Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

In der Theorie der algebraischen Functionen, welche Herr Brill und ich in unserem — in der Folge mit B. N. zu citirenden — Aufsatze „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Math. Annalen Bd. VII, aufgestellt haben, ist eine beliebige irreducible homogene Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

einer algebraischen Curve als gegeben zu Grunde gelegt; und bei der Angabe der dort auftretenden Operationen ist weiter angenommen, dass die vielfachen, auch singulären, Punkte der Curve *einzeln* mitgegeben seien. Die letztere Annahme war auch dort erlaubt; einmal, weil diese Punkte durch bekannte, aber irrationale, Processe, bei Singularität mittels eindeutiger Transformationen nach B. N. § 5, aus der Gleichung $f(x) = 0$ einzeln auffindbar sind; sodann, weil es sich dort wesentlich um die Aufstellung von unbeschränkt gültigen *Sätzen* handelt.

Wenn man aber zur wirklichen *Ausführung* der dortigen Operationen, der *Darstellung* der zu $f(x) = 0$ gehörigen algebraischen Functionen und Zahlen aus dieser Gleichung allein, schreitet, tritt der Gesichtspunkt hervor: *keine für diesen Zweck vermeidliche Irrationalität einzuführen.* Ich werde nun, indem ich in dem vorliegenden Aufsatze diese Darstellungen gebe, zeigen, dass sie überhaupt in *durchaus rationaler Weise,* ohne Auflösung von irgend höheren, als linearen Gleichungen, nur aus der gegebenen, beliebig singulären Gleichung

$$f(x) = 0$$

allein abzuleiten sind.

Der hierbei leitende Gedanke ist einfach der, dass bei der Herstellung des Verhaltens der sog. „zu f adjungirten" Curven (IV.), auf welche unsere Theorie sich allein stützt, in den vielfachen Punkten von $f(x) = 0$, sei es direct, sei es durch eine Reihenfolge eindeutiger Transformationen, immer nur bekannte *Gruppen* dieser Punkte zu betrachten sind. Dasselbe tritt bei der rationalen Zerfällung der Resultante aus $f(x) = 0$ und $f_c(x) = 0$, wo $f_c(x)$ eine beliebige erste Polare von $f(x)$, — analog der Kronecker'schen Zerfällung der Discriminante*), der Resultante in z aus $f(1, z, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ — in zwei Factoren, den „Doppelfactor" und den „Verzweigungsfactor" ein, der eine den Schnittpunkten von $f(x)$ mit einer beliebigen zu f adjungirten Curve, der andere den übrigen, die Polare vor einer solchen Curve auszeichnenden, Schnittpunkten entsprechend.

Als Hülfsmittel für diese Entwicklungen werden ausschliesslich einige einfache Sätze aus der *Theorie der Elimination* aus zwei homogenen Gleichungen mit 3 Variablen benutzt. Dass diese Sätze hier in II. eine eingehende Ableitung gefunden haben, bedarf einer Erklärung. In dem citirten Aufsatze, B. N., (1873) sind dieselben ebenfalls zu Grunde gelegt, aber (mit Ausnahme von B. N., § 7) als bekannt angenommen. Nun enthält aber keines der vorhandenen Lehrbücher von diesen Sätzen einen strengen, in allen Fällen gültig bleibenden Beweis; nur von den längst bekannten Sätzen sind in verschiedenen Vorlesungen, besonders über Geometrie, gelegentlich solche Beweise gegeben worden. Da zudem der § 7, B. N., sehr knapp gehalten ist, so möchte sich aus Beidem erklären, dass jener Aufsatz, nach dem Verhalten von analogen späteren Arbeiten zu schliessen, nicht immer richtig beurtheilt worden zu sein scheint, vor Allem in Bezug auf die rein algebraische Grundlage; in der That wird aber dabei von geometrischer Anschauung keinerlei Gebrauch gemacht und es werden, wie es auch hier geschehen soll, nur einige wenige geometrische Benennungen für bestimmte algebraische Processe eingeführt. Von Beweisen, wie sie in neuerer Zeit von St. Smith (London, Math. Soc. 1876) und Stolz (Math. Ann. XV, 1879) veröffentlicht worden sind, sehe ich hier ab, weil dieselben von den Wurzeldifferenzen und Reihenentwicklungen Gebrauch machen. Die jetzigen Begriffe der Eliminationstheorie erlauben aber, alle Beweise und Resultantendarstellungen ausschliesslich auf den Process des Bestimmens des grössten gemeinsamen Divisors zweier algebraischer Formen zurückzuführen.

Um diesem Standpunkt, der dem Zweck der vorliegenden Arbeit allein entspricht, gerecht zu werden und um diesen Aufsatz (wie den B. N.) algebraisch unabhängig zu stellen, mussten die Eliminationssätze hier behandelt werden. Dieses, und die daraus unmittelbar zu ziehenden Schlüsse auf die Definition der „mehrelementigen" Punkte

*) Journal f. r. u. a. Math., Bd. 91, pag. 301.

einer Curve und der „Multiplicität" des Schnittpunkts zweier Curven, vermöge der „allgemeinen" und der „speciellen" Resultante, sowie das Verhalten bei eindeutiger Transformation der Curven, bilden die Abschnitte I., II. dieser Arbeit.

Abschnitt III. beschäftigt sich mit der Anwendung von II. auf den Schnitt einer Curve mit ihren Polaren, wobei die Nr. 18, die Specialisirung in die Discriminante, nur zum Vergleich mit anderen Arbeiten hinzugefügt wurde. Nachdem dann in IV. die „adjungirten" Curven definirt sind, löst V. die in diesem Aufsatz gestellte Aufgabe: die rationale Zerfällung der Resultante von III. in die beiden Factoren, die rationale Aufstellung der Geschlechtszahl und der adjungirten Curven.

VI. endlich giebt solche Entwicklungen, welche die Stellung dieser Betrachtungen in dem System der Theorie der algebraischen Functionen, wie sie durch den Aufsatz B. N. und durch meinen Aufsatz „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen", Math. Ann. Bd. XVII, geschaffen ist, betreffen. Aus den Eliminationsbetrachtungen folgen nämlich einerseits die Sätze von B. N., andrerseits der vorliegende Abschnitt V.; dabei kann die vorliegende Nr. 28, VI., durch ausführlichere Behandlung den § 7, B. N. ersetzen. Die Sätze von B. N. liefern dann noch für die rationalen Darstellungen von V. wichtige Modificationen (Nr. 30, 31, VI.), wenigstens für die Aufstellung der zur Curve m^{ter} Ordnung, $f(x) = 0$, adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi(x) = 0$; Darstellungen, die übrigens vermöge der Nr. 31 auch ohne die Sätze von B. N. bewiesen sind. Die Aufstellung dieser Functionen $\varphi(x)$ genügt aber nach meinem oben citirten Aufsatze, Math. Ann. Bd. XVII, für die Darstellung aller zu f gehöriger Functionen und Zahlen: es sind die Zähler der zu f gehörigen Differentiale erster Gattung (Nr. 32).

I.

Elimination aus zwei binären Formen.

1.

Wir benutzen aus der Eliminationstheorie für zwei binäre Formen folgende Sätze, die als bekannt angenommen werden können:

a) Als Resultante der beiden Formen

$$(1) \qquad \begin{cases} f = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} t' + a_2 t^{m-2} t'^2 + \cdots + a_m t'^m, \\ \varphi = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} t' + b_2 t^{n-2} t'^2 + \cdots + b_n t'^n \end{cases}$$

wird der Ausdruck

$$
(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_m & & \\ & a_0 & a_1 \ldots & . & a_m & \\ & \ddots & & & & \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots & . & b_n & \\ & b_0 & b_1 \ldots & . & . & b_n \\ & \ddots & & & & \end{vmatrix},
$$

bestehend aus n Reihen der a und m Reihen der b, bezeichnet.

b) Die Resultante D ist eine rationale ganze homogene Function der a vom Grade n, ebenso der b vom Grade m, und vom Gesammtgewicht mn; d. h., wenn

$$\varrho\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m} \cdot b_0^{\beta_0} b_1^{\beta_1} \ldots b_n^{\beta_n}$$

irgend ein Glied von D ist, wo ϱ ein Zahlenfactor, so wird

$$
(3) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n, \\ \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = m, \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) \quad & 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \cdots + m\alpha_m + 1 \cdot \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + \cdots + n\beta_n \\
& = m \cdot \alpha_0 + (m-1) \cdot \alpha_1 + \cdots + 1 \cdot \alpha_{m-1} + n \cdot \beta_0 + (n-1) \cdot \beta_1 \\
& \qquad + \cdots + 1 \cdot \beta_{n-1} = mn.
\end{aligned}
$$

c) Das Verschwinden der Resultante D ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die beiden Formen f und φ einen in den homogenen Variablen t, t' wenigstens linearen Factor gemeinsam haben.

d) Der für $D = 0$ auftretende von den t, t' abhängige grösste gemeinsame Factor von f und φ ergiebt sich als ganze rationale Function der Coefficienten a und b.

e) Hat man an Stelle der beiden homogenen Formen (1)

$$f(t, t'), \qquad \varphi(t, t')$$

die nicht homogenen Formen m^{ter}, bez. n^{ter} Ordnung in τ

$$
(1') \qquad f(\tau, 1) \equiv f\left(\frac{t}{t'}, 1\right); \quad \varphi(\tau, 1) \equiv \varphi\left(\frac{t}{t'}, 1\right)
$$

gegeben, so bildet D immer noch die Resultante von (1') und es gelten die Sätze b), c), d); nur ist hinzuzufügen dass, wenn das Verschwinden der Resultante $D = 0$ durch

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0$$

hervorgebracht ist, in den grössten gemeinsamen Factor, welcher dann in d) einen Factor $t'^{\varkappa}$ $(\varkappa > 0)$ enthält, jetzt an Stelle dessen kein endlicher gemeinsamer Factor von $f(\tau, 1)$, $\varphi(\tau, 1)$ tritt, sondern nur eine gemeinsame $\varkappa$-fache Wurzel $\tau = \infty$ von

$$f(\tau, 1) = 0, \quad \varphi(\tau, 1) = 0.$$

f) Seien

$$f = a_i t^{m-i} + a_{i+1} t^{m-i-1} t' + \cdots + a_m t'^{m-i},$$
$$\varphi = b_\varkappa t^{n-\varkappa} + b_{\varkappa+1} t^{n-\varkappa-1} t' + \cdots + a_n t'^{n-\varkappa},$$
$$f' = a_0' t^m + a_1' t^{m-1} t' + \cdots + a_m' t'^m,$$
$$\varphi' = b_0' t^n + b_1' t^{n-1} t' + \cdots + b_n' t'^n;$$

sei ferner D die Resultante von f und φ, also vom Grade $n - \varkappa$ in den a, $m - i$ in den b, und D_ε die Resultante von

$$t'^i f + \varepsilon f', \qquad t'^\varkappa \varphi + \varepsilon \varphi',$$

also vom Grade n in den Grössen a, a', vom Grade m in den Grössen b, b'; und sei $\varkappa \geqq i$. Dann zeigt die Determinantenform (2) für D_ε, dass man bis auf Glieder von höherer als i^{ter} Dimension in ε erhält:

$$D_\varepsilon = \varepsilon^i (a_0' b_i - b_0' a_i)^i a_i^{\varkappa - i} \cdot D,$$

wo $b_i = 0$ für $\varkappa > i$. Ebenso tritt, wenn auf irgend andere Weise zwei Formen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, F und Φ, vermöge $\varepsilon = 0$ in f und φ übergehen, immer D als Factor des in ε niedrigsten Gliedes der Resultante von F und Φ auf; so wird die Resultante D_ε' von

$$t'^i f + \varepsilon^i f', \qquad t'^\varkappa \varphi + \varepsilon^\varkappa \varphi'$$

bis auf Glieder von höherer als $(i\varkappa)^{\text{ter}}$ Dimension in ε zu

$$D_\varepsilon' = \varepsilon^{i\varkappa} (a_0'^\varkappa b_\varkappa^i + \cdots + (-1)^{i\varkappa} b_0'^i a_i^\varkappa) \cdot D.$$

II.

Elimination aus zwei ternären Formen.

2.

Die allgemeine Resultante.

Wir betrachten zuerst zwei Formen

$$(1) \quad \begin{cases} f \equiv f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3^m f_0 + x_3^{m-1} f_1 + x_3^{m-2} f_2 + \cdots + f_m, \\ \varphi \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3^n \varphi_0 + x_3^{n-1} \varphi_1 + x_3^{n-2} \varphi_2 + \cdots + \varphi_n, \end{cases}$$

wo f_i und φ_i homogene ganze Functionen i^{ter} Ordnung der Variablen x_1, x_2 bedeuten. Von den Formen f und φ setzen wir dabei voraus:

a) dass dieselben keinen variablen Factor gemeinsam haben;

b) dass die Constanten f_0 und φ_0 nicht zugleich verschwinden.

Die beiden Formen f und φ haben dann bei Elimination von x_3 eine nicht identisch verschwindende Resultante D, welche in Bezug auf x_1, x_2 ganz, homogen und vom Grade $m \cdot n$ ist.

Denn wenn die nach Nr. 1 existirende Resultante D in $x_1 : x_2$ identisch verschwände, würden nach Voraussetzung b) und nach Nr. 1, d) und e) die beiden Formen f und φ *als Functionen von x_3* einen gemeinsamen Factor in x_3 besitzen, der eine ganze Function von x_3 und auch eine ganze Function von x_1, x_2 wäre. Sei P dieser Factor, so wäre

$$f \equiv P \cdot Q,$$

wo Q eine ganze Function von x_3, eine rationale Function von x_1, x_2 würde; der Nenner von Q, eine ganze homogene Function von x_1, x_2, müsste dann in P theilbar sein, und der Quotient wäre eine in x_3, x_1, x_2 ganze Function, die in f und φ theilbar wäre — gegen die Voraussetzung a).

Der Grad $m \cdot n$ von D in x_1, x_2 ergiebt sich aus Gleichung (4) Nr. 1.

3.

Aus Nr. 2 geht hervor, dass die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ nur durch eine endliche Zahl von durch $D=0$ gegebenen Werthsystemen $\frac{x_2}{x_1}$ und durch eine endliche Zahl zugehöriger Werthe von $\frac{x_3}{x_1}$ erfüllt werden. Man kann daher durch eine vorgängige lineare Transformation der Variablen immer erreichen, dass irgend 2 endlich verschiedenen gemeinsamen Werthsystemen, welche $f=0$, $\varphi=0$ erfüllen, auch 2 endlich verschiedene Werthe von $\frac{x_2}{x_1}$, d. h. zwei verschiedene Factoren von D, entsprechen, und dass zugleich die Voraussetzungen a) und b) von Nr. 2 bestehen bleiben. Zu diesen können wir also die folgende fügen:

c) dass nicht zwei endlich verschiedene gemeinsame Werthsysteme von $f=0$, $\varphi=0$ auf dasselbe $\frac{x_2}{x_1}$ führen.

4.

Multiplicität der Schnittpunkte zweier Curven.

Wenn unter den Voraussetzungen a), b), c) der Nr. 2 und Nr. 3 die Resultante D einen Factor

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^\alpha$$

besitzt, während kein weiterer Factor von D mit $a_1 x_1 + a_2 x_2$ zusammenfällt, so wird dem entsprechenden Werthsystem $x_1 : x_2 : x_3$, das $f=0$, $\varphi=0$ befriedigt — oder, wie wir sagen wollen, dem entsprechenden *Schnittpunkt* der beiden *Curven f und φ* — die *Multiplicität* α beigelegt. Man hat dann unter Berücksichtigung dieser so bestimmten Multiplicität und nach Nr. 2 zu sagen:

dass die beiden Curven f und φ $m \,.\, n$ Schnittpunkte besitzen.

5.

Die nach Nr. 4 bestimmte Multiplicität eines $f=0$ und $\varphi=0$ gemeinsamen Werthsystemes $x_1 : x_2 : x_3$ *ist unabhängig von dem zu Grunde gelegten Coordinatensystem.*

Denn transformirt man die Formen (1), Nr. 2 durch eine nicht specielle lineare Substitution zwischen den Variablen x_1, x_2, x_3 und neuen Variablen x_1', x_2', x_3', so bleiben für die transformirten Formen

$$f'(x_1', x_2', x_3'), \qquad \varphi'(x_1', x_2', x_3')$$

die Ordnungen m, n und die Voraussetzungen a), b), c) bestehen. Die Elimination von x_3' aus f' und φ' ergiebt also eine nicht identisch verschwindende Resultante D' vom Grade $m \cdot n$ in x_1', x_2', welche einen, dem Factor $(a_1 x_1 + a_2 x_2)^\alpha$ entsprechenden Factor

$$(a_1' x_1' + a_2' x_2')^{\alpha'}$$

besitzen möge. Da nun die Resultante, als rationale ganze Function der Coefficienten, eine *stetige* Function der oben eingeführten Substitutionscoefficienten, α' aber eine *ganze* Zahl ist, so muss, so weit specielle Werthe der Substitutionscoefficienten vermieden werden, α' unabhängig von diesen Coefficienten werden, also mit α übereinstimmen.

Durch speciellere Werthe der Substitutionscoefficienten — immer bei nicht verschwindender Substitutionsdeterminante — kann der Fall eintreten, dass entweder zwei im Allgemeinen verschiedene Factoren von D', von den Exponenten α und β, sich zu *einem* Factor mit dem Exponenten $\alpha + \beta$ vereinigen, oder auch, dass die Resultante identisch verschwindet; je nachdem Voraussetzung c) oder b) nicht mehr erfüllt ist.

6.

