

Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen 2. Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren.

Von

RUDOLF STURM in Münster i./W.

Seit den Aufsätzen über quadratische Formen von Hermite im Journal für Mathematik Bd. 47 ist eine ziemlich umfangreiche Litteratur über die Transformation quadratischer Formen in sich selbst vermittelt linearer Substitutionen erschienen.*)

Doch verfolgen die Verfasser mehr algebraische oder zahlentheoretische Zwecke als geometrische. Am meisten findet die Geometrie Berücksichtigung in den Abhandlungen der Herren Frahm und Voss, insbesondere bei letzterem, welcher alle auf die lineare Transformation einer Curve oder Fläche 2. Grades in sich bezüglichen Hauptresultate ermittelt hat und bei dem auch der Correlation gleiche Rücksicht zu theil wird, während sie sonst gegenüber der Collineation stets zurücktritt.

Eine rein geometrische Behandlung hat — etwa abgesehen von den Specialfällen der Polarcorrelation (in Bezug auf eine Basisfläche 2. Grades) und des Nullsystems — die Transformation der Curven oder Flächen 2. Grades in sich selbst vermittelt Collineation oder Correlation noch nicht erfahren, und es dürfte daher eine von allem algebraischen Apparate freie Untersuchung über diese Transformation nicht überflüssig sein.***) Der erste Theil der nachfolgenden Abhandlung unternimmt dieselbe für *die Flächen 2. Grades*, indem für den einfacheren Fall der Kegelschnitte eine Mittheilung der Resultate genügend erschien.

*) Cayley, Journ. f. Math. Bd. 50; Philos. Mag. 4. Ser. Bd. 6; Bachmann, Journ. f. Math. Bd. 71, 76; Selling, ebenda Bd. 77; Rosanes, Bd. 80; Frobenius, Bd. 77, 82, 84; Frahm, Habilitationsschrift (über eine Classe von linearen Transformationen, Tübingen 1873); Voss, zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Ann. Bd. 13, S. 320; gelegentliche Bemerkungen von F. Klein in verschiedenen Aufsätzen.

**) Wenn im Folgenden bisweilen Coordinaten angewendet werden, so geschieht es nur, um die erhaltenen Resultate zu bestätigen.

Es kommt darauf an, zu ermitteln, ob und welche Bedingungen nothwendig sind, damit eine Collineation oder Correlation eine Fläche 2. Grades in sich selbst transformirt, welches System dann die in sich transformirten Flächen erzeugen. Daran schliesst sich die Aufsuchung involutorisch sich entsprechender Flächen, die auch Herr Voss aufgefunden hat, und andere naheliegende Fragen. Die speciellen Fälle der perspectiv- und der geschaart involutorischen Collineation, der Polarcorrelation und des Nullsystems werden besonders behandelt.

Im zweiten Theile, der wenig Beziehungen zum ersten hat, wird dieselbe Frage hinsichtlich der cubischen Raumcurve behandelt, was wohl ein noch gar nicht in Angriff genommenes Problem sein dürfte.

Erster Theil.

I.

1. Eine Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 sei gegeben; die beiden Ebenen E, E' durchschneiden sie in den Kegelschnitten α^2, α'^2 ; E, E' seien ihre Pole und F, F' zwei beliebige Punkte der Fläche. Wenn dann D, D' die Schnitte von $EF, E'F'$ bez. mit E, E' , A, B die Schnitte von α^2 mit der Polare von D , A', B' die von α'^2 mit der Polare von D' und E, E' zwei beliebige Punkte bez. von α^2, α'^2 sind, so wird durch die räumliche Collineation, in welcher den Punkten A, B, C, E, F die Punkte A', B', C', E', F' entsprechen, die Fläche \mathfrak{A}^2 in sich selbst transformirt. Denn in dieser Collineation sind dann auch D, D' entsprechend und weil in E, E' sich A, B, C, D und A', B', C', D' correspondiren, so thun es auch die Kegelschnitte α^2, α'^2 *) und in Folge dessen auch die Tangentialkegel $E\alpha^2, E'\alpha'^2$; die Fläche, welche der zum ersten Raume gerechneten \mathfrak{A}^2 im zweiten entspricht, muss also den Kegel $E'\alpha'^2$ längs α'^2 tangiren und durch F' gehen, weil \mathfrak{A}^2 den Kegel $E\alpha^2$ längs α^2 berührt und durch F geht; da aber \mathfrak{A}^2 jenes auch thut und eine Fläche 2. Grades dadurch eindeutig bestimmt ist, so sind beide Flächen identisch.

Lassen wir C' die Curve α'^2 durchlaufen, sodann E' alle möglichen Lagen im Raume und F' alle möglichen Lagen auf \mathfrak{A}^2 einnehmen, so erhalten wir die ∞^6 Collineationen, durch welche die gegebene Fläche 2. Grades in sich selbst übergeht; wie die algebraischen Untersuchungen sie ergeben haben.

Ersetzen wir die gestrichenen Elemente durch ihre in Bezug auf

*) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 264; Beyer, Geometrie der Lage, Abth. II, zweiter Vortrag.

\mathfrak{A}^2 polaren, so ergibt sich *dasselbe Resultat auch für die Correlationen (Reciprocitäten)*.

Nun giebt es ∞^9 Flächen 2. Grades und ∞^{15} Collineationen oder Correlationen; also muss eine Collineation oder Correlation entweder eine endliche Zahl von Flächen 2. Grades, oder, falls für die Transformation einer Fläche 2. Grades in sich i Bedingungen nothwendig sind, wenn sie diese erfüllt, sofort ∞^i Flächen in sich transformiren. Dies wird sich in den vier Fällen — denn bei Collineation wie Correlation haben wir je zwei Fälle — verschiedenartig gestalten.

2. *Diese beiden Fälle unterscheiden sich dadurch, dass bei dem einen jede der beiden Geradenschaaren einer in sich transformirten Fläche 2. Grades in sich selbst, bei dem zweiten in die andere übergeht.* Herr Klein hat wohl zuerst auf diese beiden Fälle aufmerksam gemacht;*) bei Herrn Voss ergeben sie sich aus den eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Substitutionen.

Es seien $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ sechs Gerade der einen Schaar von \mathfrak{A}^2 , l_1, \dots, l_6 sechs Gerade aus der andern.

