftreten, wenn unter den Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung solche vorhanden sind, welche sich um ganze Zahlen unterscheiden. Bei der hier betrachteten Differentialgleichung tritt nur für $J=1$ der genannte Fall ein, indem die Differenz der beiden Wurzeln $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ gleich 1 ist.

Die Bedingung dafür, dass *trotzdem* kein Logarithmus auftritt, drückt sich dahin aus, dass der Coefficient von $J-1$ in der Entwicklung von

$$r(r-1)(r-2)+r(r-1)\frac{aJ+b}{J}+r\cdot\frac{a'J^2+b'J+c'}{J^2} + \frac{a''J^3+b''J^2+c''J+d''}{J^3}$$

nach steigenden Potenzen von $J-1$, für $r=-\frac{1}{2}$ verschwindet.*) Es muss also

$$\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}b'-c'+b''+2c''+3d''=0$$

sein. Die Gleichungen (7) in Verbindung mit der letzten Gleichung reichen zur Bestimmung der Coefficienten $a, b, \ldots$ hin.

Die Ausrechnung ergiebt, dass unsere Differentialgleichung definitiv folgendermassen lautet:

$$(8)\quad J^2(J-1)^2\cdot\frac{d^3y}{dJ^3}+(7J-4)J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2}+\left[\frac{72}{7}(J^2-J)-\frac{20}{9}(J-1)+\frac{3}{4}J\right]\frac{dy}{dJ} + \left[\frac{72\cdot 11}{7^3}(J-1)+\frac{5}{8}+\frac{2}{63}\right]y=0.$$

*) Vgl. Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 68, pag. 374—378. Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 224—226.

2.

Der Zusammenhang der soeben entwickelten Differentialgleichung mit der Gleichung des Herrn Halphen ergiebt sich auf folgende Weise.

Es mögen, wie üblich, g_2, g_3, Δ die Invarianten des elliptischen Integrals von den Perioden ω_1, ω_2 bedeuten, und es besitze

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$$

eine positive zweite Ordinate. Wird nun ω als unabhängige Veränderliche eingeführt, indem man

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{27 g_3^2}{\Delta} + 1$$

setzt, so darf

$$\lambda = \Delta . z_1(\omega_1, \omega_2), \quad \mu = \Delta . z_2(\omega_1, \omega_2), \quad \nu = \Delta . z_4(\omega_1, \omega_2)$$

angenommen werden, wobei

$$z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = (-1)^{\alpha+1} \sqrt{\frac{14\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{7}}}{(\sqrt[8]{\Delta})^7} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^7) \quad (q = e^{i\pi\omega})$$

ist.*) Bei dieser Wahl der λ, μ, ν wird die Hesse'sche Determinante ∇ eine homogene Function -12^{ter} Dimension von ω_1, ω_2, welche bei allen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante 1 ungeändert bleibt. Da ∇ für $\omega = i\infty$ verschwindet, so folgt**)

$$\nabla = c \,.\, \Delta.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$C = c' \,.\, g_2 \,.\, \Delta^2,$$
$$K = c'' \,.\, g_3 \,.\, \Delta^3,$$

wo K wie bei Herrn Klein die Functionaldeterminante von f, ∇, C bedeutet und wo c, c', c'' numerische Coefficienten bezeichnen.

Es stellen nun ferner, wie ich in der Abhandlung: Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante (diese Annalen Bd. XXV, pag. 183—185) gezeigt habe, die Integrale

$$\int \Delta \,.\, z_\alpha(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{d\omega}{\omega_1^2}$$

---

*) Klein, „Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function", Diese Annalen, Bd. XVII, pag. 569, und „Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe", Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1884, pag. 71.

**) Siehe meine Abhandlung über elliptische Modulfunctionen, Bd. XVIII dieser Annalen, pag. 555.

überall endliche Integrale der Curve

$$f \equiv \lambda^3 \mu + \mu^3 \nu + \nu^3 \lambda = 0$$

vor, und es werden also die nach J genommenen Ableitungen derselben

$$\Delta \cdot z_\alpha(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d\omega}{dJ} = \frac{i\pi}{9} \cdot \frac{\Delta^2 z_\alpha}{g_2^2 g_3} \text{*)}$$

particuläre Integrale unserer Differentialgleichung (8).

Die von Herrn Halphen aufgestellte Differentialgleichung hat dagegen die Lösungen

$$\left(\frac{K}{\nabla^4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta z_\alpha = \text{const.} \left(\frac{g_3}{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta z_\alpha,$$

welche sich von denen der Gleichung (8) durch den Factor

$$\text{const.} \frac{\Delta}{g_2^2 g_3} \cdot \left(\frac{\Delta}{g_3}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{const.} [J(J-1)]^{-\frac{2}{3}}$$

unterscheiden.