Bestimmung der Schnittpunkte.

Um die Coordinaten *irgend eines Theils der gemeinsamen Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$* zu erhalten, führen wir wieder zuerst allgemeine lineare Functionen x_1', x_2', x_3' von x_1, x_2, x_3 ein und bilden nach Nr. 5 die Resultante aus $f' = 0$, $\varphi' = 0$, $x_2' - \lambda x_1' = 0$:

$$D'(\lambda).$$

An Stelle von $D'(\lambda)$ setzen wir den Ausdruck $\Delta'(\lambda)$, welcher aus $D'(\lambda)$ dadurch hervorgeht, dass jeder in $D'(\lambda)$ in irgend einer Potenz eingehende Factor nur in *erster* Potenz genommen wird; dass also, wenn

$$D'(\lambda) = D_1^1 D_2^2 D_3^3 \ldots$$

wo nicht zwei lineare Factoren eines D_h oder zweier verschiedener D_h, $D_{h'}$ einander gleich sind,

$$\Delta'(\lambda) = D_1 D_2 D_3 \ldots$$

wird. $\Delta'(\lambda)$ wird aus $D'(\lambda)$ dadurch gebildet, dass man D' durch den grössten gemeinsamen Divisor von D' und $\frac{dD'}{d\lambda}$ theilt. — Aus $\Delta'(\lambda)$ sei weiter ein beliebiger Factor vom Grade ϱ,

$$\Delta''(\lambda),$$

herausgenommen.

Um mit a), b), c), Nr. 2, 3, verträgliche Specialitäten zu vermeiden, setzen wir ferner:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \xi_1, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 &= \xi_2, \\ x_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 &= \xi_3, \end{aligned}$$

wo weder ξ_1 noch ξ_2 für ein zu $\Delta''(\lambda) = 0$ gehöriges gemeinsames Werthsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$ verschwinden sollen. Man kann dann die Coefficienten der Substitution der x' in die x so *specialisiren*, dass aus $\Delta''(\lambda) = 0$ eine nicht identisch verschwindende Gleichung ϱ^{ten} Grades in $x = \frac{\xi_2}{\xi_1}$,

$$\Delta_1(x) = 0,$$

entsteht; ferner so, dass eine solche Gleichung ϱ^{ten} Grades in $y = \frac{\xi_3}{\xi_1}$,

$$\Delta_2(y) = 0,$$

und endlich, dass eine solche Gleichung ϱ^{ten} Grades in $z = \frac{y}{x} = \frac{\xi_3}{\xi_2}$,

$$\Delta_3(z) = 0,$$

entsteht. Die Wurzeln seien bezüglich

$$a_1, a_2, \ldots, a_\varrho; \quad b_1, b_2, \ldots, b_\varrho; \quad c_1, c_2, \ldots, c_\varrho;$$

nach den Annahmen a), b), c) sind die Wurzeln a_h von einander verschieden und es gehört zu jeder Wurzel a_h nur je *eine* Wurzel b_h und *eine* Wurzel $c_h = \frac{b_h}{a_h}$; und diese Wurzeln sind nicht ∞, da hierfür ξ_1 und ξ_2 nicht $= 0$ sein sollen. Giebt man ferner in der Gleichung $\Delta_3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ der Grösse x einen festen Werth a_h aus den Wurzeln von $\Delta_1(x) = 0$, so hat dieselbe, als Gleichung in y aufgefasst, die Wurzeln

$$a_h \frac{b_1}{a_1}, \ldots, a_h \frac{b_{h-1}}{a_{h-1}}, \quad b_h, \quad a_h \frac{b_{h+1}}{a_{h+1}}, \ldots, a_h \frac{b_\varrho}{a_\varrho};$$

und keine dieser Grössen, ausser b_h, wird mit irgend einer der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ übereinstimmen, wenn man nur specielle Werthe der willkürlichen Constanten α, β, γ ausschliesst. Unter der Bedingung $\Delta_1(x) = 0$ haben also die beiden Gleichungen in y:

$$\Delta_2(y) = 0, \quad \Delta_3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

immer einen und *nur einen* in y *linearen* Factor gemein

$$Py + Q,$$

wo P und Q rationale ganze Functionen von x werden und wo P auch für die Wurzeln a_h von $\Delta_1(x)=0$ nicht verschwindet. *Vermöge*

$$y = -\frac{Q}{P}$$

hat man also für alle zu $\Delta_1(x)=0$ *gehörigen gemeinsamen Werthsysteme von* $f=0$, $\varphi=0$, $y=\frac{\xi_3}{\xi_1}$ *als rationale Function von* $x=\frac{\xi_2}{\xi_1}$, *und damit auch* $\frac{x_3}{x_1}$ *als rationale Function von* $\frac{x_2}{x_1}$ (bez., für $x_1=0$: $\frac{x_3}{x_2}$ als solche von $\frac{x_1}{x_2}$), *unter der Bedingung*

$$\Delta_1(x) \equiv \Delta_1'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 0$$

und unter den Voraussetzungen a), b), c) Nr. 2, 3.

Wendet man dasselbe Verfahren auf $f'=0$, $\varphi'=0$ an, so ergeben sich allgemeiner für alle jene Werthsysteme $x_1':x_2':x_3'$, also auch $x_1:x_2:x_3$, *als rationale Functionen des Parameters* λ, *für* $\Delta''(\lambda)=0$, wo nur noch die Voraussetzung a) Nr. 2 für f und φ zu erfüllen ist.

7.

Die specielle Resultante.

Analog der in Nr. 2—6 an den Formen (1), Nr. 2 geführten Untersuchung betrachten wir jetzt die bei Elimination von x_3' entstehende *specielle Resultante*

$$D'(x_1', x_2')$$

zweier Formen

$$(2)\qquad \begin{aligned} f' &\equiv x_3'^{\,m-i} f_i' + x_3'^{\,m-i-1} f_{i+1}' + \cdots + f_m', \\ \varphi' &\equiv x_3'^{\,n-\varkappa}\varphi_\varkappa' + x_3'^{\,n-\varkappa-1}\varphi_{\varkappa+1}' + \cdots + \varphi_n', \end{aligned}$$

in welchen f_h', φ_h' homogene ganze Functionen h^{ter} Dimension von x_1', x_2' bedeuten, und welche aus f, φ durch lineare Coordinatentransformation der x_1, x_2, x_3 in x_1', x_2', x_3' entstanden sind. Es ist also nur angenommen, dass von f und φ alle $(i-1)^{\text{ten}}$, bez. alle $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, dagegen nicht alle i^{ten}, bez. alle $\varkappa^{\text{ten}}$ für $(x_1'=x_2'=0)$ verschwinden; geometrisch gesprochen: *die Curve* $f=0$, *bez.* $\varphi=0$, *soll im Punkt* $(x_1'=x_2'=0)$ *einen* i-, *bez.* $\varkappa$-, *elementigen Punkt, mit übrigens beliebigen Singularitäten, besitzen.*

Es soll die specielle Resultante D' mit der allgemeinen Resultante D aus Nr. 2 verglichen werden.

Wie in Nr. 2 folgt auch hier

a′) *dass* D' *nicht identisch für alle* $x_1:x_2$ *verschwindet;*

b′) *dass der Grad der in* x_1', x_2' *homogenen ganzen Function* $D'=mn-i\varkappa$ *wird;* denn aus (3) und (4), I. hat man, wenn

$$f_i^{\alpha_i} f_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots f_m^{\alpha_m} \cdot \varphi_\varkappa^{\beta_\varkappa} \varphi_{\varkappa+1}^{\beta_{\varkappa+1}} \cdots \varphi_n^{\beta_n}$$

ein Glied von D' ist, hier

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m = n - \varkappa,$$

$$\beta_\varkappa + \beta_{\varkappa+1} + \cdots + \beta_n = m - i,$$

$$1 \cdot \alpha_{i+1} + 2 \cdot \alpha_{i+2} + \cdots + (m-i)\alpha_m + 1 \cdot \beta_{\varkappa+1} + 2 \cdot \beta_{\varkappa+2} + \cdots + (n-\varkappa)\beta_n = (m-i)(n-\varkappa),$$

also

$$i \cdot \alpha_i + (i+1)\alpha_{i+1} + \cdots + m \cdot \alpha_m + \varkappa \cdot \beta_\varkappa + (\varkappa+1) \cdot \beta_{\varkappa+1} + \cdots + n \cdot \beta_n = mn - i\varkappa.$$

c′) dagegen können hier, abweichend von Nr. 3, zwei endlich verschiedene gemeinsame Werthsysteme von $f=0$, $\varphi=0$ auf dieselbe Wurzel $\frac{x_2'}{x_1'}$ von $D'=0$ führen; aber dann auf verschiedene $\frac{x_3'}{x_1'}$, bez. $\frac{x_3'}{x_2'}$.

8.

Die gemeinsamen Werthsysteme $x_1 : x_2 : x_3$ von $f=0$, $\varphi=0$ und die $x_1' : x_2' : x_3'$ von $f'=0$, $\varphi'=0$ in 7. entsprechen sich gegenseitig eindeutig. Man kann nun wieder, analog Nr. 4, die *Multiplicität* eines der letzteren Werthsysteme durch die Potenz des entsprechenden Factors in D' definiren. Unter Berücksichtigung *dieser* Definition hat man dann den Inhalt von Nr. 7 so auszusprechen:

Die beiden Curven $f'=0$, $\varphi'=0$ haben ausserhalb des Punktes $(x_1'=x_2'=0)$ $mn-i\varkappa$ Schnittpunkte gemein. Dies gilt, wie singulär der i-, bez. $\varkappa$-elementige Punkt von $f'=0$, bez. $\varphi'=0$, auch sei; nur dass bei solcher Singularität ein Theil der $mn-i\varkappa$ Schnittpunkte als in die Nähe des Punktes $(x_1'=x_2'=0)$ fallend aufzufassen wäre.

Die Uebereinstimmung dieser Definition mit derjenigen von Nr. 4 und die bestimmte Fassung des Satzes sollen in Nr. 9 u. 10 behandelt werden.

9.

An Stelle der beiden Formen f', φ' von Nr. 7 betrachte man zwei Formen

$$f' + \varepsilon^i f'', \quad \varphi' + \varepsilon^\varkappa \varphi'', \tag{3}$$

wo

$$f'' = x_3'^m f_0'' + x_3'^{m-1} f_1'' + \cdots + f_m'',$$

$$\varphi'' = x_3'^n \varphi_0'' + x_3'^{n-1} \varphi_1'' + \cdots + \varphi_n'',$$

und die f_h'', φ_h'' ganze homogene Functionen h^{ten} Grades von x_1', x_2' mit willkürlichen Coefficienten sind. Die durch Elimination von x_3' aus (3) entstehende Resultante D_ε' wird nach Nr. 1, f) bis auf Glieder von höherer als $(i\varkappa)^{\text{ter}}$ Dimension zu

$$D_\varepsilon' = \varepsilon^{i\varkappa}(f_0''^{\varkappa} \varphi_\varkappa'^{i} + \cdots + (-1)^{i\varkappa} \varphi_0''^{i} f_i'^{\varkappa}) \cdot D', \tag{4}$$

insbesondere für $\varkappa = i$ zu

(4′) $$\varepsilon^{i^2}(f_0''\varphi_i' - \varphi_0''f_i')^i \cdot D'.$$

Die Coordinatentransformation in Nr. 7, welche f', φ' in f, φ überführt, lässt die Formen (3) dieser Nummer in zwei Formen

(5) $$f + \varepsilon^i f^{(1)}, \qquad \varphi + \varepsilon^\varkappa \varphi^{(1)}$$

übergehen. Die durch Elimination von x_3 aus (5) entstehende Resultante D_ε geht für $\varepsilon = 0$ in D, Nr. 2, über; jedem Factor $(a_1 x_1 + a_2 x_2)^\alpha$ in D entsprechend, existiren somit in D_ε — das eine ganze rationale, also stetige Function von ε ist — genau α in x_1, x_2 lineare Factoren, welche sich für genügend kleine ε beliebig wenig von $a_1 x_1 + a_2 x_2$ unterscheiden.

Nach Nr. 5 hat daher auch D_ε', wenn dieser Factor $(a_1 x_2 + a_2 x_2)^\alpha$ von D zu einem von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* verschiedenen Werthsysteme von $f = 0$, $\varphi = 0$ gehört, wobei also $\frac{x_2'}{x_1'}$ nicht unbestimmt werden kann, α entsprechende, mit genügend kleinem ε beliebig wenig von einander abweichende in x_1', x_2' lineare Factoren. Demselben Werthsystem entsprechend, habe man in D' einen α'-fachen Factor $(a_1' x_1' + a_2' x_2')^{\alpha'}$ $(\alpha' > 1)$, wo $a_1' x_1' + a_2' x_2'$ von jenen α Factoren ebenfalls beliebig wenig abweicht.

Diese α Factoren treten auch auf der rechten Seite der Gleichung (4) auf. Wenn nun zunächst f_i' und $\varphi_\varkappa'$ *keinen* Factor gemein haben, so können die α Factoren in dem vor D' stehenden, mit den willkürlichen Grössen f_0'', φ_0'' sich *endlich* ändernden Factor dieser rechten Seite nicht enthalten sein, treten also alle in D' ein; und jeder Factor von D' ist auch in D_ε enthalten. Für das von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* verschiedene Werthsystem ist also $\alpha' = \alpha$. Zugleich wird dann für keinen $D' = 0$ genügenden Werth $\frac{x_2'}{x_1'}$ die gemeinsame Wurzel $\frac{x_3'}{x_1'}$, bez. $\frac{x_3'}{x_2'}$, zu ∞; d. h. die $mn - i\varkappa$ nach Nr. 8 folgenden Punkte liegen alle endlich getrennt von $(x_1' = x_2' = 0)$. Der Factor $(i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades vor D' in (4) liefert nur $x_1' = x_2' = 0$ und keine zugehörige gemeinsame Wurzel x_3' von $f' = 0$, $\varphi' = 0$; wohl aber ein $(i\varkappa)$-faches Werthsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$. Man hat also:

Haben f_i' und $\varphi_\varkappa'$ in (2), Nr. 7 keinen Factor gemein, so fallen in $(x_1' = x_2' = 0)$ genau $i\varkappa$ Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$, während die übrigen Schnittpunkte alle von $(x_1' = x_2' = 0)$ endlich getrennt liegen und sich aus $D' = 0$ (Nr. 8) mit derselben Multiplicität ergeben, wie aus $D = 0$ (Nr. 4).

Wenn aber f_i' und $\varphi_\varkappa'$ einen Factor gemein haben, so variire man zunächst $\varphi_\varkappa'$ in $\varphi_\varkappa' + \eta \cdot \psi_\varkappa'$ derart, dass bei f_i' und $\varphi_\varkappa' + \eta\psi_\varkappa'$ dieses nicht mehr der Fall ist. Für die variirten Functionen gilt dann noch alles Vorhergehende; und α Schnittpunkte, die auch bei beliebig kleinem η von $(x_1' = x_2' = 0)$ *endlich* getrennt fallen, werden genau α lineare Factoren zu D' liefern, dagegen keinen zu dem vor D' stehenden Factor in Gleichung (4), Dies gilt also auch für $\eta = 0$:

In allen Fällen liefert ein von $(x_1' = x_2' = 0)$ endlich getrenntes Werthsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$ in D' einen Factor von derselben Multiplicität, wie in D; nur dass mehrere in D verschiedene Factoren mit den Exponenten $\alpha, \beta, \ldots$ in D' sich zu einem Factor mit dem Exponenten $\alpha + \beta + \cdots$ vereinigen könnten.

10.

Trennung der Multiplicität eines Schnittpunktes in mehrere Theile.

Es möge nun nach Nr. 4 für das gemeinsame Werthsystem $(x_1' = x_2' = 0)$ von $f = 0$, $\varphi = 0$ die Multiplicität μ folgen, d. h. D habe einen entsprechenden Factor $(m_1 x_1 + m_2 x_2)^\mu$. Die übrigen, von $x_1' = x_2' = 0$ *endlich* getrennten, Schnittpunkte haben also zusammen aus D, Nr. 4, und nach Nr. 9 auch aus D', Nr. 8, die Multiplicität $mn - \mu$. D' hat dann noch einen Factor vom Grade $(mn - i\varkappa) - (mn - \mu) = \mu - i\varkappa$, welcher sich auf Schnittpunkte bezieht, die *nicht* von $x_1' = x_2' = 0$ endlich getrennt liegen.

Somit hat man die μ dem Factor $(m_1 x_1 + m_2 x_2)^\mu$ von D zugehörigen Schnittpunkte *in verschiedene Theile* zu trennen. Für den ersten Theil, aus $i\varkappa$ Punkten bestehend, verschwindet der erste Factor $(i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades der rechten Seite der Gleichung (4), Nr. 9, wofür keine gemeinsame Wurzel x_3' von $f' = 0$, $\varphi' = 0$ auftritt. Der zweite Theil, aus $\mu - i\varkappa$ Punkten bestehend, entspricht einem Factor $(\mu - i\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades von D':

$$(6) \qquad (m_{11} x_1' + m_{12} x_2')^{\mu_1} \cdot (m_{21} x_1' + m_{22} x_2')^{\mu_2} \ldots,$$

wo

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots = \mu - i\varkappa,$$

zerfällt also weiter in Theile von $\mu_1, \mu_2, \cdots$ Schnittpunkten; und für jeden dieser Punkte hat, obwohl dafür $x_1' = x_2' = 0$ ist, doch $\frac{x_2'}{x_1'}$ ein *ganz bestimmtes, durch* (6) *geliefertes Verhältniss*, für welches f_i' und $\varphi_\varkappa'$ zugleich verschwinden, während $f' = 0$, $\varphi' = 0$ die gemeinsame Wurzel $\frac{x_3'}{x_1'} = \infty$ $\left(\text{und } \frac{x_3'}{x_2'} = \infty\right)$ haben.