Wir lassen den zum ersten Raum gerechneten Punkten:

$$g_1 l_4, g_1 l_5, g_2 l_4, g_2 l_5, g_3 l_6$$

die Punkte, bez. Ebenen:

$$g_4 l_1, g_4 l_2, g_5 l_1, g_5 l_2, g_6 l_3,$$

oder die Punkte, bez. Ebenen:

$$l_1 g_4, l_1 g_5, l_2 g_4, l_2 g_5, l_3 g_6$$

im zweiten entsprechen**); dann entsprechen bei der dadurch festgelegten Collineation, resp. Correlation den Geraden $g_1, g_2, g_3, l_4, l_5, l_6$ im ersten Falle die Geraden $g_1, g_5, g_6, l_1, l_2, l_3$, im zweiten aber die Geraden $l_1, l_2, l_3, g_4, g_5, g_6$, also dort jede der beiden Schaaren sich selbst, hier jede der andern. Lässt man jede der sechs letzteren Geraden ihre ∞^1 Lagen in ihrer Schaar einnehmen, so erhält man in allen vier Fällen ∞^6 lineare Transformationen.

Sagen wir im ersten, bez. zweiten Falle: *die Fläche werde auf die erste, bez. zweite Art in sich selbst transformirt.*

3. Sowohl bei der Collineation, als bei der Correlation ergibt sich auf einer Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 , die durch dieselbe in sich transformirt wird, eine eindeutige Punktbeziehung. Jedem Punkte X der Fläche \mathfrak{A}^2 als Punkt des ersten Raumes entspricht der ihm durch die Collineation im zweiten entsprechende X' , bez. der Berührungspunkt X' der Ebene ξ , welche dem X durch die Correlation correspondirt

*) Math. Annalen Bd. 4 S. 412 und 622.

**) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 329; Reye, Geometrie der Lage 2. Aufl. Abth II S. 26.

(polar ist). Ist ξ die Berührungsebene von X , so entsprechen sich bei der Collineation auch ξ und ξ' , bei der Correlation auch ξ und X' .

Entsprechende Punkte der \mathfrak{A}^2 in der genannten Punktbeziehung durchlaufen gleichzeitig Kegelschnitte. Projicirt man deshalb entsprechende Punkte aus dem Punkte $O \equiv Q'$ von \mathfrak{A}^2 , so erhält man zwei concentrische quadratisch verwandte Bündel. Es seien O', Q die dem Scheitel entsprechenden Punkte, $g \equiv h', l \equiv m'$ die durch den Scheitel gehenden Geraden von \mathfrak{A}^2 , denen g', h, l', m entsprechen. Bei der Transformation erster Art gehören $g \equiv h', g', h$ zu der einen, $l \equiv m', l', m$ zur andern Schaar, bei der Transformation zweiter Art $g \equiv h', l, m$ zur einen, $l \equiv m', g', h$ zur andern. Die Hauptstrahlen der beiden Bündel sind:

$$g, l, OQ; \quad h', m', Q'O'$$

und ihnen sind bez. homolog bei der ersten Art die Hauptebenen:

$$(m', Q'O'), (h', Q'O') (h', m'); \quad (l, OQ), (g, OQ), (g, l),$$

bei der zweiten die Hauptebenen:

$$(h', Q'O'), (m', Q'O'), (h', m'); \quad (g, OQ), (l, OQ), (g, l).$$

Im ersten Falle liegt demnach keiner der Hauptstrahlen in seiner homologen Hauptebene. Im zweiten dagegen thun es $g \equiv h', l \equiv m'$; wir erhalten so in den beiden durch den Scheitel gehenden Geraden von \mathfrak{A}^2 zwei sich selbst entsprechende Strahlen der beiden quadratisch verwandten Bündel.

4. Zwei concentrische quadratisch verwandte Bündel haben 4 sich selbst entsprechende Strahlen.*) Zu diesen gehören also im zweiten Falle die eben erwähnten Strahlen, welche nicht zu sich selbst entsprechenden Punkten der eindeutigen Punktbeziehung auf \mathfrak{A}^2 führen: der Strahl $g \equiv h'$ verbindet den Punkt gg' als Punkt von g' und den Punkt hh' als Punkt von h je mit seinem entsprechenden Punkt auf g , bez. h' ; und ähnliches gilt für $l \equiv m'$. Die beiden andern sich selbst entsprechenden Strahlen aber gehen nach sich selbst entsprechenden Punkten der Punktbeziehung auf \mathfrak{A}^2 , und im ersten Falle thun dies alle vier sich selbst entsprechenden Strahlen.

Diese beiden Arten „projectiver Figuren“ auf der Fläche 2. Grades und die unterscheidende Eigenschaft, dass die der ersten Art 4, die der zweiten nur 2 Coincidenzpunkte haben, hat vor einiger Zeit Herr Zeuthen**) gefunden. Er leitet die Coincidenzpunkte in folgender Weise ab.

Bei zwei projectiven Figuren der ersten Art ist jede der beiden Regelschaaren in sich projectiv und enthält demnach zwei sich selbst

*) Reye, Zeitschr. für Math. Bd. 11 S. 300.

**) Math. Ann. Bd. 40 S. 222, auch 211.

entsprechende Geraden g_1, g_2 , bez. l_1, l_2 . Die 4 Eckpunkte des durch diese 4 Geraden gebildeten Vierseits sind die Coincidenzpunkte.

Bei zwei projectiven Figuren der zweiten Art ist jede der beiden Regelschaaren in beiderlei Sinne zu der andern projectiv; dadurch wird in jeder von ihnen, z. B. der der l , eine Projectivität hervorgerufen, in der je zwei Gerade einander entsprechen, welche als Gerade des zweiten, bez. ersten Raumes (oder wenn man sich auf die Fläche beschränken will, der zweiten, bez. ersten Figur) der nämlichen Geraden der andern Schaar entsprechen, insofern diese dem ersten oder zweiten Raume (Figur) zugerechnet wird. Seien l_1, l_2 die Coincidenzgeraden dieser Projectivität und g_1, g_2 die beiden Geraden der andern Schaar, denen sie folglich in beiderlei Sinne oder involutorisch entsprechen; so entspricht dann in dem durch diese 4 Geraden gebildeten windschiefen Vierseit jede der beiden Gegenecken $g_1 l_1, g_2 l_2$ sich selbst, während die beiden anderen $g_1 l_2, g_2 l_1$ sich gegenseitig und zwar in beiderlei Sinne entsprechen.

II.

5. Wir müssen nun die beiden Fälle der Collineation und Correlation getrennt behandeln.

Bei einer Collineation, welche eine gegebene Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformirt, seien die vier sich selbst entsprechenden Punkte $g_1 l_1, g_1 l_2, g_2 l_2, g_2 l_1$ mit A, B, C, D bezeichnet. Sie sind natürlich die Ecken des sich selbst entsprechenden Tetraeders der Collineation, das wir das Haupttetraeder der Collineation nennen wollen. *)

Die sich selbst entsprechende Fläche geht durch eins $ABCD$ der drei windschiefen Vierseite, welche von dessen Kanten gebildet werden.