Man geht also von der Differentialgleichung (8) *durch die Substitution*

$$y = [J(J-1)]^{-\frac{2}{3}} \cdot y'$$

zu der Gleichung des Herrn Halphen über, wo y' die abhängige Variable der Halphen'schen Gleichung bezeichnet.

Es sei noch bemerkt, dass Herr Brioschi (in den Annali di Matematica, ser. II, Bd. 12, pag. 65) auf rechnerischem Wege diejenige Differentialgleichung aufgestellt hat, welcher die Grösse

$$\frac{z_\alpha}{\sqrt[6]{\Delta^5}}$$

genügt. Offenbar wird man von unserer Gleichung aus durch die Substitution

$$y = \frac{\Delta^2 z_\alpha}{g_2^2 g_3} \cdot \frac{\sqrt[6]{\Delta^5}}{z_\alpha} \cdot \bar{y} = (J-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot J^{-\frac{2}{3}} \cdot \bar{y}$$

zu der Gleichung des Hrn. Brioschi gelangen.

---

*) Es ist hier die Relation

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{9}{i\pi} \omega_1^2 \cdot \frac{g_2^2 g_3}{\Delta}$$

herangezogen, welche ich Bd. XVIII dieser Annalen, pag. 560 abgeleitet habe. Man beachte nur, dass dort ω_1 und ω_2 zu vertauschen ist, wenn man zu der hier gewählten Bezeichnung übergehen will.

3.

Es ist soeben davon Gebrauch gemacht, dass die Integrale

$$J_1, \; J_2, \; J_3$$

identisch sind mit den von mir (diese Annalen Bd. XXV, pag. 183 ff.) betrachteten Integralen erster Gattung 7ter Stufe.*) An dieser Stelle habe ich auch gezeigt, dass sich die Integrale in Potenzreihen von $q = e^{i\pi\omega}$ von sehr einfachem Bildungsgesetz entwickeln lassen. Zieht man diese Entwicklungen heran, so kann man, da die Differentialgleichung (8) die Integrale $\frac{dJ_1}{dJ}, \frac{dJ_2}{dJ}, \frac{dJ_3}{dJ}$ besitzt, folgenden Satz aussprechen:

„*Die homogene lineare Differentialgleichung vierter Ordnung*

$$J^2(J-1)^2 \cdot \frac{d^4y}{dJ^4} + (7J-4)J(J-1)\frac{d^3y}{dJ^3}$$
$$+\left[\frac{72}{7}(J^2-J) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4}J\right]\frac{d^2y}{dJ^2}$$
$$+\left[\frac{72.11}{7^3}(J-1) + \frac{5}{8} + \frac{2}{63}\right]\frac{dy}{dJ} = 0$$

lässt sich in folgender Weise integriren:

Man setze

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20 \sum n^3 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^3}{q^2\left[\Pi(1-q^{2n})\right]^{24}},$$

so stellt der Ausdruck

$$y = c_1 J_1 + c_2 J_2 + c_4 J_4 + c$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung vor, wo

$$J_\alpha = \sum_m \frac{\psi(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}}$$

*) Beiläufig möge hier das Resultat einer nach anderer Richtung gehenden Untersuchung Platz finden: Es lassen sich drei linear unabhängige (Normal-)Integrale 7ter Stufe U_1, U_2, U_3 herstellen, deren simultane Periodensysteme sich aus den folgenden zusammensetzen:

$$\left.\begin{array}{lllllll} U_1\colon & 1, & 0, & 0, & \tau, & \tau-1, & -\tau \\ U_2\colon & 0, & 1, & 0, & \tau-1, & -\tau, & \tau \\ U_3\colon & 0, & 0, & 1, & -\tau, & \tau, & \tau-1 \end{array}\right\}, \quad \tau = \frac{1+i\sqrt{7}}{4}.$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass jedes dieser Integrale ein elliptisches ist. Das Criterium, welches Frau Kowalewsky für die Reduction eines Abel'schen Integrales vom Geschlechte 3 auf ein elliptisches gegeben hat (Acta mathematica, Bd. 4, pag. 406) findet hier im Hinblick auf die von Herrn Klein entwickelten Eigenschaften der Curve

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

seine Bestätigung.

ist, die Summe erstreckt über alle positiven Zahlen m, welche congruent α (mod. 7) *sind. Dabei bedeutet* $\psi(m)$ *die Summe*

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{r}{7}\right)\cdot r$$

genommen über alle Lösungen der Gleichung

$$4m = r^2 + 7s^2$$

in positiven oder negativen ganzen Zahlen r, s."