Wir drücken diese Beziehung geometrisch kurz so aus: dass wir die ersten $i\varkappa$ Schnittpunkte als *in den Punkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *fallend* bezeichnen; dagegen die weiteren $\mu - i\varkappa$ als *in die Nähe des Punktes* $(x_1' = x_2' = 0)$ *fallend* oder *an den Punkt* $(x_1' = x_2' = 0)$ *herangerückt*, und zwar μ_1 derselben in der durch $m_{11} x_1' + m_{12} x_2' = 0$ gegebenen

Richtung, wenn D' in (6) den bezügl. Factor $(m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{\mu_1}$ hat; oder auch: *in dieser Richtung liegt ein Schnittpunkt von μ_1-facher Multiplicität dem $(i\varkappa)$-fachen Schnittpunkt $(x_1' = x_2' = 0)$ benachbart.*

Die Aufstellung von D' neben D hat somit den Erfolg, dass der $(x_1' = x_2' = 0)$ zugehörige Schnitt von μ-facher Multiplicität, welcher aus dem beliebig singulären i-elementigen Punkt von f und $\varkappa$-elementigen Punkt von φ resultirt, zerlegt worden ist:

1. in einen in $(x_1' = x_2' = 0)$ gelegenen Schnittpunkt von $i\varkappa$-facher Multiplicität;
2. in Schnittpunkte von bezügl. μ_1-, μ_2-, ... facher Multiplicität, welche in verschiedenen durch (6) gegebenen Richtungen liegen, für die zugleich f_i' und $\varphi_\varkappa'$ verschwinden; wo
$$i\varkappa + \mu_1 + \mu_2 + \cdots = \mu$$
wird.

Die folgenden Transformationsbetrachtungen lehren weitere Zerlegungen.

11.

Die specielle Resultante bei eindeutigen Transformationen.

Die Resultante D' lässt sich noch anders auffassen. Der Einfachheit halber sei hierbei, event. vermöge einer vorherigen Coordinatentransformation, angenommen, dass D' nicht den Factor x_1' und keinen Factor, für welchen $x_3' = 0$ wird, besitze. $(x_1' = x_2' = 0)$ sei als Punkt P bezeichnet.

Setzt man

(7) $$\frac{x_1'}{x_3'} = x, \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y,$$

und führt durch

(8) $$\eta = \frac{y}{x}$$

die Variable η an Stelle von y ein, so gehen f' und φ' über in
$$x_3'^m x^i \cdot F(x, \eta), \qquad x_3'^n x^\varkappa \Phi(x, \eta),$$
wo

(9) $$\begin{cases} F \equiv f_i'(1, \eta) + x f_{i+1}'(1, \eta) + \cdots + x^{m-i} f_m'(1, \eta), \\ \Phi \equiv \varphi_\varkappa'(1, \eta) + x\varphi_{\varkappa+1}'(1, \eta) + \cdots + x^{n-\varkappa} f_n'(1, \eta) \end{cases}$$

sind.

War nun

(10) $$f_i'(x_1', x_2') \equiv (m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{i_1'} (m_{21}x_1' + m_{22}x_2')^{i_2'} \cdots,$$

so hatte die Curve $f' = 0$ im Punkte P i_ϱ' in $m_{\varrho 1}x_1' + m_{\varrho 2}x_2' = 0$ fallende Elemente; und dementsprechend hat nach (9) die Curve $F(x, \eta) = 0$ in einem Punkte P_ϱ, der durch
$$x = 0, \quad m_{\varrho 1} + m_{\varrho 2}\eta = 0$$

gegeben ist, die Eigenschaft, daselbst mit $x = 0$ einen Punkt mit genau i_ϱ-facher Multiplicität gemein zu haben.

War ebenso

$$(10') \quad \varphi_\varkappa'(x_1', x_2') = (m_{11}x_1' + m_{12}x_2')^{\varkappa_1'} (m_{21}x_2' + m_{22}x_2')^{\varkappa_2'} \cdots,$$

so wird derselbe Punkt P_ϱ auch ein Schnittpunkt von genau $\varkappa_\varrho'$-facher Multiplicität für $x = 0$, $\Phi(x, \eta) = 0$. Dabei sind, wenn μ_ϱ in (6) > 0 war, zugleich i_ϱ' und $\varkappa_\varrho' > 0$, und umgekehrt.

Der Punkt P_ϱ selbst wird für $F = 0$ ein i_ϱ-elementiger, wo $i_\varrho \gtreqless i_\varrho'$, für $\Phi = 0$ ein $\varkappa_\varrho$-elementiger, wo $\varkappa_\varrho \leq \varkappa_\varrho'$.

Die durch Elimination von x aus (9) entstehende Resultante ist, nach Nr. 1, e), identisch mit

$$(11) \qquad D'(1, \eta),$$

wenn $D'(x_1', x_2')$ die Resultante aus (2), Nr. 7, war. Da nun nach der Annahme für keinen der Schnittpunkte, zu denen $D'(x_1', x_2')$ gehört, $x = \infty$ oder $\eta = \infty$ wird, so kann man sagen:

$D'(1, \eta)$ ist auch als Resultante der transformirten Formen F, Φ in (9) aufzufassen und liefert alle den Schnittpunkten von f', φ' entsprechende Schnittpunkte von F, Φ genau in derselben Multiplicität, wie $D'(x_1', x_2')$ jene. Insbesondere folgt die Multiplicität μ des Punktes P auch $= i\varkappa +$ den Multiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots$ der Punkte $P_1, P_2, \ldots$.

12.

Die Transformation (8) ist eine specielle quadratische und eindeutige. In dieser Hinsicht lässt sich nun die ganze Auffassung von Nr. 11 verallgemeinern.

So sei zunächst, unter der Voraussetzung, dass zwar der singuläre Schnittpunkt P von f', φ' in $(x_1' = x_2' = 0)$ falle, im Uebrigen aber keine weitere specielle Lage des Coordinatensystems gegen f', φ' stattfinde, die allgemeine eindeutige quadratische Ebenentransformation

$$(12) \quad \begin{cases} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_2'x_3' : x_3'x_1' : x_1'x_2', \\ x_1' : x_2' : x_3' = \xi_2\xi_3 : \xi_3\xi_1 : \xi_1\xi_2, \end{cases}$$

welche einen „Fundamentalpunkt“ in $(x_1' = x_2' = 0)$ hat, auf f', φ' angewandt, die hierdurch, bis auf einen Factor ξ_3^i, bez. $\xi_3^\varkappa$, übergehen in

$$(13) \begin{cases} F(\xi) \equiv (\xi_1\xi_2)^{m-i} f_i'(\xi_2, \xi_1) + (\xi_1\xi_2)^{m-i-1}\xi_3 f_{i+1}'(\xi_2, \xi_1) + \cdots + \xi_3^{m-i} f_m'(\xi_2, \xi_1), \\ \Phi(\xi) \equiv (\xi_1\xi_2)^{n-\varkappa}\varphi_\varkappa'(\xi_2, \xi_1) + (\xi_1\xi_2)^{n-\varkappa-1}\xi_3\varphi_{\varkappa+1}'(\xi_2, \xi_1) + \cdots + \xi_3^{n-\varkappa}\varphi_n'(\xi_2, \xi_1). \end{cases}$$

Es gelte (10) und (10'), Nr. 11. Dann erhält auch hier $F(\xi)$ im Punkte P_ϱ, der durch

$$\xi_3 = 0, \quad m_{\varrho 1}\xi_2 + m_{\varrho 2}\xi_1 = 0$$

gegeben ist, einen Schnittpunkt von i_ϱ'-facher Multiplicität mit $\xi_3 = 0$. Und ferner wird, sobald alle Functionen

$$f'_{i+h}(x_1', x_2'), \quad \text{für} \quad h = 0, 1, \cdots, (i_\varrho - 1),$$

den bez. Factor $(m_{\varrho 1} x_1' + m_{\varrho 2} x_2')^{i_\varrho - h}$ haben, der Punkt P_ϱ für $F(\xi)$ ein i_ϱ-elementiger ($i_\varrho \leqq i_\varrho'$); eine Eigenschaft, die also von den Constanten der quadratischen Transformation, wenn dieselbe nur in ($x_1' = x_2' = 0$) einen nicht speciellen Fundamentalpunkt hat, unabhängig ist.

Ferner wird P_ϱ für $\Phi(\xi) = 0$ und $\xi_3 = 0$ ein Schnittpunkt von $\varkappa_\varrho'$-facher Multiplicität; und P_ϱ wird ein $\varkappa_\varrho$-elementiger Punkt von $\Phi(\xi)$, wo $\varkappa_\varrho \leqq \varkappa_\varrho'$. Für keinen der Punkte P_ϱ wird $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$, nach der Annahme dieser Nummer 12.

In ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) erhält $F(\xi)$ einen m-fachen, $\Phi(\xi)$ einen n-fachen Punkt, deren Elemente durch

$$f'_m(\xi_2, \xi_1) = 0, \quad \text{bez.} \quad \varphi'_n(\xi_2, \xi_1) = 0$$

bestimmt sind; also nach der Annahme ohne Singularität und gemeinsame Elemente. In ($\xi_2 = \xi_3 = 0$) erhält $F(\xi)$ einen $(m - i)$-fachen Punkt mit den Elementen

$$\xi_2^{m-i} f_i'(0,1) + \xi_2^{m-i-1} \xi_3 f'_{i+1}(0,1) + \cdots + \xi_3^{m-i} f'_m(0,1) = 0,$$

entsprechend den $m - i$ den Curven $f' = 0$, $x_1' = 0$ ausserhalb P gemeinsamen Schnittpunkten, also nach der Annahme mit $m - i$ einfachen getrennten Elementen; ebenso $\Phi(\xi)$ $n - \varkappa$ solcher, die alle von den $m - i$ Elementen von $F(\xi)$ verschieden sind. Ebenso in ($\xi_1 = \xi_3 = 0$). Die Curven $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = 0$ treffen $F(\xi)$ oder $\Phi(\xi)$ nicht in weiteren Punkten.

Nun wird die durch *Elimination von* ξ_3 aus (13) entstehende Resultante nach Nr. 1 bis auf einen Factor, der eine Potenz von $\xi_1 \xi_2$ ist, zu

$$D'(\xi_2, \xi_1).$$

Man erhält daher für alle ausserhalb der drei Punkte

$$(\xi_1 = \xi_2 = 0), \quad (\xi_1 = \xi_3 = 0), \quad (\xi_2 = \xi_3 = 0)$$

gelegenen Schnittpunkte von $F = 0$, $\Phi = 0$ *genau dieselbe Multiplicität, wie sie durch* $D'(x_1', x_2')$ *für die entsprechenden Schnittpunkte von* $f' = 0$, $\varphi' = 0$ *geliefert wird; insbesondere für die Punkte* $P_1, P_2, \ldots$ *genau dieselben Zahlen* $\mu_1, \mu_2, \ldots$, *wie sie nach Nr.* 10 *für die entsprechenden dem Punkt P benachbarten Richtungen folgen.*

13.

Zerlegung der Multiplicität mittels der eindeutigen Transformationen.

Man kann nun die allgemeinen quadratischen Ebenentransformationen fortsetzen, indem man einen Fundamentalpunkt zunächst in P_ϱ legt und aus F, Φ zwei neue Curven F', Φ' ableitet, welche, P_ϱ entsprechend, $i_{\varrho 1}$-, $i_{\varrho 2}$-, $\cdots$, bez. $\varkappa_{\varrho 1}$-, $\varkappa_{\varrho 1}$-, $\cdots$ -elementige Punkte $P_{\varrho 1}$, $P_{\varrho 2}$, $\cdots$ erhalten werden, mit Schnittpunktmultiplicitäten $\mu_{\varrho 1}, \mu_{\varrho 2}, \cdots$. Die Multiplicität von P_ϱ wird dann

$$\mu_\varrho = i_\varrho \varkappa_\varrho + \mu_{\varrho 1} + \mu_{\varrho 2} + \cdots,$$

wonach sich also die von P weiter zerlegt. Diese Operationen, nach und nach auf die P_ϱ, die $P_{\varrho\sigma}, \cdots$ angewandt, werden sich wegen der Endlichkeit der zu P gehörigen Zahl μ nach einer endlichen Zahl von Operationen so schliessen, dass kein weiterer Schnittpunkt erhalten wird.

Wendet man aber eine Anzahl von solchen quadratischen Transformationen an, bei welchen der Punkt P, oder der diesem Punkte nach und nach entsprechende Punkt nur *ein* Mal als nicht specieller einfacher Fundamentalpunkt benutzt wird, so setzen sich dieselben zu einer eindeutigen höheren Ebenentransformation zusammen:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \psi^{(1)}(x') : \psi^{(2)}(x') : \psi^{(3)}(x'),$$

wobei der Punkt $P(x_1' = x_2' = 0)$ ein einfacher nicht specieller Fundamentalpunkt wird — in dem alle $\psi^{(h)}(x')$ einfach verschwinden, ohne gemeinsames Element, während auch die $\psi^{(h)}(x')$ keine weitere specielle Lage gegen diesen Punkt haben —. Auch bei dieser höheren Transformation entsprechen dann nach Nr. 12 dem Punkte P von f', φ' in den transformirten Curven F, Φ Punkte $P_1, P_2, \cdots$, für F bez. i_1-, i_2-, $\cdots$-elementig, für Φ bez. $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\cdots$-elementig, und von den bez. Schnittpunktmultiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \cdots$, Zahlen die *identisch* werden mit den aus (12) gefundenen. Wir können daher allgemeiner als in Nr. 12 sagen:

Unterwirft man f', φ' einer eindeutigen Ebenentransformation, welche den Punkt P, der i-, bez. $\varkappa$-elementiger Punkt von f', bez. φ', ist, zum einfachen Fundamentalpunkt hat, ohne dass eine weitere specielle Lage der Transformationscurven gegen f', φ' stattfindet, so wird die Nr. 10 *angegebene Multiplicität μ des Schnittpunktes P auch zu $i\varkappa$ + den Multiplicitäten $\mu_1, \mu_2, \cdots$ der Punkte $P_1, P_2, \cdots$, welche in den transformirten Curven den am Punkte P gelegenen Elementen entsprechen.**)

---

*) Der Satz gilt auch noch für einen nicht speciellen höheren Fundamentalpunkt in P; ferner auch für solche rationale Transformationen, welche nur mit Hülfe von $f' = 0$ rational umkehrbar werden. Das Letztere folgt am Einfachsten auch durch eine vorhergehende quadratische Transformation und eine Grenzbetrachtung. Wir bedürfen indess für das Folgende dieser Erweiterungen nicht.

III.

Das Schnittpunktsystem einer Curve und ihrer ersten Polare.

14.

Erste Zerlegung der Resultante.

14. Wir wenden jetzt die vorhergehenden Betrachtungen auf den Schnitt einer Curve m^{ter} Ordnung

(1) $$f \equiv f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

mit einer ersten Polaren

(2) $$f_c \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} c_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} c_3 = 0$$

an, zerlegen aber hierbei in Nr. 14—17 dieses ganze Schnittpunktsystem weiter *in zwei völlig getrennte Theile.*

Zunächst haben wir wieder vorauszusetzen: dass f und f_c keinen Factor gemein haben, d. h. da mit diesem von c unabhängigen Factor die drei Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x_h}$ verschwinden müssten: dass $f(x_1, x_2, x_3)$ keinen *Doppelfactor* besitze.

Nimmt man dann, um ein nicht specielles Coordinatensystem zu haben, eine Gleichung

(3) $$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$$

hinzu, wo A_1 und A_2 willkürlich gewählte lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, derart, dass für $A_1 = A_2 = 0$ die Functionen f und f_c nicht verschwinden, und eliminirt x_1, x_2, x_3 aus (1), (2), (3), so erhält man nach den vorhergehenden Nummern eine Resultante vom Grade $m(m-1)$ in λ_1, λ_2:

(4) $$D(\lambda_1, \lambda_2),$$

zu deren verschiedenen Factoren die von einander getrennten Schnittpunkte von $f = 0$, $f_c = 0$ in durch die Exponenten bezeichneter Multiplicität gehören, und aus deren Gesammtheit, oder irgend einem Theil $\Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ derselben, sich die zugehörigen Schnittpunkte durch rationale Ausdrücke

(5) $$\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_3(\lambda_1, \lambda_2), \\ \qquad \Delta(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

ergeben.

Die Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in (4) kann in zwei Factoren zerlegt werden, von denen der erste, D_0, von den c ganz unabhängig ist, während der zweite, D_c, keinen von den c unabhängigen Linearfactor enthält, also für nicht specielle c mit D_0 keinen Factor gemein hat. Diese Zerlegung kann in rationaler Weise geschehen, indem man in der Function $D(\lambda_1, \lambda_2)$, welche in Bezug auf die c rational, ganz und vom m^{ten} Grade ist, den gemeinsamen Factor D_0 der Coefficienten aller verschiedenen Producte der c sucht:

$$(6) \qquad D(\lambda_1, \lambda_2) \equiv D_0 \cdot D_c.$$

Dieser erste Factor D_0 bezieht sich nur auf die *mehrelementigen* Punkte von $f = 0$. Denn er gehört zu solchen Schnittpunkten von $f = 0$ mit $f_c = 0$, für welche zugleich jeder der drei Ausdrücke

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

zu Null werden. Für *jeden* mehrelementigen Punkt von $f = 0$ liefert D_0 *alle* Schnittpunkte mit $f_c = 0$, welche von den c unabhängig sind.