Liegt nun eine beliebige Collineation vor, so fragt es sich, ob dann eine sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades vorhanden ist. Jeder Fläche 2. Grades, welche durch eins der drei windschiefen Vierseite der Kanten des Haupttetraeders gelegt ist, entspricht im andern Raume eine Fläche durch das nämliche Vierseit, und wir erhalten so eine Projectivität im Büschel durch dieses Vierseit. Die sich selbst entsprechenden Elemente derselben sind aber die beiden Ebenenpaare.

Also wird durch eine beliebige Collineation keine allgemeine Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformirt.

6. Wenn aber eine allgemeine Fläche 2. Grades durch eine Collineation auf die erste Art in sich transformirt wird, so geschieht dies für alle Flächen des Büschels, welcher dasjenige Kantenvierseit des Haupt-

*) Mit einer leichten Modification der Bezeichnung des Herrn Reye: Geom. der Lage, Abth. II S. 138 der 2. Aufl.

tetraeders zur Basis hat, durch das jene Fläche geht)*; denn die obige Projectivität hat dann drei sich selbst entsprechende Elemente.

Eine solche Collineation ist durch eine einfache Beziehung zwischen zwei der 6 *Invarianten* charakterisirt. Bekanntlich hat jedes der 6 Doppelverhältnisse, welche auf allen Verbindungslinien entsprechender Punkte einer räumlichen Collineation durch diese Punkte und die Schnitte mit je zwei der vier Ebenen des Haupttetraeders $ABCD$ gebildet werden, einen constanten Werth. Seien $\alpha \equiv BCD$, $\beta \equiv CDA$, $\gamma \equiv DAB$, $\delta \equiv ABC$ diese 4 Ebenen und \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} ihre Schnitte mit irgend einer Verbindungslinie XX' , so sind

$$\lambda_{\alpha\beta} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \quad \lambda_{\alpha\gamma} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad \lambda_{\alpha\delta} = (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

die 3 unabhängigen von diesen Invarianten, die 3 übrigen sind

$$\lambda_{\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\gamma} : \lambda_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{\gamma\delta} = \lambda_{\alpha\delta} : \lambda_{\alpha\gamma}, \quad \lambda_{\delta\beta} = \lambda_{\alpha\beta} : \lambda_{\alpha\delta}.^{**})$$

Sei nun \mathfrak{A}^2 eine durch eine Collineation auf die erste Art in sich transformirte Fläche 2. Grades, $ABCD$ das auf ihr befindliche Kantenvierseit des Haupttetraeders und X, X' seien irgend zwei auf ihr gelegene entsprechende Punkte; so ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = CD(X, X', CB, DA), \quad (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = AB(X, X', CB, DA);$$

da aber $ABCD$ und X, X' auf derselben Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 liegen, so ist:

$$CD(X, X', CB, DA) = AB(X, X', CB, DA);$$

also ist:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C});$$

oder:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\delta\gamma};$$

oder wenn wir nur die unabhängigen Invarianten benutzen wollen:

$$\lambda_{\alpha\beta} \cdot \lambda_{\alpha\delta} = \lambda_{\alpha\gamma}.$$

Also eine der 3 Bedingungen:

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C}), \quad (XX'\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}),$$

$$(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{D}) = (XX'\mathfrak{C}\mathfrak{B}),$$

*) Vgl. z. B. Frahm a. a. O. S. 5; Voss a. a. O. S. 353; Rosanes a. a. O. S. 67.

**) Die Invarianz von $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ z. B. sieht man synthetisch leicht in folgender Weise ein: YY' sei zunächst eine XX' treffende Gerade; die Schnittlinien der Ebene (XX', YY') mit α, β seien a, b und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Schnittpunkte von YY' mit α, β oder a, b . Nun sind XX', YY', a, b Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiven Punktreihen auf $XY, X'Y'$; demnach tangiren alle 6 Geraden denselben Kegelschnitt und auch auf XX', YY' entstehen durch die vier andern projective Würfe, oder: $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (YY'\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$. Sind XX', YY' windschief, so schaltet man eine beide treffende ZZ' ein, denn solcher giebt es in dem Complexe aller Verbindungslinien entsprechender Punkte einfach unendlich viele.

mit denen beziehlich:

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{D}) = (XX' \mathfrak{B} \mathfrak{C}), \quad (XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (XX' \mathfrak{C} \mathfrak{D}), \\ (XX' \mathfrak{A} \mathfrak{C}) = (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{B})$$

äquivalent sind, hat eine Collineation zu erfüllen, damit sie eine allgemeine Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformire, und dann sofort einen ganzen Büschel.

Ersichtlich folgt auch umgekehrt aus:

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{C})$$

oder

$$CD(X, X', CB, AD) = AB(X, X', CB, AD),$$

dass die durch $ABCD$ und X gelegte Fläche 2. Grades auch X' enthält und daher sich selbst entspricht.

III.

7. Gehen wir zu dem Falle einer Collineation über, welche eine Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 auf die zweite Art in sich selbst transformirt. Die Punkte $g_1 l_1, g_1 l_2, g_2 l_2, g_2 l_1$ (Nr. 4) seien mit A, E, C, F bezeichnet. A und C entsprechen sich, wie gesagt, selbst; g_1 und l_1, g_2 und l_2, E und F entsprechen sich gegenseitig in beiderlei Sinn; es entsprechen demnach die Geraden AC, EF und die Ebenen $g_1 l_1, g_2 l_2$, welche \mathfrak{A}^2 in A, C tangiren, sich selbst; während $g_1 l_2, g_2 l_1$, die in E, F tangiren, sich wiederum gegenseitig in beiderlei Sinne correspondiren. Auf der Geraden EF sind die beiden durch entsprechende Punkte gebildeten projectiven Punktreihen in Involution, da E und F sich doppelt entsprechen; also entsprechen sich alle correspondirenden Punkte auf EF in beiderlei Sinne und dasselbe gilt dann für die Ebenen durch AC . Sind nun B, D die Doppelpunkte der Involution auf EF , so ist $ABCD$ das Haupttetraeder. Liegt X in einer Ebene durch AC , so muss X' in der zu jener gepaarten Ebene der Involution liegen; da nun diese beiden Ebenen zu $AC(B, D)$ oder δ, β harmonisch sind, so sind, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. 6, X, X' zu $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ harmonisch. Mithin erhalten wir für die Collineation die Bedingung, dass die Invariante $(XX' \mathfrak{B} \mathfrak{D})$ den Werth -1 hat. Aber sie muss noch eine zweite Bedingung erfüllen. Liegen X, X' auf der sich selbst entsprechenden Fläche, so ist ähnlich wie oben:

$$AE(X, X', AF, EC) = CF(X, X', FA, CE),$$

oder wenn $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ die Schnitte von XX' mit $AC(E, F)$ sind:

$$(XX' \mathfrak{C} \mathfrak{C}) = (XX' \mathfrak{F} \mathfrak{A}),$$

weil $EAF \equiv \gamma, ECF \equiv \alpha$.