Man hat hier also ein neues vollständig durchgeführtes Beispiel für jene Integration der Differentialgleichungen durch eindeutige Functionen, auf welche Herr Poincaré in seinen Abhandlungen über Functionen mit linearen Transformationen in sich verschiedentlich hingewiesen hat.

4.

Schliesslich möchte ich noch einige Bemerkungen über die Verallgemeinerung der vorstehenden Entwicklungen auf einen beliebigen Transformationsgrad (beliebige „Stufe") hinzufügen.

Die Integrale erster Gattung n^{ter} Stufe werden am zweckmässigsten definirt als solche eindeutige überall endliche Functionen $F(\omega)$ von ω, welche die in der Gleichung

$$F\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = F(\omega) + \text{const.}$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Hier bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, welche nur den Bedingungen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$
$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \ (\text{mod. } n)$$

unterworfen sind. Es ergiebt sich, dass alle diese Functionen als lineare Combinationen von p derselben darstellbar sind, wo p eine leicht aus n zu berechnende Zahl bedeutet. Denn jene Functionen sind offenbar nichts Anderes, als die Abel'schen Integrale erster Gattung, welche zu der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung des n^{ten} Transformationsgrades gehören.

Wie im Falle $n = 7$, welcher oben ausführlich behandelt wurde, so gilt auch im Allgemeinen der Satz, dass die nach der absoluten Invariante J genommenen Ableitungen der Integrale n^{ter} Stufe die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit J als unabhängiger Veränderlichen und den singulären Punkten $J = 0, 1, \infty$ sind.

Diese Differentialgleichung gehört selbstverständlich in die von Herrn Fuchs aufgestellte Classe. Die Bildung der Gleichung kann in den Fällen $n = 6$ und $n = 8$ auf einem ähnlichen Wege ausgeführt werden, wie er oben für $n = 7$ befolgt ist. Es ergiebt sich für $n = 6$ der Werth $p = 1$ und die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$J(J-1)\frac{dy}{dJ} + \frac{7J-4}{6}\cdot y = 0.$$

Für $n = 8$ wird $p = 3$. Indem ich hier die in meiner Note: „Zur Theorie der Modulargleichungen" (Göttinger Nachrichten, 21. November 1883)*) aufgestellten Entwicklungen der Integrale 8ter Stufe heranziehe, erhalte ich den Satz:

Die Differentialgleichung:

$$J^2(J-1)^2\frac{d^4y}{dJ^4} + (7J-4)\,J\,(J-1)\frac{d^3y}{dJ^3}$$
$$+\left[\frac{657}{64}(J^2-J) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4}J\right]\frac{d^2y}{dJ^2}$$
$$+\left[\frac{9.5.13}{2^5}(J-1) + \frac{8}{9} - \frac{63}{2^8}\right]\frac{dy}{dJ} = 0$$

kann folgendermassen integrirt werden:

Man setze

$$J = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20\sum n\,\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^3}{q^2\left[\Pi(1-q^{2n})\right]^{24}},$$

so stellt der Ausdruck

$$c_1\,.\,i(q) + c_2\,j(q) + c_3\left[i(q^2) - j(q^2)\right] + c_4$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung vor, wo

$$i(q),\ j(q) = \sum_m \frac{\Omega(m)}{m}\,q^{\frac{m}{4}}$$

ist, die Summe erstreckt über alle positiven Zahlen m*, welche congruent* 1*, bezüglich congruent* 5 (mod. 8) *sind. Dabei bedeutet* $\Omega(m)$ *die Summe*

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{-1}{\nu}\right)\cdot\nu$$

genommen über alle Lösungen der Gleichung

$$m = (\pm 2\mu)^2 + \nu^2$$

in ganzen nicht negativen Zahlen μ, ν."

Was endlich den Fall einer höheren Stufe $n > 8$ angeht, auf welchen ich demnächst zurückkommen möchte, so sei hier nur bemerkt,

*) Die Bezeichnung ist hier etwas modificirt.

dass die zugehörige Differentialgleichung p^{ter} Ordnung im Sinne des Herrn Frobenius*) mehrfach reductibel wird.

So gelingt es für $n = 11$ zum Beispiel die $p = 26$ linear unabhängigen Integrale so zu wählen und in drei Gruppen von 11, 10, 5 Integralen resp. zu zerlegen, dass die nach J genommenen Differentialquotienten der Integrale einer Gruppe Lösungen je einer homogenen linearen Differentialgleichung 11^{ter}, 10^{ter}, 5^{ter} Ordnung resp. werden, wobei die Coefficienten dieser Gleichungen rationale Functionen der unabhängigen Variabeln J sind.

Ein ähnlicher Satz scheint für eine beliebige Stufe Geltung zu haben.

Königsberg i. Pr., Januar 1885.

---

*) Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 236 ff.