Specialisirt man jetzt c, nimmt man also etwa die Resultante R von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, so wird immer

$$R = D_0 \cdot R',$$

mit dem Factor D_0. Es handelt sich jetzt um die weitere Zerlegung von D_0.

15.

Weitere Zerlegung der Resultante durch Transformation.

Sei $(x_1 = x_2 = 0)$ ein i-elementiger $(i > 0)$ Punkt, P, von f:

$$(1') \quad f \equiv x_3^{m-i} f_i(x_1, x_2) + x_3^{m-i-1} f_{i+1}(x_1, x_2) + \cdots + f_m(x_1, x_2),$$

dann wird

$$(2') \qquad f_c \equiv x_3^{m-i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} c_2\right) + \cdots,$$

also $P(x_1 = x_2 = 0)$ für nicht specielle c ein $(i-1)$-elementiger Punkt von f_c.

Der auf diesen Schnittpunkt P bezügliche Factor von D, also von D_0, sei

$$(8) \qquad (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{\mu}.$$

Wendet man jetzt eine der im vorhergehenden Paragraphen II. behandelten eindeutigen Transformationen auf f und f_c an, mit einem gewöhnlichen Fundamentalpunkte in P, so erhält man die in Nr. 13 angegebene Zerlegung von μ in

$$i(i-1) + \mu_1 + \mu_2 + \cdots,$$

wo sich die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots$ auf die Punkte $P_1, P_2, \cdots$ beziehen, welche den P benachbarten Schnittpunkten von $f = 0$, $f_c = 0$ entsprechen. Jede dieser Zahlen μ_ϱ lässt sich nun wieder, wie nun gezeigt werden soll, der Zerlegung (6), Nr. 14, analog, in zwei Theile zerlegen. Es soll dies zuerst wieder an der speciellen Transformation von Nr. 11 ausgeführt werden.

Sei

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{y}{x} = \eta$$

gesetzt. So wird

$$f(x, y, 1) = x^i \cdot F(x, \eta),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^i \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^{i-1} \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

und μ_ϱ wird nach Nr. 11 oder Nr. 13 gleich der Multiplicität des Schnittpunktes P_ϱ von $F(x, \eta) = 0$ mit $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$.

Während nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Polare des Punktes $(c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0)$, also bei der nicht speciellen Lage des Coordinatensystems gegen f die Polare eines *nicht* speciell gelegenen Punktes darstellt, mithin für P aus $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ dieselbe Multiplicität μ folgt, wie aus (1) und (2), Nr. 14, bei willkürlichen c, so ist die Polare $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ die eines gegen F *speciell* gelegenen Punktes $(x : \eta : 1 = 0 : 1 : 0)$ geworden.

Die Multiplicität μ_ϱ des Schnittpunktes P_ϱ von $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ zerfällt daher in zwei Theile: in einen Theil ν_ϱ, den der Schnittpunkt von $F = 0$ mit *irgend* einer beliebigen Polaren von $F = 0$ besitzt; und einen Theil $\mu_\varrho - \nu_\varrho$, der weiter nur auf den Schnittpunkt mit der speciellen Polaren entfällt.

Dementsprechend zerlegt sich der Factor (8) von D_0 so:

$$(9) \qquad (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^\mu \equiv (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^{i(i-1)} \cdot \prod_\varrho (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^{\nu_\varrho} \cdot \prod_\varrho (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)^{\mu_\varrho - \nu_\varrho}.$$

Der zweite Factor von (9), auf den Schnitt von $F = 0$ mit einer allgemeinen Polaren von F bezüglich, zerlegt sich alsdann durch weitere Transformation in demselben Sinne, wie der Factor (8) selbst, der sich auf $f = 0$, $f_c = 0$ bezog. Man könnte noch zeigen, dass $\mu_\varrho - \nu_\varrho = i_\varrho' - i_\varrho$ wird, wenn i_ϱ' und i_ϱ die Bedeutung wie in Nr. 11 haben.

16.

Die Betrachtung der vorigen Nummer werde jetzt auf die quadratische Transformation von Nr. 12 (oder auch direct auf die allgemeine Transformation der Nr. 13) ausgedehnt. Diese Transformation ist von der Form

$$(10) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \psi^{(1)}(x) : \psi^{(2)}(x) : \psi^{(3)}(x),$$

wo $\psi^{(h)}(x)$ rationale Functionen gleicher Ordnung in den x, die für $(x_1 = x_2 = 0)$ in gleicher Ordnung verschwinden; mit der Umkehrung der Form

(11) $$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi^{(1)}(\xi) : \varphi^{(2)}(\xi) : \varphi^{(3)}(\xi),$$

wo

(11′) $$\varphi^{(1)}(\xi) = A(\xi) \cdot \varphi^{(1')}(\xi), \quad \varphi^{(2)}(\xi) = A(\xi) \cdot \varphi^{(2')}(\xi)$$

wird und mit den Annahmen der Nr. 13. Hiernach enthält die Determinante

(12) $$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi^{(2)}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi^{(3)}(\xi)}{\partial \xi_3}$$

den Factor $A(\xi)$ in der *ersten* Potenz:

(13) $$\Delta = A(\xi) \cdot \Delta'\cdot$$

und der weitere Factor Δ' verschwindet nicht mehr für beliebige, *nicht speciell* gewählte Werthsysteme ξ, für die $A(\xi) = 0$ ist, ebensowenig alle ersten Unterdeterminanten von Δ; also auch nicht für die Werthsysteme, die zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ gehören, die in der Transformation dem Punkte P entsprechen.

Vermöge $x_i = \varphi^{(i)}(\xi)$ wird nun

(14) $$f(x) \equiv M(\xi) \cdot F(\xi),$$

wo $M(\xi)$, dem i-elementigen Punkt P von f entsprechend, den Factor $A^i(\xi)$ erhält:

(15) $$M = A^i(\xi) \,.\, M',$$

während der weitere Factor M' für die Punkte $P_1, P_2, \ldots$ nicht mehr verschwindet. Man findet dann für $F(\xi) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = M \sum_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \xi_\varkappa} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial x_h},$$

ferner

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \varphi^{)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_3} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_2}\right),$$

etc., daher

(16) $$\sum_h c_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = -\frac{M}{\Delta} \cdot \Phi(\xi) \equiv - A^{i-1}(\xi) \frac{M'}{\Delta'} \sum_\varkappa C_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \xi_\varkappa}$$

wo

(16′) $$\Phi(\xi) \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F}{\partial \xi_2} & \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \\ c_1 & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi_3} \\ c_2 & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi_3} \\ c_3 & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

Mit Hülfe von $F(\xi)=0$ wird $\frac{M'}{\Delta'}\Phi(\xi)$ eine ganze Function der ξ.

Nach Nr. 13 wird die Multiplicität μ des Schnittpunkts P von $f=0$, $f_c=0$ zu $i(i-1)+\mu_1+\mu_2+\cdots$, wo sich μ_ϱ auf die Multiplicität des Schnittpunkts P_ϱ von $F=0$ mit $\frac{M'}{\Delta'}\Phi(\xi)=0$, also, da $\frac{M'}{\Delta'}$ für P_ϱ weder verschwindet, noch unendlich wird, mit $\Phi(\xi)=0$ bezieht. Unter den μ_ϱ Schnittpunkten von

$$\Phi(\xi)=\sum_\varkappa C_\varkappa \frac{\partial F}{\partial \xi_\varkappa}=0$$

mit $F(\xi)=0$ in P_ϱ sind aber wieder diejenigen enthalten, welche von allen $C_\varkappa$ unabhängig sind; für welche also auch zu gleicher Zeit

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \xi_2}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \xi_3}=0$$

und alle linearen Combinationen dieser 3 Grössen $=0$ werden. Diese seien ν_ϱ an Zahl. Diese ν_ϱ Schnittpunkte lassen sich definiren als diejenigen Schnittpunkte von $F(\xi)=0$ mit einer beliebigen Polaren

$$F_\gamma(\xi)=\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\gamma_1+\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\gamma_2+\frac{\partial F}{\partial \xi_3}\gamma_3=0, \tag{17}$$

welche von den Constanten γ unabhängig sind.

Wir erhalten daher hier dieselbe Art der Zerlegung von D_0, wie in Nr. 15.

17.

Zerlegung der Resultante in Doppel- und Verzweigungsfactor. Geschlecht der Curve.

Der durch die Transformation Nr. 15 oder Nr. 16 entstandene, P entsprechende Punkt P_ϱ von $F(\xi)=0$ möge ein i_ϱ-elementiger Punkt sein, wobei nach Nr. 12 und Nr. 13 die Zahl i_ϱ für jede unserer Transformationen die gleiche wird. Dasselbe gilt von den zu P_ϱ nach Nr. 16 gehörigen Zahlen μ_ϱ und ν_ϱ.

Setzt man die Transformationen in gleichem Sinne fort, so zerlegt sich die Zahl ν_ϱ in

$$\begin{aligned}&i_\varrho(i_\varrho-1)+\nu'_{\varrho 1}+\nu'_{\varrho 2}+\cdots\\ =&i_\varrho(i_\varrho-1)+\nu_{\varrho 1}+\nu_{\varrho 2}+\cdots+(\nu'_{\varrho 1}-\nu_{\varrho 1})+(\nu'_{\varrho 2}-\nu_{\varrho 2})+\cdots\end{aligned}$$

wo sich $\nu'_{\varrho\sigma}$ auf den Schnitt der Curven F' und Φ', die $F(\xi)=0$ und $F_\gamma(\xi)=0$ entsprechen, in einem, P_ϱ entsprechenden, Punkte $P_{\varrho\sigma}$ beziehen; und aus dieser Zahl sondern sich wieder diejenigen $\nu_{\varrho\sigma}$ Punkte aus, welche dem Schnitt von $F'=0$ mit einer beliebigen Polaren von $F'=0$ angehören. War dieser Punkt $P_{\varrho\sigma}$ ein $i_{\varrho\sigma}$-elementiger Punkt von $F(\xi)$, so wird also

$$\nu_{\varrho\sigma} = i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \nu'_{\varrho\sigma 1} + \nu'_{\varrho\sigma 2} + \cdots$$
$$= i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \nu_{\varrho\sigma 1} + \nu_{\varrho\sigma 2} + \cdots + (\nu'_{\varrho\sigma 1} - \nu_{\varrho\sigma 1}) + \cdots$$

Auf diese Weise zerlegt sich die dem Punkt P zugehörige Multiplicität μ von $f(x) = 0$, $f_c = 0$ auf eindeutige Weise in zwei Summanden

(18) $$\mu = M + N,$$

von denen

(19) $$M = i(i-1) + \sum_{\varrho} i_\varrho(i_\varrho - 1) + \sum_{\varrho,\sigma} i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \cdots,$$

wird, auf alle Zahlen i_ϱ, $i_{\varrho\sigma}$, ... bezüglich, welche zu den bei den successiven Transformationen dem Punkte P nach und nach entsprechenden mehr- (i_ϱ-, $i_{\varrho\sigma}$-, ...) elementigen Punkten gehören; während

$$N = \mu - M$$

immer noch eine positive ganze Zahl oder 0 wird.

Entsprechend zerlegt sich der Factor (8), Nr. 15, von D_0 in die zwei Factoren:

(20) $$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^\mu \equiv (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^M \,.\, (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N;$$

und, wenn sich das Productzeichen Π' auf alle von einander endlich getrennten mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ bezieht, D_0 selbst in die zwei Factoren

(21) $$D_0 \equiv \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^M \cdot \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N.$$

Da M eine gerade Zahl ist, so bezeichnen wir den ersten Factor als *Doppelfactor* T^2 *von* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ ((6), Nr. 14) und verbinden den zweiten Factor von D_0 mit D_c zu einem Factor V, den wir als *Verzweigungsfactor von* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ bezeichnen:

(22) $$D(\lambda_1, \lambda_2) = T^2 \,.\, V,$$

wo

(22') $$\begin{cases} T = \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{\frac{M}{2}}, \\ V = D_c \,.\, \Pi'(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^N. \end{cases}$$

Aus den angegebenen Zahlen M definiren wir noch eine Zahl

(23) $$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\Sigma' M,$$

wo sich das Summenzeichen Σ' ebenfalls auf die von einander endlich verschiedenen mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ bezieht, als *das Geschlecht* p *der Curve* m^{ter} *Ordnung*, $f(x) = 0$.

18.

Specialisirung der Resultante in die Discriminante.

Wegen des Zusammenhanges mit anderweitigen Untersuchungen sei hier Folgendes hinzugefügt. An Stelle der allgemeinen Resultante

$D(\lambda_1, \lambda_2)$ aus (1), (2), (3), Nr. 14, betrachtet man gewöhnlich nur diejenige, welche durch zwei Specialisirungen aus jener hervorgeht, und zwar

a) dadurch, dass man eine specielle Polare von f nimmt; etwa für $\frac{x_2}{x_1} = z$, $\frac{x_3}{x_1} = s$ die Polare $\frac{\partial f}{\partial s}$ von $f(1, z, s)$; also die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ des Punktes $(c_1 = c_2 = 0)$ von $f(x_1, x_2, x_3)$;

b) dadurch, dass man $\lambda_1 - z\lambda_2 = 0$ statt (3), Nr. 14, nimmt, also die durch Elimination von s aus $f(1, z, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ entstehende specielle Resultante in z, die sogen. „Discriminante nach s von f," aufstellt.

Die hierdurch entstehenden Modificationen sollen einzeln verfolgt werden.

a) Wenn der Punkt $(x_1 = x_2 = 0)$ von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (d. h. der Punkt $s = \infty$ von $f(1, z, s) = 0$) ein i-elementiger Punkt P $(i > 0)$ für die Curve m^{ter} Ordnung, $f = 0$, ist, so wird auch die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ in P sich specieller verhalten, als die allgemeine Polare. War (1'):

$$f \equiv x_3^{m-i} f_i(x_1, x_2) + \cdots + f_m,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (m-i)\, x_3^{m-i-1} f_i(x_1, x_2) + \cdots,$$

also erhält $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ den Punkt P zum i-elementigen, mit denselben durch $f_i(x_1, x_2) = 0$ gegebenen i Elementen, wie $f = 0$ selbst. Zu dem i-elementigen Punkt P von f mögen weiter, wie im Vorigen, die Zahlen i_ϱ, $i_{\varrho\sigma}$, ... gehören; so wird man aus der Resultante von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ zuerst wieder den Doppelfactor vom Grade

$$M = i(i-1) + \sum_\varrho i_\varrho(i_\varrho - 1) + \cdots,$$

(19), auf P bezüglich, abtrennen.

Vermöge einer Transformation

$$x_1 = \xi_2 \xi_3, \quad x_2 = \xi_3 \xi_1, \quad x_3 = \xi_1 \xi_2$$

wird nun, wie in (14), (16) von Nr. 16:

$$f(x) = \xi_3^{\,i} F(\xi),$$

und für $F(\xi) = 0$:

$$f_c \equiv \sum_h c_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = -\frac{\xi_3^{\,i-1}}{\xi_1 \xi_2}\left(c_1 \xi_1^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + c_2 \xi_2^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + c_3 \xi_3^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_3}\right),$$

und man hat, wie in Nr. 16, für $f = 0$, $f_c = 0$ in P im Ganzen $i(i-1)$ Schnittpunkte, $+$ der Zahl jener Schnittpunkte von

$$F=0, \quad c_1\xi_1^2\frac{\partial F}{\partial \xi_1}+c_2\xi_2^2\frac{\partial F}{\partial \xi_2}+c_3\xi_3^2\frac{\partial F}{\partial \xi_3}=0,$$

welche in die, P entsprechenden und auf $\xi_3=0$ gelegenen, Punkte $P_1, P_2, \ldots$ von $F=0$ fallen. Speciell für $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ hat man in P im Ganzen $i(i-1)$ Schnittpunkte, $+$ der Zahl der in $P_1, P_2, \ldots$ fallenden Schnittpunkte von

$$F=0, \quad \xi_3^2\frac{\partial F}{\partial \xi_3}=0.$$

Diese letzteren bestehen aber aus den in $P_1, P_2, \ldots$ fallenden $2i$ Schnittpunkten von

$$F=0, \quad \xi_3^2=0,$$

und aus in $P_1, P_2, \ldots$ liegenden Schnittpunkten von

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_3}=0.$$

Hiernach sondert sich hier von dem Verzweigungsfactor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$ für $c_1=c_2=0$ ein Factor vom Grade $2i$, auf P bezüglich, ab; ein Factor, der sich, da für ihn nicht $\frac{\partial F}{\partial \xi_3}=0$ wird, *nicht* auf Geraden durch $(x_1=x_2=0)$ bezieht, denen Tangenten an $F=0$, von $(\xi_2=\xi_1=0)$ aus, entsprächen; und man erhält

$$D(\lambda_1, \lambda_2)=T^2\cdot(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)^{2i}\cdot V',$$

wo V' aus V, (22′) Nr. 17, durch Einsetzen von $c_1=c_2=0$ und Abtrennen des Factors vom Grade $2i$ — und zwar eines Factors vom Grade $\sum_\varrho(\mu_\varrho-\nu_\varrho)$ aus $\Pi'(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)^N$, vom Grade $2i-\sum_\varrho(\mu_\varrho-\nu_\varrho)$ aus D_c — hervorgeht. Dieses V' ist hier an Stelle von V zu setzen.

b) Eliminirt man speciell x_3 aus $f(x_1, x_2, x_3)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ $\left(\text{d. h. } s \text{ aus } f(1, z, s)=0, \frac{\partial f}{\partial s}=0\right)$, und stellt die Discriminante $R(x_1, x_2)$ auf, so lässt sich diese nach Nr. 7—Nr. 10 direct auf $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in a), diese Nummer, zurückführen.