Folglich ist: $(XX' \mathfrak{C} \mathfrak{G}) = (X' X \mathfrak{U} \mathfrak{F})$; d. h. $X, X'; \mathfrak{U}, \mathfrak{C}; \mathfrak{G}, \mathfrak{F}$ sind in Involution, und da nun nach Obigem $AC(X, X')$ und $AC(E, F)$ zu $AC(B, D)$ oder δ, β harmonisch sind, so sind X, X' und $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ und also auch $\mathfrak{U}, \mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ harmonisch. Und als zweite Bedingung für die Collineation erhalten wir, dass auf allen Verbindungslinien XX entsprechender Punkte das bekanntlich*) constante Doppelverhältniss $(\mathfrak{U} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{D})$ den Werth -1 hat.

Demnach führt eine beliebige Collineation keine allgemeine Fläche 2. Grades auf die zweite Art in sich selbst über.

8. Werden aber die beiden Bedingungen:

$$(XX' \mathfrak{B} \mathfrak{D}) = -1, \quad (\mathfrak{U} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{D}) = -1$$

erfüllt (oder eins der fünf analogen Paare von Bedingungen, die sich auf die andern Kanten des Haupttetraeders beziehen), so gehen sofort ∞^2 Flächen 2. Grades in sich selbst über, welche zugleich ein Netz und ein Gewebe bilden.**)

Wegen der ersten Bedingung sind die Ebenen durch die Kante AC des Haupttetraeders, sowie die Punkte auf der Gegenkante BD involutorisch entsprechend. Sei nun E, F ein beliebiges Paar der Involution auf BD , so entsprechen sich AE und AF, CE und CF involutorisch, und wir haben nur noch zu beweisen, dass die durch das Vierseit $AECF$ und einen beliebigen Punkt X gelegte Fläche 2. Grades auch X' enthält; denn dann coincidirt sie mit der entsprechenden, die ja auch durch $AECF$ geht. $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin; so sind $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ zu X, X' harmonisch wegen der ersten Bedingung, zu $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ wegen der Involution auf AC , zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{G}$ wegen der zweiten Bedingung; also sind $XX', \mathfrak{C} \mathfrak{F}, \mathfrak{U} \mathfrak{G}$ in Involution, demnach: $(XX' \mathfrak{C} \mathfrak{G}) = (XX' \mathfrak{F} \mathfrak{U})$ oder: $AE(X, X', AF, EC) = CF(X, X', FA, CE)$.

Als Constituenten der verschiedenen Büschel ($AECF$) benutzt man je die beiden Ebenenpaare; das eine (EFA, EFC) oder (γ, α) ist fest, das andere (ACE, ACF) erzeugt eine Involution, also einen Flächenbüschel 2. Ordnung; mithin entsteht durch die sämtlichen Büschel ein Netz. Es ist zugleich ein Gewebe, constituirt durch das feste Punktpaar (A, C) und die Schaar der Punktpaare (E, F) .

9. Aus den beiden Bedingungen:

$$(XX' \mathfrak{B} \mathfrak{D}) = -1, \quad (\mathfrak{U} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{D}) = -1$$

folgt eine dritte, durch die wir also beliebig eine von ihnen ersetzen können.

Wir setzen zur Abkürzung: $\frac{X \mathfrak{U}}{X' \mathfrak{U}} = a, \quad \frac{X \mathfrak{B}}{X' \mathfrak{B}} = b, \text{ etc.};$ dann ist $b + b = 0$; ferner:

*) Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, S. 138 der 2. Aufl.

**) Voss, a. a. O. S. 353, 371.

$$-1 = (\mathfrak{A} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{D}) = \frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{c-d}{a-d},$$

oder:

$$2(ac + bd) + (a + c)(b + d) = 0;$$

also:

$$ac + bd = 0$$

oder:

$$\frac{a}{b} = -\frac{b}{c};$$

d. h.

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = - (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{C});$$

was sich von der einzigen Bedingung des vorigen Falls (Nr. 6) nur durch das Minuszeichen unterscheidet. Diese bewirkte, dass die Projectivität der entsprechenden Flächen im Büschel $(ABCD)$ in Identität übergeht. *Unsere jetzige Bedingung bewirkt, dass diese Projectivität Involution wird und also jede zwei entsprechende Flächen des Büschels $(ABCD)$ sich in beiderlei Sinne entsprechen.*

Eine Fläche des Büschels ist durch eine Gerade der einen Schaar individualisirt, z. B. die Gerade, welche die Punkte $X \equiv Z'$ und $Y \equiv W'$ auf AB und CD verbindet. Die beiden ihr entsprechenden Flächen sind dann durch $X'Y'$ und ZW bestimmt.

In Folge unserer Bedingung ist:

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = - (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{C}) = - (YY' \mathfrak{D}_1 \mathfrak{C}_1);$$

oder, da $XX' \equiv AB$, $YY' \equiv CD$ ist:

$$(XX' BA) = - (YY' CD);$$

ebenso:

$$(ZZ' BA) = - (WW' CD).$$

Aus beiden folgt durch Division, weil $X \equiv Z'$, $Y \equiv W'$:

$$(ABX'Z) = (DCY'W);$$

dies bedeutet aber, dass $X'Y'$ und ZW auf derselben Fläche durch $ABCD$ liegen, in der sich demnach die beiden entsprechenden Flächen derjenigen, von der wir ausgingen, vereinigen.

10. Gehen wir wieder zu der durch 2 Bedingungen bestimmten Collineation zurück. *Der Büschel $(ABCD)$ hat mit dem Netze der sich selbst entsprechenden Flächen das Ebenenpaar $\alpha\gamma$ gemein. Also befinden sich beide in demselben Flächengebüsche, das ebenfalls in sich dual ist. Jeder Fläche dieses Gebüsches entspricht eine gewisse andere Fläche desselben in beiderlei Sinne.*)*

Sei \mathfrak{A}^2 eine Fläche des Gebüsches; wir verbinden sie mit zwei Flächen \mathfrak{B}^2 , \mathfrak{C}^2 des Büschels $(ABCD)$ durch Büschel; diese schneiden das Netz in den Flächen \mathfrak{D}^2 , \mathfrak{E}^2 , welche mit dem Ebenenpaare $(\alpha\gamma)$

*) Voss, a. a. O. S. 370.

in demselben Büschel sich befinden. Sind $\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{C}_1^2$ die entsprechenden Flächen in $(ABCD)$, so gehören $\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{D}^2, \mathfrak{E}^2$ zu einem Netze, da die Büschel $(\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{C}_1^2)$ und $(\mathfrak{D}^2, \mathfrak{E}^2)$ das Paar $(\alpha\gamma)$ gemein haben; also haben auch $(\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{D}^2)$ und $(\mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{E}^2)$ eine Fläche gemein, welche der \mathfrak{X}^2 in beiderlei Sinne entspricht, da $\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{C}_1^2, \mathfrak{D}^2, \mathfrak{E}^2$ den $\mathfrak{B}^2, \mathfrak{C}^2, \mathfrak{D}^2, \mathfrak{E}^2$ so entsprechen.

11. Nehmen wir das Haupttetraeder $ABCD$ zum Coordinatentetraeder, so dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Gleichungen $x_1 = 0, \dots, x_4 = 0$ haben; dann ist die Beziehung zwischen den Coordinaten entsprechenden Punkte:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_{11}x_1 : a_{22}x_2 : a_{33}x_3 : a_{44}x_4.$$

Einer Fläche des Büschels $(ABCD)$ $x_1x_3 + \lambda x_2x_4 = 0$, $y_1y_3 + \lambda y_2y_4 = 0$ entsprechen, je nachdem sie zum ersten (x_i) oder zweiten Raume (y_i) gerechnet wird, die Flächen:

$$a_{22} a_{44} y_1 y_3 + \lambda a_{11} a_{33} y_2 y_4 = 0,$$

$$a_{11} a_{33} x_1 x_3 + \lambda a_{22} a_{44} x_2 x_4 = 0.$$

Die beiden Bedingungen: $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$, $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -(XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ sind ausgedrückt durch die Coefficienten-Relationen: $a_{22} = -a_{44}$, $a_{11}a_{33} = -a_{22}a_{44}$ *); man sieht, wie in Folge der letztern jene beiden Flächen sich in: $y_1y_3 - \lambda y_2y_4 = 0$ vereinigen.

Das Netz der sich selbst entsprechenden Flächen ist:

$$x_2^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1 x_3 = 0,$$

und das Gebüsch der sich involutorisch entsprechenden Flächen, welches das Netz umfasst:

$$x_2^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1 x_3 + \nu x_2 x_4 = 0.$$

IV.

12. Betrachten wir noch in Kürze die bekannten speciellen Fälle der Collineation.

Wir haben zunächst die „*Collineation mit Axen*“, bei welcher alle Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte zwei feste Geraden (Axen) u, v so in U, V treffen, dass das Doppelverhältniss $(XX'UV)$ einen constanten Werth hat. Ist er -1 , dann hat man die geschaart-involutorische Collineation.***) Bei jeder Collineation mit Axen geht jede der ∞^3 Flächen 2. Grades, die durch die Axen gelegt sind, in sich selbst über und zwar auf die erste Art; in der Schaar, welche sich auf

*) Im vorigen Falle (Nr. 6) ist $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ äquivalent mit: $a_{11}a_{33} = a_{22}a_{44}$.

**) Reye, Geometrie der Lage, Abth. II, 17. Vortrag der 2. Aufl.

u, v stützt, geht jede Gerade in sich selbst über, in der andern Schaar im Allgemeinen nur die Axen. Jede gegebene Fläche 2. Ordnung kann durch ∞^3 solche Collineationen (unter denen sich ∞^2 geschaart-involutorische befinden) in sich transformirt werden, indem nach der Wahl der Axen noch das Doppelverhältniss freisteht.

Eine geschaart-involutorische Collineation transformirt noch auf eine andere, als die eben besprochene Weise, Flächen 2. Grades in sich selbst. Wenn zwei Gerade u, v Polaren in Bezug auf eine Fläche 2. Grades sind*), so schneidet jede Gerade, welche u, v trifft, die Fläche in zwei zu den Treffpunkten mit u, v harmonischen Punkten. Daraus folgt, dass durch die geschaart-involutorische Collineation, von welcher u, v die Axen (Involutionsaxen) sind, die Fläche in sich selbst transformirt wird, und man sieht, dass jede gegebene Fläche 2. Grades durch ∞^4 geschaart-involutorische Collineationen in dieser Weise in sich transformirt wird, und dass jede gegebene geschaart-involutorische Collineation ∞^5 Flächen 2. Grades in sich transformirt, die ein in sich duales lineares System 5. Stufe bilden. Auch diese Transformationen sind erster Art. — Es ist bekannt, dass, wenn eine Homologie (perspective Collineation) eine allgemeine Fläche 2. Grades in sich transformirt, dann Centrum und Ebene der Homologie Pol und Polarebene für die Fläche sein müssen; also ist die Homologie harmonisch oder involutorisch und keine andere Homologie kann eine Fläche 2. Grades in sich transformiren, als die involutorische. Diese Transformation ist zweiter Art, da entsprechende Geraden sich schneiden. Jede gegebene Fläche 2. Grades wird durch ∞^3 Homologien in sich transformirt, und jede involutorische Homologie transformirt ∞^6 Flächen 2. Grades in sich.

13. Sehen wir zu, wie für diese speciellen Fälle die Bedingungen erfüllt werden. Für jede Collineation mit Axen u, v giebt es ∞^4 sich selbst entsprechende Tetraeder, alle, welche u, v zu Gegenkanten haben. Im Falle der allgemeinen Collineation mit Axen hat das Kantenvierseit des Tetraeders, durch das eine sich selbst entsprechende Fläche geht, diese Axen zu Gegenseiten: A, B liegen auf u , C, D auf v ; alle XX' treffen u, v : in U, V ; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ fallen nach V , $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ nach U und $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ werden beide 1 und daher gleich. Sollen aber bei der geschaart-involutorischen Collineation u, v Polaren für eine sich selbst entsprechende Fläche sein, so sind sie die Diagonalen AC, BD eines der genannten Kantenvierseite; also fallen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ nach V , $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ nach U und die beiden Invarianten $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (XX'\mathfrak{D}\mathfrak{C})$ werden gleich, weil $(XX'UV) = -1$.

Bei der Homologie hat man ∞^6 sich selbst entsprechende Tetraeder mit einer festen Ecke D im Centrum und A, B, C beliebig in

*) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 318.

der Ebene δ der Homologie. Weil alle XX' durch D gehen, so fallen \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} nach D , \mathfrak{D} aber fällt in den Schnitt \bar{U} mit δ . Die Bedingung: $(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$ wird also stets erfüllt; die andere aber: $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = -1$ nur dann, wenn $(XX'D\bar{U}) = -1$, d. h. nur bei der involutorischen Homologie.