Hiernach enthält $R(x_1, x_2)$ für die von P endlich getrennt liegenden Schnittpunkte von $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ die entsprechenden Factoren in derselben Multiplicität, und ebenso gesondert, wie $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in a). Für den Punkt P dagegen, der i-elementiger Punkt sowohl von $f=0$, als von $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ ist, fällt ein Factor vom Grade $i\,.\,i$ ganz aus, und zwar aus T^2 der Factor vom Grade $i(i-1)$, aus dem zweiten Factor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$ noch $(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)^i$; und die übrigbleibenden, auf P bezüglichen Factoren zerlegen sich jetzt in weitere, je nach den verschiedenen getrennten Elementen von f in P. Wenn nämlich

$$f_i(x_1, x_2) = \prod_\varrho (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{i'_\varrho}, \quad \left(\sum_\varrho i'_\varrho = i\right),$$

$$R(x_1, x_2) = U^2 \cdot Q \cdot R',$$

wo U^2 der Doppelfactor, R' der aus V' sich ergebende Verzweigungsfactor ist; so tritt in U, auf P bezüglich, der Factor ein:

$$\prod_\varrho (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{\frac{M_\varrho}{2}},$$

wo

$$M_\varrho = i_\varrho(i_\varrho - 1) + \sum_\sigma i_{\varrho\sigma}(i_{\varrho\sigma} - 1) + \sum_{\sigma,\tau} i_{\varrho\sigma\tau}(i_{\varrho\sigma\tau} - 1) + \cdots,$$

$$\sum_\varrho M_\varrho = M - i(i-1);$$

Q wird zu

$$Q = \prod_\varrho (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{i'_\varrho} = f_i(x_1, x_2)$$

(wobei $s = \infty$ für $Q = 0$); und in R' tritt, auf P bezüglich, der Factor

$$\prod_\varrho (m_{\varrho 1} x_1 + m_{\varrho 2} x_2)^{N_\varrho},$$

wo, unter der Bezeichnung von Nr. 17:

$$N_\varrho = \sum_\varrho (\nu'_{\varrho\sigma} - \nu_{\varrho\sigma}) + \sum_{\sigma,\tau} (\nu'_{\varrho\sigma\tau} - \nu_{\varrho\sigma\tau}) + \cdots.$$

Dabei wird natürlich in R' noch ein weiterer Factor einem der auf P bezüglichen gleich werden, sobald dieses in speciellem Fall bei V' geschehen sollte.

R' ist von einem um $2i$ geringeren Grade, als V, (22′) Nr. 17, und zwar vom Grade

$$m(m-1) - \Sigma' M - 2i.$$

Man könnte, durch Einschieben von quadratischen Transformationen der Form Nr. 15, wie in jener Nummer zeigen, dass alle diejenigen eindeutigen Transformationen, welche z unverändert lassen — d. h. die Einführung von

$$s' = \psi(s, z),$$

wo ψ eine rationale Function, an Stelle von s — den Factor R' der Discriminante nicht ändern. Es ist dieses R' der „wesentliche Theiler" der Discriminante, nach dem von Herrn Kronecker früher gebrauchten Ausdruck*); U^2 der „ausserwesentliche Theiler". Setzt man

*) Vgl. das Citat der Einleitung.

$s = \frac{\sigma}{\tau}$ und betrachtet, wie es gewöhnlich geschieht, statt der obigen Resultante R von $f(1, z, s) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, die Resultante R'' von

$$\frac{\partial\left[\tau^{m-i} f\left(1, z, \frac{\sigma}{\tau}\right)\right]}{\partial \sigma} = 0, \qquad \frac{\partial\left[\tau^{m-i} f\left(1, z, \frac{\sigma}{\tau}\right)\right]}{\partial \tau} = 0,$$

so fällt der Factor $Q = f_i(1, z)$ heraus, und es wird, bis auf einen numerischen Factor,

$$R'' = U^2 \cdot R'.$$

IV.

Die zu einer Curve adjungirten Curven.

19.

Definitionen.

Im Vorhergehenden wurde aus einem i-elementigen Punkt P einer Curve $f = 0$ durch eindeutige Transformation eine Reihe P_1, P_2, ... von bez. i_1-, i_2- ... elementigen Punkten der transformirten Curve, den endlich verschiedenen Richtungen in P entsprechend, abgeleitet. Wir wollen diese Thatsache jetzt kurz so ausdrücken:

Die Curve $f = 0$ besitzt in P einen i-fachen Punkt und ferner eine Reihe von i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten, welche in endlich verschiedenen Richtungen an den i-fachen Punkt herangerückt sind.

Transformirt man nach dem Vorigen weiter, so zerlegt sich nach diesem Satze jeder der i_ϱ-elementigen Punkte wiederum in einen i_ϱ-fachen Punkt und eine Anzahl $i_{\varrho\sigma}$-elementiger Punkte, etc. und wir können zuletzt sagen:

Die Curve $f = 0$ besitzt nur (gewöhnliche) h_1-, h_2-, ... fache Punkte, welche auch zum Theil in bestimmten Richtungen zusammengerückt sein können.

Dieser Ausdruck findet insbesondere dann passende Anwendung, wenn man den Schnitt von $f = 0$ mit einer zweiten Curve $\varphi = 0$ betrachtet. Zerlegt man so auch alle mehrelementigen Punkte von $\varphi = 0$ in (gewöhnliche) mehrfache, so sagen die Sätze von Nr. 10 und Nr. 13 aus:

In dem Schnitte von $f = 0$ mit $\varphi = 0$ zählt jeder h-fache Punkt von $f = 0$, der h'-facher Punkt von $\varphi = 0$ ist, für einen Schnittpunkt von hh'-facher Multiplicität, gleichviel ob mehrere dieser Punkte zusammengerückt sind oder nicht.

In diesem Sinne schreibt sich dann der Doppelfactor T^2 der Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in (22) Nr. 17 und die dort definirte Zahl p (23):

$$(1)\qquad T^2 = \Pi_j (a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2)^{h_j(h_j-1)},$$

$$(2)\qquad p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \sum_j \frac{1}{2} h_j(h_j - 1),$$

wo sich die Product- und Summenzeichen, Π_j und Σ_j, auf *alle* (auch die einander benachbarten) mehrfachen (h_1-, h_2-, $\cdots$ fachen) Punkte von $f = 0$ bezieht.

Unter Zugrundelegung dieser Ausdrucksweise bezeichnen wir jetzt eine solche Curve, welche jeden h_j-fachen Punkt von $f = 0$ zum $(h_j - 1)$-fachen Punkt hat, als eine *zu f adjungirte Curve.*

20.

Die Bedingungen für die adjungirten Curven.

Es fragt sich, wie die Forderung des Adjungirtseins zu erfüllen ist, wenn mehrere der vielfachen Punkte zusammen einen singulären, i-elementigen Punkt P von $f = 0$ bilden.

Der Punkt P sei für $f = 0$ ein i-facher Punkt $+$ einer Reihe von in verschiedenen Richtungen an denselben herangerückten i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten; d. h. die erste eindeutige Transformation (Nr. 11, 12 oder 13) möge f überführen in F, mit i_1-, i_2-, ... elementigen getrennten Punkten P_1, P_2, ..., die P entsprechen.

Die zu bestimmende zu f adjungirte Curvenschaar n^{ter} Ordnung sei mit φ bezeichnet, eine ganze Function n^{ter} Dimension in den Coordinaten x_1, x_2, x_3. Dann soll die Curvenschaar $\varphi = 0$ 1) den Punkt P zum $(i - 1)$-fachen Punkt, 2) in den benachbarten i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten alle darin enthaltenen h-fachen Punkte zu $(h - 1)$-fachen Punkten haben. Nachdem die Forderung 1) erfüllt ist, sagt aber die 2) nach Nr. 19 nur aus, dass die Schaar $\Phi = 0$, welche aus $\varphi = 0$ durch die obige Transformation zugleich mit F aus f hervorgeht, irgend einen h-fachen Punkt, der in den i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten P_1, P_2, ... von $F = 0$ enthalten ist, zum $(h - 1)$-fachen Punkt besitzen soll; d. h. wieder, dass Φ in den Punkten P_1, P_2, ... sich wie eine „zu F adjungirte" Curve verhalten soll. Man hat daher:

Damit die Schaar von Curven n^{ter} Ordnung, $\varphi = 0$, sich in einem i-elementigen Punkte P von $f = 0$ wie „zu f adjungirte" Curven verhalte, ist nothwendig und genügend: 1) *dass die $\varphi = 0$ den Punkt P zum (gewöhnlichen) $(i - 1)$-fachen Punkt erhalten,* 2) *dass die Curvenschaar $\Phi = 0$, welche aus $\varphi = 0$ durch dieselbe eindeutige Transformation (Nr. 11—13) entsteht, die $f = 0$ in $F = 0$ überführt, in den i_1-, i_2-, ... elementigen Punkten P_1, P_2, ... von $F = 0$, die P entsprechen, sich wie „zu F adjungirte" Curven verhalte. Nachdem* 1), *sodann* 2) *erfüllt sind, ergiebt die Transformation von Φ auf φ den verlangten Ausdruck für die φ, soweit es den Punkt P von $f=0$ betrifft.*

Die Forderung 1) verlangt nur das Verschwinden aller $(i-2)^{\text{ter}}$ Differentialquotienten von φ für den Punkt P.

Da ferner, wie der vorhergehende Abschnitt lehrt, die dem Punkte P bei den successiven Transformationen entsprechenden Punkte in ihrer Singularität immer einfacher werden und nach einer *endlichen* Zahl von Operationen die Mehrfachheit der Punkte ganz verschwinden muss, so ist vermöge einer *endlichen* Zahl von Transformationen, auf alle singulären Punkte von $f=0$ angewandt, das Verhalten der φ völlig festgesetzt.

Insbesondere ergiebt Nr. 15, dass alle *Polaren* von f die Eigenschaft von zu f adjungirten Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben, aber darüber hinaus mit $f=0$ noch weitere in die mehrelementigen Punkte von $f=0$ fallende Schnittpunkte besitzen, als die allgemeinen zu f adjungirten Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Der Doppelfactor von $D(\lambda_1, \lambda_2)$, Nr. 17, bezieht sich gerade auf jenen Theil der Schnittpunkte, welcher nur durch die Eigenschaft des „Adjungirtseins" bestimmt ist.

V.

Rationale Ausführung der Operationen der Abschnitte III., IV.

21.

Hülfsmittel.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass *alle* in den vorhergehenden Abschnitten vorgenommenen Processe — die Trennung der Resultante D aus den Gleichungen einer Curve f und ihrer Polaren f_c in die beiden Theiler, die Bestimmung der Zahl p, die Herstellung der Gleichungen der zu f adjungirten Curven — in *rationaler* Weise, *ohne Auflösung irgend einer höheren als linearen Gleichung*, ausgeführt werden können, wenn nichts weiter gegeben ist, als die Gleichung

(1) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

der Curve m^{ter} Ordnung, f, wobei $f(x_1, x_2, x_3)$ eine rationale ganze homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3 mit gegebenen Coefficienten ist, die auch reducibel sein kann, aber keine Doppelfactoren enthalten soll.

Die hierbei fortwährend anzuwendende Operation ist diese:

Wenn ϱ getrennte Punkte durch rationale homogene Functionen

(2) $$x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_3(\lambda_1, \lambda_2),$$

(3) $$R(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

gegeben sind, wo die ϱ Factoren der ganzen Function $R(\lambda_1, \lambda_2)$ alle von einander verschieden sind, so sollen die Curven r^{ter} Ordnung bestimmt werden, welche jeden dieser ϱ Punkte zum $\varkappa$-fachen Punkte haben.

Diese Operation wird auf rationale Weise so ausgeführt:

Sei

$$(4) \qquad \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

die Gleichung einer Curve r^{ter} Ordnung mit unbestimmten Coefficienten. Es müssen dann nur alle $(\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von Φ nach den Variablen x_1, x_2, x_3, die allgemein mit

$$(5) \qquad \Phi^{(\varkappa-1)j}(x_1, x_2, x_3) \quad \left(\text{für } j = 1, 2, \ldots, \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}\right)$$

bezeichnet seien, für die ϱ Punkte verschwinden, d. h. alle

$$\Phi^{(\varkappa-1)j}(\psi_1(\lambda_1, \lambda_2), \psi_2(\lambda_1, \lambda_2), \psi_3(\lambda_1, \lambda_2))$$

müssen $R(\lambda_1, \lambda_2)$ aus (3) zum Factor haben:

$$(6) \qquad \Phi^{(\varkappa-1)j}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \equiv R(\lambda_1, \lambda_2) \cdot Q_j(\lambda_1, \lambda_2),$$
$$\left(j = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)\right)$$

wo die $Q_j(\lambda_1, \lambda_2)$ ebenfalls ganze Functionen von λ_1, λ_2 werden müssen. Setzt man aber in (6) die Q_j mit unbestimmten Coefficienten an, so liefert die Gleichsetzung der Coefficienten aller Potenzen der λ auf beiden Seiten jeder Gleichung von (6) ein System, aus welchem durch Elimination der Coefficienten von Q_j ein System von genau ϱ, in den Coefficienten von Φ linearen und homogenen, Gleichungen hervorgeht — ein System, das man auch erhält, indem man $\Phi^{(\varkappa-1)j}$ durch R theilt und den Rest identisch für alle λ verschwinden lässt. Aus allen Gleichungen (6) ergiebt sich so ein System von $\varrho \cdot \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}$, für die Coefficienten von Φ linearen und homogenen Gleichungen, in welche die in (2) und (3) gegebenen Zahlen nur ganz und rational eingehen. Dieselben stellen *höchstens* $\varrho \cdot \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}$ von einander unabhängige lineare Bedingungen für die Coefficienten von (4) dar, in deren Erfüllung die verlangte Operation besteht.

22.

Eindeutige Transformationen.

Das wesentlichste Mittel bei den Processen der vorhergehenden Abschnitte waren eindeutige Transformationen einer Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

welche einen singulären Punkt von f als einfachen, nicht speciellen

Fundamentalpunkt benutzten. Dem Zwecke dieses Abschnittes gemäss sind jetzt solche eindeutige Transformationen von $f=0$ vorzunehmen, welche gleichzeitig eine ganze *Gruppe* von ϱ, rational in der Form (2), (3) der Nr. 21 gegebenen, getrennten Punkten von f als einfache, nicht specielle Fundamentalpunkte benutzen.

Statt der allgemeinsten, nur mit Hülfe von $f=0$ eindeutig umkehrbaren Transformation ist es genügend, eine aus quadratischen Ebenentransformationen zusammensetzbare Transformation anzuwenden, insbesondere etwa die durch Curven s^{ter} Ordnung mit $(s-1)$-fachem gemeinsamem Punkte, wenn man nur s genügend hoch wählt. Sei nämlich etwa $(x_1=x_2=0)$ ein gegen f nicht speciell gelegener Punkt; so ist

$$(7)\qquad \xi_1:\xi_2:\xi_3=x_1\cdot S_{s-1}:x_2\cdot S_{s-1}:S_s,$$

wo

$$(7')\qquad \begin{cases} S_{s-1}=x_3\,U_{s-2}(x_1,x_2)+U_{s-1}(x_1,x_2),\\ S_s\;\;\;=x_3\,V_{s-1}(x_1,x_2)+V_s\;\;(x_1,x_2),\end{cases}$$

und U_h, V_h ganze Functionen h^{ter} Ordnung bedeuten, eine solche Transformation, mit der Umkehrung

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1:x_2:x_3=\xi_1\,\Sigma_{s-1}:\xi_2\,\Sigma_{s-1}:\Sigma_s,\\ \qquad\Sigma_{s-1}=\xi_3\,U_{s-2}(\xi_1,\xi_2)-V_{s-1}(\xi_1,\xi_2),\\ \qquad\quad\Sigma_s=-\xi_3\,U_{s-1}(\xi_1,\xi_2)+V_s(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

Man bestimme nun nach Nr. 21 die Functionen S_{s-1} und S_s derart, dass dieselben für die ϱ Punkte (2), (3) je einfach verschwinden, während alle übrigen Schnittpunkte von $S_{s-1}=0$, $S_s=0$ von diesen ϱ Punkten getrennt liegen. Man wird dabei s so gross annehmen, dass auch keines der Elemente von $f=0$ in einem solchen i-elementigen Punkte P mit der Richtung von S_{s-1} oder mit der Richtung der Geraden durch P und den Punkt $(x_1=x_2=0)$ zusammenfällt. Dadurch wird bewirkt, dass in der transformirten Curve $F(\xi)=0$ die P entsprechenden i_1-, i_2-, ... elementigen Punkte $P_1, P_2, \ldots$, die auf eine Gerade durch $(\xi_1=\xi_2=0)$ fallen, alle von einander, von dem Schnittpunkte der Geraden mit $\Sigma_{s-1}=0$ und vom Punkt $(\xi_1=\xi_2=0)$ endlich getrennt liegen.

Man kann ferner s genügend gross und den Punkt $(x_1=x_2=0)$ genügend willkürlich wählen, dass alle Schnittpunkte von f mit S_{s-1} und mit den Geraden, die durch $(x_1=x_2=0)$ und die Schnittpunkte von S_{s-1} und S_s gehen, ausgenommen die in die obigen ϱ Punkte fallenden, von einander getrennte einfache Schnittpunkte werden. Dann werden entsprechend die in den Fundamentalpunkten, den Schnittpunkten von Σ_{s-1} und Σ_s, neu entstehenden vielelementigen Punkte von $F(\xi)=0$ gewöhnliche *vielfache* Punkte, ohne jede Singularität und von direct angebbarer Vielfachheit; so der einfache Schnittpunkt von Σ_{s-1} mit der oben bezeichneten Geraden durch P_1, P_2, ... ein $(m-i)$- facher für $F(\xi)=0$, wenn f von der m^{ten} Ordnung ist.