14. In Bezug auf den Kegelschnitt gilt:

Jeder gegebene Kegelschnitt wird durch ∞^3 Collineationen in sich selbst transformirt. Eine beliebige Collineation zweier Felder derselben Ebene transformirt keinen allgemeinen Kegelschnitt in sich selbst. Transformirt aber eine Collineation einen Kegelschnitt in sich, so transformirt sie ∞^1 Kegelschnitte, welche sich doppelt berühren mit einer Seite des Hauptdreiecks (sich selbst entsprechenden Dreiecks) als Berührungsschne und den beiden andern als Tangenten.) Sind \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} die Schnitte irgend einer Verbindungslinie entsprechender Punkte X , X' mit den Seiten des Hauptdreiecks, also $(XX'\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, $(XX'\mathfrak{C}\mathfrak{A})$, $(XX'\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ die drei Invarianten, so müssen im vorliegenden Fall zwei von diesen Invarianten gleich sein.*

V.

15. *Es sei nun eine Correlation betrachtet, welche eine Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 auf die erste Art in sich transformirt. Die Ecken des Vierseits der sich selbst entsprechenden Geraden g_1, g_2, l_1, l_2 von \mathfrak{A}^2 seien, wie in Nr. 5, mit A, B, C, D bezeichnet. Jedem dieser Punkte entspricht seine Berührungsebene in beiderlei Sinne; ebenso entsprechen sich die Diagonalen AC, BD in beiderlei Sinne. Also ist $ABCD$ das Vierseit, in dem sich die Kernflächen der Correlation durchschneiden**). Nennen wir dieses Vierseit das Hauptvierseit der Correlation und das zugehörige Tetraeder das Haupttetraeder.*

Umgekehrt, wenn eine beliebige Correlation vorliegt, so legen wir durch das Hauptvierseit $ABCD$ derselben eine Fläche 2. Grades; die ihr im zweiten Raume durch die Correlation entsprechende Fläche muss gleichfalls durch das Vierseit gehn, weil dessen Seiten sich selbst entsprechen. In der Projectivität, die wiederum in dem Büschel $(ABCD)$ entsteht, correspondirt jede der beiden ausgearteten Flächen, von denen die eine aus dem Ebenenpaare (β, δ) und dem Punktepaare (A, C) , die andere aus (α, γ) und (B, D) besteht, der andern. Folglich erhalten wir zwei allgemeine sich selbst entsprechende Flächen, und damit ein anderes Resultat als bisher;

Jede Correlation transformirt auf die erste Art zwei allgemeine

*) Hermite, a. a. O. S. 312; Klein, Math. Ann. Bd. IV, S. 601; Frahm, a. a. O. S. 3; Rosanes, a. a. O. S. 67.

**) Schröter, Journ. f. Math. Bd. 77, S. 105 B.

Flächen in sich selbst. Dieselben gehören zu dem Büschel (oder der Schaar) der beiden Kernflächen).*

16. Die Projectivität im Büschel ($ABCD$) ist aber eine Involution; denn die beiden ausgearteten Mitglieder desselben, die „Ebenen-Punkt-Paare“ $(\beta, \delta; A, C)$, $(\alpha, \gamma; B, D)$ entsprechen sich ersichtlich in beiderlei Sinne. Da dies für den Beweis der Involution genügt, so ist dieselbe auch dargethan für den etwaigen Fall eines Nullsystems, bei dem ja die Kernflächen nicht existiren. Sonst aber kann man auch diese benutzen; auch sie entsprechen sich in beiderlei Sinne; denn die Ebenen, welche einem und demselben Punkt der Punkt-Kernfläche, insofern er zum ersten oder zweiten Raume gerechnet wird, durch die Correlation im andern entsprechen, berühren beide die Ebenen-Kernfläche.

*In dem Büschel der Kernflächen entsprechen sich also bei jeder Correlation zwei Flächen stets involutorisch.**)*

Sind demnach X', Y die beiden Pole derselben Ebene $\xi \equiv \eta'$, so liegen dieselben stets auf derselben Fläche des Büschels der Kernflächen, derjenigen, welche zu der von $\xi \equiv \eta'$ berührten in der Involution gepaart ist, und ebenso tangiren die beiden Polarebenen eines Punktes dieselbe Fläche dieses Büschels.

Trifft die Gerade, welche die beiden Pole X', Y verbindet, — Wechselstrahl nach Herrn Schröter,***) — die Ebenen des Haupttetraeders $ABCD$ in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$; so sind $X', Y; \mathfrak{A}, \mathfrak{C}; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ in Involution.

Auf jedem Wechselstrahle einer (nicht involutorischen) Correlation sind die beiden verbundenen Pole und die Schnittpunktpaare mit den beiden Ebenenpaaren durch das Hauptvierseit in Involution; wozu es selbstverständlich einen dualen Satz giebt.

17. Als Doppelemente der Involution sind die beiden sich selbst entsprechenden Flächen harmonisch sowohl zu den Kernflächen als auch zu den Ebenen-Punkt-Paaren.

Die Harmonicität zu den letzteren lässt sich noch anders aussprechen.

Wenn zwei Flächen 2. Grades $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$, die sich in einem windschiefen Vierseite durchschneiden, zu den Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch sind, so heisst das: die Polarebenen A irgend eines Punktes nach ihnen sind harmonisch. Eine Gerade g , welche die beiden Doppellinien der Ebenenpaare (oder die Diagonalen des Vierseits) in U, V trifft, schneide $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ in $A_1, A_2; B_1, B_2$. Die Polarebenen von A_1 nach den beiden Ebenenpaaren gehen bez. durch die Doppellinien und treffen g in U, V ; die Polarebene nach \mathfrak{A}^2 ist die Tangentialebene

*) Voss, a. a. O. S. 364, 370.

**) Voss, an der eben angeführten Stelle.

***) a. a. O. S. 132.

und trifft g in A_1 ; die Polarebene von A_1 nach \mathfrak{B}^2 trifft g im vierten harmonischen Punkte von A_1 nach B_1, B_2 , nach Vor. aber im vierten harmonischen Punkt zu A_1 nach U, V ; letzterer ist aber, da g den Büschel in einer Involution mit U, V als Doppelpunkten schneidet, der Punkt A_2 . Demnach sind A_1, A_2 harmonisch zu B_1, B_2 . Also:

Wenn zwei sich in einem windschiefen Vierseite durchschneidende Flächen 2. Grades zu den beiden Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch sind, so werden sie von jeder Geraden, welche die beiden Diagonalen des Vierseits trifft, harmonisch geschnitten; wobei dann von den beiden Schnittpunkte-Paaren stets eins und nur eins reell ist.

Umgekehrt, wenn zwei sich in einem Vierseite durchschneidende Flächen 2. Grades von irgend einer beide Diagonalen des Vierseits treffenden Geraden harmonisch geschnitten werden, so sind sie zu den Ebenenpaaren ihres Büschels harmonisch und werden von jeder die Diagonalen treffenden Geraden harmonisch geschnitten.

Verbinde ferner g_1 die Punkte U_1, V_1 , welche zu U nach A, C und zu V nach B, D harmonisch sind, so ist dieselbe bekanntlich Polare von g nach allen Flächen des Büschels; da A_1, A_2 nach \mathfrak{B}^2 conjugirt sind, so sind die Polarebenen von A_1, A_2, B_1, B_2 nach \mathfrak{B}^2 bez. $g_1 (A_2, A_1, B_1, B_2)$; weil g_1 auch Polare von g nach \mathfrak{A}^2 ist, so sind die vier Ebenen Tangentialebenen von g_1 an $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$; also haben wir eine Gerade g_1 , von welcher an die beiden Flächen 4 harmonische Berührungsebenen kommen; und demnach gilt dies für jede AC, BD treffende Gerade. *Folglich besteht die duale Eigenschaft zugleich.*

Zu jeder Fläche \mathfrak{A}^2 gibt es ∞^4 Flächen \mathfrak{B}^2 , die sich zu ihr in dieser Beziehung befinden: durch jedes der ∞^4 auf \mathfrak{B}^2 befindlichen Vierseite geht eine. Also ist die Beziehung für jede der beiden Flächen, wenn die andere gegeben ist, eine fünffache Bedingung. Nennen wir zwei Flächen 2. Grades in dieser Beziehung harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt.

Sie bilden das eine räumliche Analogon zu je zwei der „vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte“, welche in § 54 der ersten, § 53 der zweiten Auflage der Steiner-Schröter'schen Vorlesungen behandelt werden; denn je zwei dieser Kegelschnitte berühren sich doppelt und werden, wie leicht aus den dortigen Betrachtungen hervorgeht, von jedem Strahle durch den Berührungspol (Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten nach Steiner und Chasles) in vier harmonischen Punkten geschnitten (und erhalten aus jedem Punkte der Berührungsehne vier harmonische Tangenten).*) Das zweite räumliche Analogon

*) Dass zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte von allen Strahlen durch den Berührungspol nach constantem Doppelverhältniss geschnitten werden, folgt aus Chasles' Sections coniques Nr. 471 oder wird mit Hilfe der Homologie

bilden zwei harmonischzugeordnete Flächen 2. Grades mit conischer Berührung, d. h. zwei Flächen 2. Grades, die sich so längs eines Kegelschnitts tangiren, dass irgend ein Strahl aus dem Berührungspole und in Folge dessen jeder solche sie harmonisch schneidet (und jede Gerade in der Ebene des Tactionskegelschnitts ihnen vier harmonische Berührungsebenen zusendet)**).

Zu jeder gegebenen Fläche 2. Grades gibt es ∞^3 andere, welche ihr harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung; so dass diese Beziehung für jede der beiden Flächen, wenn die andere gegeben ist, eine sechsfache Bedingung ist.

18. Nun können wir das obige Resultat auch so aussprechen:

Die beiden Flächen 2. Grades, welche durch eine Correlation gleichzeitig in sich transformirt werden, sind harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt.

Ehe die Umkehrung besprochen wird, muss klargestellt werden, ob beliebige zwei Flächen 2. Grades $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{D}^2$, die sich in einem Vierseite $ABCD$ durchschneiden, stets Punkt- und Ebenen-Kernfläche einer Correlation sind. Wir legen von einem beliebigen Punkte P der \mathfrak{G}^2 eine der ∞^1 Tangentialebenen Π' an \mathfrak{D}^2 , und lassen nun den Punkten A, B, C, D, P aus dem ersten Raume die Ebenen DAB, ABC, BCD, CDA und Π' im zweiten correspondiren. Die Geraden AB, BC, CD, DA entsprechen sich selbst und der Ebene DAB aus dem ersten Raume entspricht der Punkt (CDA, DAB, ABC) , d. i. A im zweiten, etc.; die Diagonalen AC, BD entsprechen sich involutorisch. Das Vierseit $ABCD$ ist das Hauptvierseit der Correlation, und, da P mit Π' incidirt, so gehört P der Punkt- und Π' der Ebenen-Kernfläche an, welche demnach mit den gegebenen Flächen coincidiren. Weil $\Pi' \infty^1$ Lagen einnehmen kann, so sind $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{D}^2$ für ∞^1 Correlationen die Kernflächen.

Nun seien $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ zwei Flächen 2. Grades, welche harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt sind; $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{D}^2$ seien zwei zu ihnen harmonische Flächen ihres Büschels. Dann geht in jeder Correlation, für welche $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{D}^2$ die Kernflächen sind, jede der beiden Flächen $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ in sich selbst über.

Demnach gibt es ∞^2 Correlationen, durch welche zwei Flächen 2. Grades, die harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt sind, gleichzeitig in sich transformirt werden und zwar auf die erste Art.

bewiesen. Die Uebertragung auf zwei Flächen 2. Grades mit conischer Berührung d. h. die sich längs eines Kegelschnitts tangiren, ist selbstverständlich.

**) In Bezug auf die beiden räumlichen Analoga zu zwei sich doppelt-berührenden Kegelschnitten sehe man Herrn Schröter's Oberflächen 2. Ordnung S. 699.

VI.

19. Lassen wir aber \mathbb{G}^2 mit einer der beiden gegebenen Flächen, etwa mit \mathbb{B}^2 , zusammenfallen, so vereinigt sich auch \mathbb{D}^2 mit \mathbb{B}^2 . Wir haben auch jetzt ∞^1 Tangentialebenen Π' aus einem beliebigen Punkt P von \mathbb{B}^2 an \mathbb{B}^2 und also ∞^1 Correlationen. Aber nur wenn Π' in P selbst die \mathbb{B}^2 berührt, erhalten wir die Polarcorrelation (Polarsystem), für welche \mathbb{B}^2 Basisfläche ist. Dass dieselbe \mathbb{B}^2 in sich selbst transformirt, ist evident. Wir haben noch zu zeigen, dass durch sie auch \mathbb{A}^2 in sich übergeht. In der That, wenn g die Gerade ist, die von einem beliebigen Punkte A_1 von \mathbb{A}^2 ausgeht und die Diagonalen des Durchschnitts-Vierseits $ABCD$ von \mathbb{A}^2 , \mathbb{B}^2 trifft, so ist, wie in Nr. 17 sich ergab, die Polarebene von A_1 nach \mathbb{B}^2 die Berührungsebene von \mathbb{A}^2 im zweiten Schnitte von g .