Diese Transformationen führen keinerlei Irrationalität ein.

Zugleich sieht man, dass, wenn eine Gruppe von Punkten auf $f(x)=0$ rational von den übrigen Punkten getrennt ist, dasselbe auch für die entsprechende Gruppe von $F(\xi)=0$ eintritt; und umgekehrt. Denn man erhält für die Gruppe (2), (3), Nr. 21 durch Elimination von $\lambda_1:\lambda_2$ aus

$$(9)\qquad R(\lambda_1,\lambda_2)=0,\quad x_1\psi_2(\lambda_1,\lambda_2)-x_2\psi_1(\lambda_1,\lambda_2)=0$$

eine Resultante

$$(10)\qquad S(x_1,x_2)=0$$

in $x_1:x_2$; und hat zugleich, nach Nr. 6, $\frac{x_3}{x_1}$ als rationale Function von $\frac{x_2}{x_1}$. Für die transformirte Gruppe wird also

$$(11)\qquad S(\xi_1,\xi_2)=0,$$

und diese Gleichung liefert in Verbindung mit $F(\xi)=0$

a) die den ϱ Punkten entsprechenden Punkte von F, wobei Σ_{s-1} nicht $=0$;

b) Punkte von F, für welche $\Sigma_{s-1}=0$ ist.

Bildet man daher durch Elimination von $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ die Resultanten

$$T(\lambda_1',\lambda_2')\quad\text{aus}\quad F(\xi)=0,\quad S(\xi_1,\xi_2)=0,\quad \mathsf{A}_1\lambda_1'+\mathsf{A}_2\lambda_2'=0;$$
$$U(\lambda_1',\lambda_2')\quad\text{aus}\quad F(\xi)=0,\quad \Sigma_{s-1}(\xi)=0,\quad \mathsf{A}_1\lambda_1'+\mathsf{A}_2\lambda_2'=0,$$

wo A_1, A_2 allgemeine lineare Functionen der ξ sind; lässt T' und U' bez. aus T und U dadurch hervorgehen, dass man jeden Factor nur in der *ersten* Potenz nimmt, und bestimmt endlich den gemeinsamen Factor V von T' und U', so liefert

$$(12)\qquad P(\lambda_1',\lambda_2')\equiv\frac{T'(\lambda_1',\lambda_2')}{V(\lambda_1',\lambda_2')}=0$$

die gesuchten Punkte a), von allen übrigen getrennt, indem sich dazu $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ nach Nr. 6 als rationale Functionen von $\lambda_1':\lambda_2'$ ergeben.

Ist umgekehrt ein rationaler Factor P' von P bekannt, sowie

$$(13)\qquad \xi_1:\xi_2:\xi_3=\chi_1:\chi_2:\chi_3,$$

wo die χ ganze Functionen von λ_1', λ_2', so folgt aus

$$(14)\qquad P'(\lambda_1',\lambda_2')=0,\quad \xi_1\chi_2-\xi_2\chi_1=0$$

durch Elimination von $\lambda_1':\lambda_2'$ eine Resultante

$$(15)\qquad S'(\xi_1,\xi_2)\equiv S_1^{\,1}\cdot S_2^{\,2}\cdot S_3^{\,3}\cdots S_\varkappa^{\,\varkappa},$$

wo die linearen Factoren jedes S_h unter sich und von denen der übrigen $S_{h'}$ alle verschieden sind; und wo ferner die einzelnen Factoren

$S_1, S_2, S_3, \ldots$ von S' sich ohne Einführung von Irrationalitäten ergeben, indem man nur nacheinander die grössten gemeinsamen Divisoren

$$S^{(1)} \quad \text{von} \quad S' \quad \text{und} \quad \frac{\partial S'}{\partial \xi_1};$$

$$S^{(2)} \quad \text{von} \quad S^{(1)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi_1}; \text{ etc.}$$

sucht, deren letzter $S_\varkappa$ wird; oder indem man sogleich den grössten gemeinsamen Divisor $S_\varkappa$ von S' und den $(\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von S' sucht; hierauf $S_{\varkappa-1}$ aus $S_{\varkappa-1} S_\varkappa^2$; etc.

Dann wird

$$(16) \qquad S''(x_1, x_2) = S_1(x_1, x_2) \cdot S_2(x_1, x_2) \cdots S_\varkappa(x_1, x_2)$$

rationaler Factor von $S(x_1, x_2)$; ebenso jedes $S_h(x_1, x_2)$. Da hierzu nach dem Obigen auch $\frac{x_3}{x_1}$ als rationale Function von $\frac{x_2}{x_1}$ bekannt ist, so liefert endlich, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ mit den x durch $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$ zusammenhing,

$$(17) \qquad S_h(x_1, x_2) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$$

durch Elimination von $x_1 : x_2$ einen rationalen Factor

$$(18) \qquad R_h'(x_1, x_2)$$

von $R(x_1, x_2)$, entsprechend $S_h(\xi_1, \xi_2)$ oder einem Theile von $P'(\lambda_1', \lambda_2')$.

Eine kleine Vereinfachung würde noch dadurch erzielt, dass man den Punkt $(A_1 = A_2 = 0)$ ursprünglich mit $(x_1 = x_2 = 0)$ zusammenfallen liesse.

23.

Erste rationale Zerfällung der Resultante.

Wir betrachten nun die *rationale Zerlegung der Resultante* $D(\lambda_1, \lambda_2)$ (aus (4), Nr. 14) von

$$(19) \qquad f(x) = 0, \quad f_c(x) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0.$$

Die erste Zerlegung ist die durch (6), Nr. 14, gegebene, welche den von den Grössen c abhängigen Theil D_c in rationaler Weise ausscheidet. Der Rest D_0 bezieht sich nur noch auf die mehrelementigen Punkte von

$$f(x) = 0;$$

und es sei

$$(20) \qquad D_0 = D_2^2 \cdot D_3^3 \cdot D_4^4 \cdots D_r^r,$$

wo die linearen Factoren jedes D_μ alle unter sich und von denen aller übrigen D_ν verschieden sind. Diese Zerlegung von D_0 in die Factoren D_2^2, $D_3^3, \ldots$ geschieht ebenfalls ohne Einführung von Irrationalitäten, wie in Nr. 22 bei S'.

Man betrachte hieraus D_μ^μ, wo D_μ von einem Grade μ_0 sei. Dieser Factor gehört dann zu μ_0 Punkten von $f(x) = 0$, deren jeder ein Schnittpunkt von μ-facher Multiplicität von $f = 0$, $f_c = 0$ ist.

Dieses D_μ zerlege man nun *nach den Graden der Vielfachheit* der μ_0 Punkte. Man betrachte nämlich auch der Reihe nach die Resultanten aus

$$(21) \qquad f(x) = 0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0, \quad f_{c^h} = 0$$
$$(\text{für } h = 2, 3, \ldots, (\varkappa - 1))$$

wo f_{c^h} die allgemeine h^{te} Polare von f, und wo

$$(\varkappa - 1)\varkappa \leqq \mu$$

zu nehmen ist, weil ein Punkt, in welchem alle h^{ten} (und nicht alle $(h+1)^{\text{ten}}$) Polaren verschwinden, ein $(h+1)$-elementiger Punkt, mit wenigstens $(h+1)h$-facher Multiplicität für $f = 0$, $f_c = 0$ ist. Der von den c unabhängige Factor dieser Resultante sei bezügl. mit $R^{(h+1)}$ bezeichnet (also $R^{(2)} \equiv D_0$).

Hierauf sind der Reihe nach die gemeinsamen Factoren

$$(22) \qquad \Delta_\mu^{(\varkappa)};\ \Delta_\mu^{(\varkappa-1)};\ \cdots;\ \Delta_\mu^{(3)};\ \Delta_\mu^{(2)}$$

bezüglich von

$$D_\mu \text{ und } R^{(\varkappa)}; \quad \frac{D_\mu}{\Delta_\mu^{(\varkappa)}} \text{ und } R^{(\varkappa-1)}; \cdots; \frac{D_\mu}{\Delta_\mu^{(\varkappa)} \cdot \Delta_\mu^{(\varkappa-1)} \cdots \Delta_\mu^{(3)}} \text{ und } R^{(2)}$$

zu bilden. *Man hat dann die rationale Zerlegung*

$$(23) \qquad D_\mu = \Delta_\mu^{(\varkappa)} \cdot \Delta_\mu^{(\varkappa-1)} \cdots \Delta_\mu^{(2)};$$

und hierbei gehört $\Delta_\mu^{(i)}$ nur zu solchen von einander getrennten Punkten, welche genau i-elementige Punkte von $f(x) = 0$ sind.

Es giebt einen noch einfacheren Weg zu dieser Zerlegung von $D_\mu(\lambda_1, \lambda_2)$. Da $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$, so verbinde man die beiden Curven

$$(24) \qquad f(x) = 0, \quad D_\mu(-A_2, A_1) = 0,$$

indem man zunächst allgemeine lineare Functionen x_1', x_2', x_3' an Stelle der x_1, x_2, x_3 einführt und x_3' eliminirt. So ergebe sich als Resultante

$$(25) \qquad L(x_1', x_2') \equiv L_1{}^1 \cdot L_2{}^2 \ldots L_\varkappa^\varkappa,$$

wo die linearen Factoren eines L_i unter sich und von denen der übrigen L_i alle verschieden sind. Dann gehört L_i gerade zu den i-elementigen Punkten von $f(x) = 0$, für welche $D_\mu = 0$ ist. Specialisirt man nun die Substitutionscoefficienten in den Ausdrücken der x' durch die x derart, dass $x_1' = -A_2$, $x_2' = A_1$ wird, so verschwindet der so aus $L(x_1', x_2')$ entstehende Ausdruck nicht identisch, weil $(A_1 = A_2 = 0)$ kein Punkt von $f(x) = 0$ ist; und die Ausdrücke

$$L_2, L_3, \cdots, L_\varkappa$$

gehen also bezüglich in

$$\Delta_\mu^{(2)},\ \Delta_\mu^{(3)},\ \cdots,\ \Delta_\mu^{(\varkappa)}$$

von (22) über.

Sei $\Delta_\mu^{(i)}$ vom Grade $\mu^{(i)}$, so hat man durch

$$\Delta_\mu^{(i)} = 0 \tag{26}$$

$\mu^{(i)}$ von einander getrennt liegende, i-elementige Punkte von $f(x)=0$, welchen der Factor

$$(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$$

von D_0 entspricht, von den übrigen mehrelementigen Punkten von $f(x)=0$ rational abgesondert.

24.

Rationale Bestimmung des Doppelfactors der Resultante.

Von dem Factor $(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$ sondert sich, nach Nr. 17, zunächst

$$(\Delta_\mu^{(i)})^{i(i-1)} \tag{27}$$

für den „Doppelfactor" von D ab. Für $\mu = i(i-1)$ ist die Zerlegung hiermit abgeschlossen; andernfalls geschieht die weitere Zerlegung durch eindeutige Transformation von f. Nach Nr. 6 werden die Coordinaten der entsprechenden $\mu^{(i)}$ Punkte von $f(x)=0$ rationale Functionen von $\lambda_1 : \lambda_2$:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \psi(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2 : \psi_3 \cdots \tag{28}$$

wo

$$\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{29}$$

und man kann daher nach Nr. 22 eine Transformation der dortigen Art, welche diese $\mu^{(i)}$ Punkte als einfache Fundamentalpunkte benutzt, in rationaler Weise ausführen. Durch diese Transformation gehe $f(x)=0$ in $F(\xi)=0$ über.

Für diese Curve $F(\xi)=0$ stellt sich alsdann dieselbe Aufgabe, wie sie in Nr. 23 für $f(x)=0$ behandelt worden ist. Nur genügt es hier, um die *Vielfachheit* der den $\mu^{(i)}$ Punkten entsprechenden Punkte, die allein in dem Doppelfactor von D benutzt wird, zu bestimmen, den zweiten einfacheren Weg von Nr. 23 einzuschlagen, ohne auch nur die Polare von $F(\xi)$ aufzustellen; denn diese Punkte sind ohnedies durch die Transformation bekannt.

Dies geschieht nach den letzten Betrachtungen der Nr. 22, indem man nur daselbst $\Delta_\mu^{(i)}$ an Stelle von R (9) zu setzen hat. Die dort aufgestellten Gleichungen (13), (14):

$$\begin{cases} P(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_3(\lambda_1', \lambda_2'), \end{cases} \tag{30}$$

wo

(31) $$\mathsf{A}_1\lambda_1' + \mathsf{A}_2\lambda_2' = 0,$$

liefern alle Punkte von $F(\xi)=0$, welche den $\mu^{(i)}$ Punkten von $f(x)=0$ durch die Transformation entsprechen, und zwar jeden einfach, da die Factoren von $P(\lambda_1', \lambda_2')$ alle von einander verschieden sind. Um die Vielfachheit dieser Punkte zu bestimmen, wird man daher nach Nr. 23 ((24) etc.) in die Gleichungen

$$F(\xi)=0\,,\quad P(-\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1)=0$$

allgemeine lineare Functionen ξ_1', ξ_2', ξ_3' an Stelle von ξ_1, ξ_2, ξ_3 einführen und ξ_3' eliminiren, wonach sich, wie dort,

(32) $$L(\xi_1', \xi_2') \equiv L_1^{\,1}\cdot L_2^{\,2}\cdots L_\varkappa^{\varkappa}$$

ergebe. Dann liefert

(33) $$L_j(\xi_1', \xi_2')=0$$

nur j-elementige Punkte; und L_j ergiebt, nach Nr. 23, durch Specialisirung einen Factor

(34) $$P_j(\lambda_1', \lambda_2')$$

von $P(\lambda_1', \lambda_2')$.

Aus

(35) $$P_j(\lambda_1', \lambda_2')=0,\quad \xi_1\chi_2-\xi_2\chi_1=0$$

folgt hierauf eine Resultante

(36) $$S_j(\xi_1, \xi_2) \equiv S_{1j}^{1}\cdot S_{2j}^{2}\cdot S_{3j}^{3}\cdots;$$

dann liefert endlich (Nr. 22, (17), (18))

(37) $$S_{hj}(x_1, x_2)=0,\quad A_1\lambda_1+A_2\lambda_2=0$$

nach Einsetzen von $\frac{x_3}{x_1}$ und Elimination von $\frac{x_2}{x_1}$ einen rationalen Factor

(38) $$\Delta_\mu^{(ijh)}(\lambda_1, \lambda_2)$$

von $\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2)$)

In diesen Ausdrücken drückt der Grad von $P(\lambda_1, \lambda_2)$, dem der Grad des Productes $L_1\cdot L_2\cdots L_\varkappa$ gleich ist, die Anzahl der den $\mu^{(i)}$ Punkten von $f(x)=0$ überhaupt entsprechenden getrennten Punkte von $F(\xi)=0$ aus. Der Grad von L_j, dem der von P_j und der von S_j gleich wird, stellt die Zahl der darunter befindlichen j-elementigen Punkte vor. Die Potenz h des Factors S_{hj}^{h} von S_j bedeutet, dass h verschiedenen dieser Punkte, welche durch einen linearen Factor von S_{hj} gegeben sind, ein und derselbe Punkt von $f(x)=0$, oder vielmehr h diesem in verschiedenen Richtungen benachbart gelegene Punkte von $f(x)=0$, entsprechen. Dem Grade von S_{hj} wird der von

$\Delta_\mu^{(ij_h)}$ gleich. Nach Nr. 17 sondert sich von dem Factor $(\Delta_\mu^{(i)})^\mu$ für den *Doppelfactor* von D, ausser dem am Anfang dieser Nr. bezeichneten $(\Delta_\mu^{(i)})^{i(i-1)}$ noch, von S_{hj}^h herrührend, in rationaler Weise ab:

$$(39) \qquad \left(\Delta_\mu^{(ij_h)}\right)^{h.j(j-1)}.$$

Solches ist für alle h, dann für alle j, für alle i, endlich für alle μ auszuführen, wobei für j, i, μ nur die Zahlen $\geqq 2$ betrachtet zu werden brauchen.

Der weitere Gang der Zerlegung ist klar: Es werden die durch ((30), (35))

$$(40) \qquad P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3$$

gegebenen j-elementigen Punkte von $F(\xi) = 0$ als Fundamentalpunkte einer Transformation der Art Nr. 22 benutzt, und hierdurch, auf dem in dieser Nummer für $\Delta_\mu^{(i)}$ eingeschlagenen Wege, jetzt von $S_{hj}(\xi_1, \xi_2)$, (36), ein rationaler Factor abgesondert, und dementsprechend ein solcher auch von $\Delta_\mu^{(ij_h)}(\lambda_1, \lambda_2)$, (38), wobei sich im Laufe der Transformation wieder die Potenz, in welcher dieser Factor in den Doppelfactor von D eingeht, von selbst ergiebt.

Eine kleine Modification dieses Verfahrens besteht darin, dass man gleichzeitig *mehrere*, rational von einander gesonderte, Punktgruppen der zu transformirenden Curve, oder auch *alle* mehrelementigen Punkte derselben, als einfache Fundamentalpunkte einer und derselben eindeutigen Transformation der Art Nr. 22 nimmt.

25.

Rationale Bestimmung der Geschlechtszahl.

Aus dem Grade $\Sigma' M$ des Doppelfactors von D und der Zahl m bestimmt sich nach Nr. 17, (23) oder Nr. 19, (2) *die Zahl* p durch die Formel

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\Sigma' M.$$

Da es sich hierbei aber nur um den *Grad*, nicht um die wirkliche *Aufstellung* des Doppelfactors von D, handelt, so genügt zur Bestimmung der Zahl p schon ein Theil der in Nr. 23 und 24 geforderten Operationen.

Hiernach ergeben zum Grade $\Sigma' M$ des Doppelfactors die $\mu^{(i)}$ durch $\Delta_\mu^{(i)} = 0$, (26) Nr. 23 gegebenen, i-elementigen Punkte von $f(x) = 0$ zunächst den Beitrag

$$\mu^{(i)} \cdot i(i-1);$$

sodann ergeben, wenn L_j oder P_j (Nr. 24, (33), (34)) vom Grade $i^{(j)}$

wird, die den $\mu^{(i)}$ Punkten auf $F(\xi) = 0$ entsprechenden, bez. durch $L_j(\xi_1', \xi_2') = 0$ oder $P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0$ gegebenen j-elementigen Punkte $(j = 2, 3, \ldots, \varkappa)$ zu $\Sigma' M$ den weiteren Beitrag:

$$\sum_{j=2}^{j=\varkappa} i^{(j)} \cdot j(j-1).$$

Zur Aufstellung dieser Zahl hat man also nur bis zur Bestimmung der mehrelementigen Punkte von $F(\xi) = 0$ zu gehen, d. h. zu den Gleichungen (30), (35), Nr. 24:

$$(40) \qquad P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3,$$

und gerade so weit nach Nr. 24 zur weiteren Transformation von $F(\xi) = 0$; daher fällt hier die weitere Beziehung auf $f(x) = 0$ in Nr. 24, (36)—(38), weg.

Es folgt mittels Transformation von $F(\xi) = 0$ die Bestimmung des Beitrags zu $\Sigma' M$, welche von den, den $i^{(j)}$ j-elementigen Punkten entsprechenden Punkten der transformirten Curve herrührt; etc.

26.

Rationale Bestimmung der adjungirten Curven.

Auch für die *rationale Aufstellung der Gleichungen der zu $f(x) = 0$ adjungirten Curven* gilt die in Nr. 25 für die Zahl p gemachte Bemerkung: man hat in Nr. 24 wiederum nur bis zu den Gleichungen (40) Nr. 25, zu gehen.

Die hierzu auszuführenden Operationen ergeben sich aus dem Satze der Nr. 20. Man ertheilt den zu bestimmenden Curven n^{ter} Ordnung, $\varphi(x) = 0$, zunächst unbestimmte Coefficienten und schreibt den Curven alsdann vor, die durch ((28), (29), Nr. 24)

$$\Delta_\mu^{(i)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2) : \psi_2 : \psi_3$$

gegebene Gruppe von $\mu^{(i)}$ i-elementigen Punkten von $f(x) = 0$ zu (gewöhnlichen) $(i-1)$-fachen Punkten zu haben (Nr. 21); die diesen Bedingungen genügenden Curven $\varphi(x) = 0$ werden hierauf durch die Transformation von Nr. 24 in Curven $\Phi(\xi) = 0$ übergeführt, und den $\Phi(\xi) = 0$ wird weiter vorgeschrieben, die durch ((30), (35), Nr. 24)

$$P_j(\lambda_1', \lambda_2') = 0, \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \chi_1(\lambda_1', \lambda_2') : \chi_2 : \chi_3$$
$$(j = 2, 3, \ldots, \varkappa)$$

gegebenen Punkte von $F(x) = 0$ zu vielfachen, die $i^{(i)}$ j-elementigen bez. zu $(j-1)$-fachen, Punkten zu haben; und nach Erfüllung dieser Bedingungen ist Analoges weiter bei den weiteren Transformationen von $F(\xi) = 0$, $\Phi(\xi) = 0$ auszuführen. Die sämmtlichen Transformationen in ihren Umkehrungen angewandt, liefern dann die gesuchten

$\varphi(x)$, soweit es den Factor $\Delta_\mu^{(i)}$ von D betrifft; wonach solches noch für *alle* i und μ zu geschehen hat.

Die hier für die adjungirten Curven $\varphi(x) = 0$ aufgestellten Bedingungen liefern im Ganzen

$$\frac{1}{2}\,\Sigma' M \equiv \frac{1}{2}\,\Sigma_j h_j (h_j - 1)$$

lineare homogene Gleichungen für die Coefficienten von $\varphi(x)$, wo die Zeichen dieselben sind, welche in die p-Formel, Nr. 17, (23) und Nr. 19, (2) eingehen. In wie weit diese linearen Gleichungen von einander unabhängig sind, und wie die Behandlung der Aufgabe dieser Nummer überhaupt bedeutend modificirt und vereinfacht werden kann, darüber vergl. den folgenden Abschnitt, Nr. 30 und 31.

VI.

Bedeutung der adjungirten Curven.

27.

Der Restsatz für nicht-singuläre Curven.

Sei zunächst eine Curve μ^{ter} Ordnung mit nur *nichtsingulären* mehrfachen Punkten, vorgelegt:

$$F(\xi) = 0.$$

$\Psi(\xi) = 0$ sei irgend eine Schaar von Curven ν^{ter} Ordnung, welche, ausser gemeinsamen festen Punkten, die Curve $F(\xi) = 0$ in einer Schaar Σ von Gruppen Γ von je r Punkten treffen mögen; $\Psi_0(\xi) = 0$ eine specielle Curve dieser Schaar, welche F in der speciellen Gruppe Γ_0 aus Γ treffe.

Bestimmt man nun eine beliebige durch die Gruppe Γ_0 gehende und zu F adjungirte Curve ν'^{ter} Ordnung, $\Psi_0'(\xi) = 0$, so ist der Restsatz in der Gleichung enthalten (vgl. Math. Ann. VII, p. 271)

$$(1) \qquad \Psi(\xi) \,.\, \Psi_0'(\xi) - \Psi_0(\xi) \,.\, \Psi'(\xi) \equiv \mathrm{A} \,.\, F(\xi).$$

in der A und $\Psi'(\xi)$ ganze Functionen der ξ bedeuten, und aus der sich $\Psi'(\xi) = 0$ als eine Schaar von zu F adjungirten Curven ν'^{ter} Ordnung ergiebt, welche ausser gemeinsamen festen Punkten, die Curve $F(\xi) = 0$ in *derselben* Schaar Σ von Punktgruppen treffen, wie

$$\Psi(\xi) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt zugleich, dass die auf $F(\xi) = 0$ existirende lineare *Gesammtschaar* von Gruppen von je r Punkten, unter denen Γ_0 als eine Gruppe enthalten ist, immer durch eine Schaar $\Psi'(\xi) = 0$ von Curven ν'^{ter} Ordnung aus $F(\xi) = 0$ ausgeschnitten werden kann, welche keinen anderen Bedingungen unterliegen, als *zu F adjungirt* zu sein und durch den Restschnitt von $F(\xi) = 0$, $\Psi_0'(\xi) = 0$ (ausser Γ_0 und den mehrfachen Punkten von F) hindurchzugehen.

Wenn ferner die Schaar $\Psi(\xi) = 0$ einen j-fachen Punkt R von $F(\xi) = 0$ überhaupt nicht zum festen Punkte hatte, so brauchen auch $\Psi_0(\xi) = 0$ und $\Psi_0'(\xi) = 0$ durch diesen Punkt nicht gelegt zu werden; dann ergiebt die Gleichung (1) für $\Psi'(\xi) = 0$ aber keinerlei auf den Punkt R bezügliche Bedingung; und die Gleichung sagt aus, dass diejenige lineare *Theilschaar* von Gruppen von je r Punkten auf $F(\xi) = 0$, welche die Gruppe Γ_0 enthält und welche überhaupt von solchen Curven ausgeschnitten werden kann, die den Punkt R nicht zum festen Punkt haben, immer vollständig durch eine Schaar von Curven einer Ordnung ν', $\Psi'(\xi) = 0$, aus $F(\xi) = 0$ ausgeschnitten wird, welche nur den Bedingungen unterliegen: zu F in allen Punkten, ausser R, adjungirt zu sein und durch den Restschnitt von $F(\xi) = 0$, $\Psi_0'(\xi) = 0$ zu gehen.

28.

Der Restsatz für singuläre Curven.

Sei nun zweitens eine Curve m^{ter} Ordnung

$$f(x) = 0,$$

mit beliebigen Singularitäten vorgelegt. Es soll gezeigt werden, dass der Satz für die *Gesammtschaaren* von Nr. 27 auch hier gilt, indem man zu $f(x) = 0$ adjungirte Curven benutzt.

Wir betrachten hier vorerst eine Schaar von Gruppen H auf $f(x) = 0$, ausgeschnitten durch Curven n^{ter} Ordnung $\chi(x) = 0$, die einen i-elementigen Punkt P von f zum (gewöhnlichen) h-fachen Punkt haben, durch die übrigen mehrelementigen Punkte $R_1, R_2, \ldots$ nicht gehen und eine Anzahl fester einfacher Punkte von f gemein haben; eine specielle der Curven, $\chi_0 = 0$, treffe f in H_0. Legt man nun durch H_0 eine Curve n'^{ter} Ordnung, $\chi_0' = 0$, welche P zum $(i-1)$-fachen Punkt hat und weiter f in einer Gruppe H_0' von einfachen Punkten trifft, so hat man auch hier eine Gleichung, analog (1), Nr. 22,

$$(2) \qquad \chi \cdot \chi_0' - \chi_0 \cdot \chi' \equiv A \cdot f,$$

wo χ' und A ganze Functionen der x werden; denn die hierzu hinreichende Bedingung (vgl. meine Note Math. Ann. VI, p. 351), dass $\chi\chi_0'$ den Punkt P, der i-elementiger Punkt von f, h-facher Punkt von χ_0 und Schnittpunkt von nur hi-facher Multiplicität ist, zum $(h+i-1)$-fachen Punkt habe, ist erfüllt. $\chi'(x) = 0$ wird dann eine durch H_0' gehende Schaar von Curven n'^{ter} Ordnung, mit $(i-1)$-fachem Punkte in P, eine Schaar, die f ebenfalls in den Gruppen H trifft. Und es folgt, dass die Curven n'^{ter} Ordnung, welche durch H_0' gehen und P zum $(i-1)$-fachen Punkte haben, diejenige *allgemeinste* auf f existirende lineare Schaar von Gruppen ausschneiden, in der H_0 als eine Gruppe enthalten ist, und die von Curvenschaaren, welche P zu irgend einem vielfachen Punkte, R_1, R_2, ... gar nicht zu festen Punkten haben, überhaupt ausgeschnitten werden kann. —

Sei jetzt die lineare Gesammtheit von Gruppen G auf $f(x)=0$, der eine Gruppe G_0 angehört, zu betrachten. Wir legen eine Curve χ_0' n'^{ter} Ordnung durch G_0, welche zugleich zu f adjungirt sei; dieselbe treffe f weiter in einer einfachen Gruppe H_0'. $\chi'(x)=0$ sei die Schaar *aller* Curven n'^{ter} Ordnung, welche durch H_0' gehen und P zum $(i-1)$-fachen Punkte haben.

Auf $f(x)=0$ und die eben genannten Curvenschaaren wenden wir eine eindeutige Transformation an. Da man durch fortgesetzte Transformationen der Art von Nr. 22 die Curve $f(x)=0$ in eine Curve ohne singuläre mehrfache Punkte verwandeln kann, für welche dann die Restsätze von Nr. 27 gelten, so genügt es, zu zeigen, dass bei einer Transformation mit nur *einem* mehrelementigen Punkte als Fundamentalpunkt die Restsätze für die zu *transformirende* Curve gelten, wenn sie für die transformirte Curve vorausgesetzt werden. Wir machen daher eine, etwa quadratische Ebenen-, Transformation, welche von den Punkten von $f(x)=0$ nur P zum einfachen Fundamentalpunkte habe, auf $f(x)=0$. Die transformirte Curve, für welche die Restsätze gelten sollen, sei $F(\xi)=0$. Diese Curve erhält in den Fundamentalpunkten Q_1, Q_2, ... der ξ-Ebene gewöhnliche mehrfache Punkte, hat ferner eine Reihe von mehrelementigen Punkten P_1, P_2, ..., den verschiedenen Richtungen von $f(x)=0$ am Punkt P entsprechend und eine Reihe von mehrelementigen Punkten R_1', R_2', ... einzeln bez. den Punkten R_1, R_2, ... von $f=0$ entsprechend und von derselben Singularität, wie diese.

Bei dieser Transformation geht die Schaar $\chi'(x)=0$ über in eine Schaar $\mathrm{X}(x)=0$ von Curven ν^{ter} Ordnung, welche die Punkte Q_1, Q_2, ... zu festen mehrfachen Punkten hat und durch die H_0' entsprechenden Punkte von F geht. Nach Nr. 27 lässt sich diese Schaar in Bezug auf den Schnitt mit $F(\xi)=0$ ersetzen durch eine Schaar von Curven ν'^{ter} Ordnung, $\mathrm{X}'(\xi)=0$, welche 1) sich in den Punkten Q_1, Q_2, ... adjungirt verhalten, 2) durch eine feste Gruppe K von einfachen Punkten von $F(\xi)=0$ gehen.

Aber diese Schaar $\mathrm{X}'(\xi)=0$ genügt auch keiner weiteren Bedingung als 1) und 2). Denn die *ganze* Schaar der Curven ν'^{ter} Ordnung, welche 1) und 2) genügen, transformirt sich in Curven, welche P zu einem mehrfachen Punkte und eine Anzahl einfacher Punkte von $f(x)=0$ zu festen Punkten haben; diese Curven schneiden dann $f(x)=0$ in Gruppen, zu denen jedenfalls die von den $\chi'(x)=0$ ausgeschnittenen Gruppen gehören. Dann aber treffen, nach den Bemerkungen zur obigen Gleichung (2), gerade diese $\chi'(x) = 0$ die $f(x) = 0$ schon in den allgemeinsten Gruppen, also auch die $\mathrm{X}(\xi) = 0$ und die $\mathrm{X}'(\xi) = 0$ die $F(\xi) = 0$ in den allgemeinsten Gruppen, welche aus den Bedingungen 1), 2) sich ergeben.

Schreibt man nun den $\chi'(x) = 0$ die weitere Bedingung vor, in *allen* mehrelementigen Punkten P, R_1, R_2, ... von $f(x) = 0$ zu f adjungirt zu sein, so geschieht dies nach Nr. 20 dadurch, dass die $\mathrm{X}(\xi) = 0$ die weitere Bedingung erfüllen, in den Punkten P_1, P_2, ... und R_1', R_2', ... zu F adjungirt zu sein. Dieselbe Bedingung stellt sich dann, nach der Annahme über $F(\xi) = 0$, auch für die $\mathrm{X}'(\xi) = 0$; und da diese Curven hierauf die allgemeinste Schaar von zu F adjungirten, durch eine feste Gruppe K gehenden Curven ν'^{ter} Ordnung bilden, so schneiden sie, wieder nach der Voraussetzung, $F(\xi) = 0$ in einer Schaar von Punktgruppen, welche in keiner allgemeineren Schaar als Theilschaar mehr enthalten ist. Dasselbe tritt also auch für die auf $f(x) = 0$ entsprechende Schaar von Punktgruppen ein; d. h. *die zu f adjungirten, durch H_0' gehenden Curven n'^{ter} Ordnung schneiden die oben genannte Schaar G aus $f(x) = 0$ aus.*

So gilt die Gleichung (2), wenn dabei unter $\chi(x) = 0$ eine ganz beliebige Curvenschaar, unter $\chi'(x) = 0$ eine Schaar von zu f adjungirten Curven verstanden wird.

29.

Die weitere Theorie der algebraischen Functionen.

Mit dem Restsatze, dessen Ableitung von den Darstellungen in Nr. 21—26 natürlich unabhängig, ist — in eingehenderer Weise als im § 7 der Arbeit von Herrn Brill und mir: „über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie“, Mathem. Ann. VII — auch für die beliebig singuläre Curve $f(x) = 0$ die einzige Grundlage gegeben, aus welcher in jener Arbeit §§ 2—6 zunächst für nicht singuläre Curven die Functionensätze entwickelt werden. Diese Entwicklungen bleiben, wie dort schon gesagt, auch für die singuläre Curve $f(x) = 0$ und ihre adjungirten Curven wortgetreu bestehen.

Insbesondere leitet man also jetzt für die *irreducible* Curve m^{ter} Ordnung, $f(x) = 0$, deren Geschlecht p durch die Formel Nr. 17 oder 19 bestimmt ist, die Sätze her:

dass jede lineare Schaar von Gruppen von je Q Punkten auf $f(x) = 0$, deren Mannigfaltigkeit $q > Q - p$ ist, von zu f adjungirten Curven $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, — den sog. Curven φ — ausgeschnitten werden kann; dass es von diesen Curven φ überhaupt genau ∞^{p-1} giebt, von den zu f adjungirten Curven $(m - 3 + \alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung aber, für $\alpha > 0$, vermöge $f(x) = 0$ genau $\infty^{p+m\alpha-2}$.

Hieran schliessen sich für die irreducible Curve $f(x)=0$ der Riemann-Roch'sche Satz über die genauere Bestimmung der Constantenzahl der von Curven φ aus f ausgeschnittenen Schaaren von Punktgruppen; ferner der Satz, dass diese Schaaren bei eindeutiger Transformation von $f(x)=0$ in eine Curve $F(\xi)=0$ in Schaaren von gleicher Mannichfaltigkeit übergehen, welche aus $F(\xi)=0$ von zu F adjungirten Curven φ ausgeschnitten werden; also dass die Zahl p hierbei erhalten bleibt.

Die in diesem Gedankengange sich ergebenden Definitionen für die Zahl p sind die folgenden:

1) für eine auch reducible, nur keine Doppelcurve enthaltende, Curve $f(x)=0$: die numerische Definition aus Nr. 17 oder 19; rational nach Nr. 25 zu finden. Damit identisch ist die Definition, dass die zu f adjungirten Curven $(m-3+\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung die Curve $f(x)=0$ in Gruppen von je

$$2p-2+m\alpha$$

Punkten schneiden;

2) für eine irreducible Curve $f(x)=0$:

a) aus der Mannichfaltigkeit

$$q=Q-p$$

einer Schaar von je Q Punkten, unter welchen *eine* Gruppe aus ganz willkürlich (nicht speciell) gewählten Q Punkten besteht; wenn $q>0$ wird;.

b) aus der Zahl p der linear von einander unabhängigen zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Curven φ.

30.

Modificirte Bestimmung der Verhältnisse der Curven φ.

Für die rationalen Darstellungen der Nr. 21—26 ergeben diese Sätze von Nr. 29 noch weitere Resultate.

Nach diesen Sätzen stellt die Forderung für die Curven $(m-3+\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung, in allen mehrelementigen Punkten von $f(x)=0$ zu f adjungirt sein, d. h. (Nr. 19) alle h_j-fachen Punkte von $f(x)=0$ zu (h_j-1)-fachen Punkten zu haben, für $\alpha \geqq 0$ und eine irreducible Curve $f(x)=0$ genau

$$\sum \tfrac{1}{2} h_j(h_j-1)$$

lineare von einander unabhängige Bedingungen für die Coefficienten der Curvenschaar dar. *Die in Nr. 26 genannten* $\sum \frac{1}{2} h_j(h_j-1)$ *linearen Gleichungen sind also, sobald nur* $f(x)=0$ *irreducibel und die dortige Zahl* $n \geqq m-3$ *ist, von einander unabhängig.*

Die in Nr. 26 behandelte rationale Aufstellung der zu f adjungirten Curven kann aber für irreducible Curven $f(x) = 0$ nach Nr. 29 überhaupt noch bedeutend modificirt werden. Denn zunächst gehen bei einer eindeutigen Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve μ^{ter} Ordnung, $F(\xi) = 0$, die zu f adjungirten Curven von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, $\varphi(x) = 0$, in die Schaar der zu F adjungirten Curven $(\mu - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi(\xi) = 0$, über; vermöge $f(x) = 0$ und $F(\xi) = 0$. Wenn es sich daher nur um die Schnittgruppen von $f(x) = 0$ mit der Curvenschaar $\varphi(x) = 0$ handelt, so genügt es, durch successive Transformationen $f(x) = 0$ in eine Curve ohne Singularitäten, $F(\xi) = 0$, überzuführen, die zu F gehörige Curvenschaar φ, $\Phi(\xi) = 0$, aufzustellen und vermöge der Transformationen aus $\Phi(\xi) = 0$ rückwärts eine Schaar $\varphi'(x) = 0$ abzuleiten. Diese Schaar ersetzt dann vermöge $f(x) = 0$ die Schaar $\varphi(x) = 0$ vollständig.

Die hierzu auszuführenden Operationen beschränken sich auf Folgendes:

Man zerlegt, wie in Nr. 23, den Factor D_0 der Resultante $D(\lambda_1, \lambda_2)$ in

$$D_0 = D_2^2 D_3^3 \cdots D_r^r,$$

bestimmt, wie dort, die Coordinaten der zu

$$D_2 D_3 \cdots D_r = 0$$

gehörigen mehrelementigen Punkte von $f(x) = 0$ und benutzt diese sämmtlichen Punkte als Fundamentalpunkte einer ersten Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve $f^{(1)}(x^{(1)}) = 0$, nach Art von Nr. 22. Die Unterscheidung dieser Punkte nach dem Grade der Vielfachheit ist dabei unnöthig.

Sodann bestimmt man nach Nr. 22 die Coordinaten der allen vielelementigen Punkten von $f(x) = 0$ entsprechenden Punkte von $f^{(1)} x^{(1)} = 0$, durch analoge Gleichungen, wie bei $f(x) = 0$. Diese sämmtlichen Punkte, soweit sie höhere als 1-elementige sind, werden weiter als Fundamentalpunkte einer Transformation, nach Art von Nr. 22, von $f^{(1)}(x^{(1)}) = 0$ auf eine Gleichung $f^{(2)}(x^{(2)}) = 0$ benutzt; etc. Man gelangt so endlich zu einer Curve $F(\xi) = 0$, welche keine, den mehrelementigen Punkten von $f(x) = 0$ entsprechende, mehrelementige Punkte besitzt, sondern nur noch gewöhnliche mehrfache Punkte in den Fundamentalpunkten der ξ-Ebene.

Für diese Curve $F(\xi) = 0$ ergiebt sich die Schaar $\Phi(\xi) = 0$ alsdann lediglich nach Nr. 23 und 21, ohne dass man noch weitere Transformationen, wie in Nr. 24, anzuwenden hätte. Aus den $\Phi(\xi) = 0$ folgen endlich die $\varphi'(x) = 0$, wie oben gesagt.

Was nun weiter die zu f adjungirten Curven von *höherer* als $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung betrifft, so habe ich in meinem Aufsatze „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen", Mathem. Ann.

Bd. XVII, gezeigt, dass sich dieselben für $f(x)=0$ durch ganze Functionen der $\varphi(x)$, also auch der $\varphi'(x)$ ersetzen lassen. Sei nämlich eine Schaar von Gruppen G auf $f(x)=0$ gegeben, G_0 eine specielle dieser Gruppen; wenn dann $\Phi_0^{(\mu)}(x)=0$ wo $\Phi_0^{(\mu)}(x)$ eine ganze homogene Function μ^{ter} Ordnung der $\varphi'(x)$ vorstellt, irgend eine Curve ist, welche durch G_0 hindurchgeht, so wird die Schaar der G aus $f(x)=0$ durch eine Schaar von Curven $\Phi^{(\mu)}(x)=0$ ausgeschnitten, wo auch $\Phi^{(\mu)}(x)$ eine ganze homogene Function der $\varphi'(x)$ ist und wo alle $\Phi^{(\mu)}(x)=0$ durch den Restschnitt von $f(x)=0$ mit $\Phi_0^{(\mu)}(x)=0$, ausser G_0 und den mehrelementigen Punkten von $f(x)=0$, hindurchgehen. Diese Schaaren sind also mit den $\varphi'(x)=0$ bekannt. In der rationalen Aufstellung von

$$\frac{\Phi^{(\mu)}(x)}{\Phi_0^{(\mu)}(x)}$$

hat man die einfachste Lösung der Aufgabe, eine rationale Function der x zu bestimmen, welche nur in der Gruppe G_0 von $f(x)=0$, oder in einem Theil dieser Gruppe, unendlich in der ersten Ordnung wird.

31.

Modificirte Bestimmung der Curven φ.

Der in Nr. 30 angegebene Weg liefert zwar alle Schaaren von Punktgruppen, welche aus der irreduciblen Curve $f(x)=0$ von den zu f adjungirten Curven ausgeschnitten werden können; zunächst aber nicht die Gleichungen dieser Curven selbst, wie es bei dem Verfahren von Nr. 26 der Fall war. Denn die Anwendung des diesem Zwecke dienenden Restsatzes verlangte noch die Kenntniss wenigstens *einer* zu f adjungirten Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi_0(x)=0$, welche $f(x)=0$ in derselben Gruppe trifft, wie eine specielle Curve $\varphi_0'(x)=0$ aus der Schaar $\varphi'(x)=0$.

Ich will aber jetzt zeigen, dass die Curven, in welche sich die $\Phi(\xi)=0$ in Nr. 30 transformiren, sich von den Curven $\varphi(x)=0$ in der That nur um *einen angebbaren Factor* unterscheiden.

Wenn nämlich unsere Transformation gegeben ist durch

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi_h = \Theta_h(x_1, x_2, x_3) \qquad , \quad (h=1,2,3), \\ \Delta(x) = \sum \pm \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\Theta_3}{\partial x_3}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv A(x)\cdot f(x),$$

wo die $\Theta_h(x)$ von der Ordnung s seien, so soll bewiesen werden, dass

$$(5)\qquad \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv \frac{s\cdot A(x)}{\Delta(x)}\cdot\varphi(x)$$

wird; und zwar, dass diese Identität bei unseren speciellen Transformationen, wie den von Nr. 22, welche aus gewöhnlichen quadratischen Ebenentransformationen zusammengesetzt sind, ohne Hülfe von $f(x)=0$ besteht (welch letztere Eigenschaft bei allgemeiner eindeutiger Transformation nicht mehr stattfinden würde).

Es ist nur nöthig, die Gleichung (5) für die quadratische Transformation und dann für die Zusammensetzung mehrerer solcher zu beweisen.

Die quadratische Transformation, mit drei getrennten Fundamentalpunkten P_1, P_2, P_3 für die ξ-Ebene, Q_1, Q_2, Q_3 für die x-Ebene (wo $\xi_2=\xi_3=0$ für P_1, etc.), sei

$$\xi_1 = x_2 x_3, \quad \xi_2 = x_3 x_1, \quad \xi_3 = x_1 x_2,$$
$$\Delta(x) = 2x_1 x_2 x_3.$$

Die Curve μ^{ter} Ordnung, $F(\xi)=0$, habe die Punkte P_1, P_2, P_3 bez. zu i_1-, i_2-, i_3-fachen Punkten; dann wird

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \cdot f(x),$$

also

$$A(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3},$$

und die Curve $f(x)=0$ wird von der Ordnung $m = 2\mu - i_1 - i_2 - i_3$, mit $(\mu - i_2 - i_3)$-fachem Punkte in Q_1, etc.

Ferner wird, wenn alle Zahlen i_1, i_2, i_3 grösser als 0 sind, für die zu F in den Punkten P_1, P_2, P_3 adjungirte Curve $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi(\xi)=0$:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} x_3^{i_3-1} \cdot \varphi'(x) = \frac{2A(x)}{\Delta(x)} \cdot \varphi'(x),$$

wo $\varphi'(x)=0$ eine Schaar von Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, mit $(\mu - i_2 - i_3 - 1)$-fachem Punkte in Q_1 etc., also in Q_1, Q_2, Q_3 zu f adjungirt. Schreibt man dann den $\Phi(\xi)=0$ weiter vor, auch in den übrigen mehrfachen Punkten von $F(\xi)=0$, ausser den Fundamentalpunkten P_1, P_2, P_3, zu F adjungirt zu sein, so tritt dasselbe auch für die $\varphi'(x)=0$ in Bezug auf $f(x)=0$ ein, auch wenn die mehrfachen Punkte von $F(x)=0$ einem der Fundamentalpunkte benachbart liegen (Nr. 20); die Schaar $\varphi'(x)$ wird daher dann gerade zur gesuchten Schaar $\varphi(x)$.

Ist

$$i_3 = 0, \quad i_1 > 0, \quad i_2 > 0,$$

so wird

$$A(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2},$$
$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-2} \cdot \varphi'(x) = \frac{2A(x)}{\Delta x} \cdot x_3 \varphi'(x),$$

und $x_3\varphi'(x)$ wird in der That zur Schaar $\varphi(x)$; und analog für $i_2 = i_3 = 0$.

Die Gleichung (5) gilt daher für die quadratische Transformation. Seien jetzt zwei successive Transformationen betrachtet, für welche die Gleichung (5) Gültigkeit habe:

$$(6)\quad \begin{cases} y_k = \psi_k(x), \quad (k = 1, 2, 3;\ s_1 = \text{Ordnung der } \psi), \\ \Delta_1(x) = \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, \\ f_1(y) = f_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = A_1(x) \cdot f(x), \\ \varphi_1(y) = \frac{s_1 A_1(x)}{\Delta_1(x)} \cdot \varphi(x), \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} z_h = \chi_h(y), \quad (h = 1, 2, 3;\ s_2 = \text{Ordnung der } \chi) \\ \Delta_2(y) = \sum \pm \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \chi_3}{\partial y_3}, \\ F(z) = F(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = A_2(y) \cdot f_1(y), \\ \Phi(z) = \frac{s_2 A_2(y)}{\Delta_2(y)} \cdot \varphi_1(y). \end{cases}$$

Dann folgt zunächst aus (6) und (7):

$$(8)\quad \begin{cases} z_h = \chi_h(\psi_1, \psi_2, \psi_3), \\ \sum \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} = \Delta_2(\psi(x)) \cdot \Delta_1(x), \\ F(z) = A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x) \cdot f(x), \\ \Phi(z) = \frac{s_1 s_2 A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x)}{\Delta_2(\psi(x)) \cdot \Delta_1(x)} \cdot \varphi(x). \end{cases}$$

Beim Zusammensetzen der Transformationen (6), (7) wird sich aber im Allgemeinen ein den $\chi_h(\psi(x))$ gemeinsamer Factor $C(x)$, von einem Grade r, herausheben, so dass die resultirende Transformation wird:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi_h = \frac{z_h}{C(x)} = \Theta_h(x), \quad (h = 1, 2, 3;\ s = s_1 s_2 - r = \text{Ordnung der } \Theta), \\ \Delta(x) = \sum \pm \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Theta_3}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Die transformirte Curve ist $F(\xi) = 0$, wo F dasselbe Zeichen ist, wie in (8); also:

$$(10)\quad F(\xi) = \frac{1}{C^\mu(x)} F(z) = \frac{A_2(\psi(x)) \cdot A_1(x)}{C^\mu(x)} \cdot f(x) = A(x) \cdot f(x),$$

$$(11)\quad \Phi(\xi) = \frac{1}{C^{\mu-3}(x)}\,\Phi(z) = \frac{s_1 s_2 A_2(\psi(x))\cdot A_1(x)}{C^{\mu-3}\cdot \Delta_2(\psi(x))\cdot\Delta_1(x)}\cdot\varphi(x)$$
$$= \frac{(r+s)\cdot A(x)\cdot C^3(x)}{\Delta_2(\psi(x))\cdot\Delta_1(x)}\cdot\varphi(x).$$

Aber man hat allgemein, wenn C eine homogene Function r^{ter} Ordnung, die Θ_h solche von der s^{ten} Ordnung sind:

$$\sum \pm \frac{\partial(C\Theta_1)}{\partial x_1}\,\frac{\partial(C\Theta_2)}{\partial x_2}\,\frac{\partial(C\Theta_3)}{\partial x_3} = \frac{r+s}{s}\,C^3\cdot\sum\pm\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Theta_2}{\partial x^{\text{n}}}\,\frac{\partial\Theta_3}{\partial x_3};$$

also hier aus (11):

$$\Phi(\xi) = \frac{s\cdot A(x)}{\Delta(x)}\cdot\varphi(x),$$

was die zu beweisende Gleichung (5) ist.

Sonach erhält man nicht nur nach Nr. 26, sondern auch durch diese Gleichung nach Nr. 30 die zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi(x)=0$. Zugleich ist durch diese Gleichung (5) der Satz der Nr. 28 wenigstens für die zu f adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von Neuem bewiesen.

32.

Die Differentiale erster Gattung.

Für eine nicht-singuläre Curve $F(\xi)=0$, μ^{ter} Ordnung, sind die *Differentiale erster Gattung* bekanntlich die (von den γ unabhängigen) Ausdrücke:

$$(12)\qquad du = \frac{\Phi(\xi)\cdot\Sigma\pm\gamma_1\xi_2 d\xi_3}{\Sigma_h\gamma_h\dfrac{\partial F(\xi)}{\partial\xi_h}},$$

wo die $\Phi(\xi)$, $=0$ gesetzt, die Gleichungen der zu f adjungirten Curven $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen.

Auch für eine, beliebig singuläre, Curve $f(x)=0$, welche der Curve $F(\xi)=0$ in gegenseitig rationaler Transformation eindeutig zugeordnet ist, stellen die du aus (12) die Differentiale erster Gattung dar; denn die u sind auch Integrale über rationale Functionen der x, für $f(x)=0$, und sind für alle Werthsysteme von $f(x)=0$ endlich.

Durch die Transformationsformeln von Nr. 31 erhält man für diese Differentiale den (von den c unabhängigen) Ausdruck:

$$du = \frac{\Phi(\Theta(x))\cdot\Delta(x)\cdot\Sigma\pm c_1x_2dx_3}{s\cdot A(x)\cdot\Sigma_k c_k\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}};$$

und hieraus nach Nr. 31, wenn, wie wir annehmen können, $F(\xi) = 0$ aus $f(x) = 0$ durch eine unserer speciellen Transformationen abgeleitet war:

$$du = \frac{\varphi(x) \cdot \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\Sigma_k c_k \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}}. \tag{13}$$

D. h. *auch für eine beliebig singuläre irreducible Curve* $f(x) = 0$, *von der* m^{ten} *Ordnung, stellen die im Zähler der zugehörigen Differentiale erster Gattung* (13) *auftretenden Functionen* $\varphi(x)$, $= 0$ *gesetzt, die zu* f *adjungirten Curven* $(m-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung,* $\varphi(x) = 0$, *vor.*

Die rationale Aufstellung dieser Differentiale aus der gegebenen Gleichung, $f(x) = 0$, erfolgt daher nach Nr. 26 oder nach Nr. 30 und 31.

Erlangen, 28. October 1883.