Bewegt sich A_1 auf einer Geraden a_1 von \mathbb{A}^2 , so durchläuft der Berührungspunkt A_2 der polaren Tangentialebene die Gerade a_2 , welche in der Regelschaar (a_1, AC, BD) zu a_1 in Bezug auf AC, BD harmonisch ist; also gehören a_1 und a_2 zur selben Schaar auf \mathbb{A}^2 .

Demnach ist jede von zwei Flächen 2. Grades \mathbb{A}^2 , \mathbb{B}^2 , welche harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, zu sich selbst polar in Bezug auf die andere und zwar auf die erste Art, so dass jede der beiden Geradenschaaren in sich selbst übergeht.

20. Damit findet meine Mittheilung in diesen Annalen Bd. 25, S. 236 eine nothwendige Ergänzung, auf die ich schon in einer Schlussbemerkung derselben hingewiesen habe.

Es giebt zwei wesentlich verschiedene Weisen, wie eine Fläche \mathbb{A}^2 zu sich selbst polar sein kann in Bezug auf eine andere \mathbb{B}^2 : entweder sind \mathbb{A}^2 und \mathbb{B}^2 zu einander harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt oder harmonisch-zugeordnet mit conischer Berührung: der letztere Fall ist a. a. O. allein besprochen. In jenem Falle ist die Transformation von \mathbb{A}^2 in sich selbst von der ersten, in diesem von der zweiten Art (vergl. a. a. O. Nr. 7).

In beiden Fällen ist dann auch \mathbb{B}^2 zu sich selbst polar in Bezug auf \mathbb{A}^2 .

Hält man die eine Fläche, etwa \mathbb{B}^2 , fest, so ist im ersten Falle das System der Flächen \mathbb{A}^2 , die nach \mathbb{B}^2 zu sich selbst polar sind oder nach denen \mathbb{B}^2 zu sich selbst polar ist, das System 4. Stufe der Flächen \mathbb{A}^2 , welche zu \mathbb{B}^2 harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt; im zweiten Falle erhält man das System 3. Stufe der Flächen \mathbb{A}^2 , die zu \mathbb{B}^2 harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung. Letzteres ist nicht in ersterem enthalten. Beide Systeme sind in sich dual. Ueber das System 3. Stufe bringt meine kürzliche Note einige weitere Mittheilungen.

21. In dieser Note wurde auch gezeigt, dass, wenn \mathfrak{A}^2 , \mathfrak{B}^2 harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Berührung, zwei Punkte A_1 , A_2 von \mathfrak{A}^2 , von denen jeder zu der Berührungsebene α_2 , α_1 des andern nach \mathfrak{B}^2 polar ist, sowie auch die beiden Berührungsebenen α_1 , α_2 einander entsprechen in der involutorischen Homologie (Nr. 12), für welche der Berührungspol und die „Berührungsebene“ von \mathfrak{A}^2 , \mathfrak{B}^2 Centrum und Ebene sind. *Jede der ∞^3 Polarcorrelationen, durch welche eine Fläche \mathfrak{A}^2 in sich selbst auf die zweite Art transformirt wird, ist je mit einer der ∞^3 involutorischen Homologien, welche dasselbe leisten, verbunden.*

Aber ebenso, wenn \mathfrak{A}^2 , \mathfrak{B}^2 harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt und A_1 und α_2 , A_2 und α_1 von \mathfrak{A}^2 polar sind nach \mathfrak{B}^2 , so sind auch A_1 und A_2 , α_1 und α_2 entsprechend in der geschaart-involutorischen Collineation, von welcher die Diagonalen des Durchschnitts-Vierseits die Axen sind. *Und es ist jede der ∞^4 Polarcorrelationen, welche \mathfrak{A}^2 in sich selbst transformiren auf die erste Art, verbunden mit je einer der ∞^4 geschaart-involutorischen Collineationen, welche dasselbe leisten und polare Geraden von \mathfrak{A}^2 zu Axen haben.* (Nr. 12).

22. Der Beweis in Nr. 1 der erwähnten Note wird bei zwei sich in einem Vierseite durchschneidenden Flächen \mathfrak{A}^2 , \mathfrak{B}^2 dadurch illusorisch, dass dann p' mit p identisch wird und auf die gemeinsame Tangentialebene nicht geschlossen werden kann. Es ist vielmehr zu schliessen: Zwei Flächen 2. Grades, von denen eine zu sich selbst polar ist nach der andern, durchschneiden sich entweder in einem Vierseite oder tangiren sich conisch; in beiden Fällen hat dann der Beweis der harmonischen Eigenschaft zu folgen.

Zwischen den beiden Systemen 4. und 3. Stufe der Basisflächen \mathfrak{B}^2 — die wir nun als Flächen \mathfrak{B}_1^2 , \mathfrak{B}_2^2 unterscheiden wollen — für die Polarcorrelationen, welche \mathfrak{A}^2 in sich selbst überführen, besteht folgende Beziehung. Seien b_1 , b_2 zwei Polaren nach \mathfrak{A}^2 , \mathfrak{B}_1^2 die zu \mathfrak{A}^2 harmonisch-zugeordnete Fläche durch dasjenige Vierseit auf \mathfrak{A}^2 , von dem b_1 , b_2 die Diagonalen sind. Auf jedem Strahle, welcher b_1 , b_2 trifft, sind die Schnitte mit \mathfrak{B}_1^2 harmonisch sowohl zu denen mit \mathfrak{A}^2 , als zu denen mit b_1 , b_2 , folglich sind sie die Doppelpunkte der durch die beiden letzteren Paare bestimmten Involution. Mithin ist \mathfrak{B}_1^2 mit der in Nr. 8 der Note gewonnenen Fläche \mathfrak{B}^2 identisch, d. i. mit dem Orte der nach \mathfrak{A}^2 genommenen Pole B der Ebenen β , längs deren Schnittcurven mit \mathfrak{A}^2 diese Fläche von solchen Flächen \mathfrak{B}_2^2 berührt wird, welche b_1 und deshalb auch b_2 tangiren. Die Ebenen β umhüllen die Polarfläche von \mathfrak{B}_1^2 ($\equiv \mathfrak{B}^2$) nach \mathfrak{A}^2 , also nicht, wie früher behauptet wurde, eine von \mathfrak{B}_1^2 verschiedene Fläche, sondern \mathfrak{B}_1^2 selbst auf Grund der jetzigen Resultate; so dass die Worte „von ihr verschiedene“ am Schlusse der Nr. 8 und der betreffende Theil des Beweises zu tilgen sind.

23. Ich muss zum Schlusse dieser Bemerkungen über Polarcorre-

lationen noch erwähnen, dass ich bei der Abfassung der Note an die Abhandlung des Herrn H. Thieme*): „Ueber die Flächen 2. Grades, für welche zwei Flächen 2. Grades zu einander polar sind,“ mich leider nicht erinnert habe. Derselbe findet hinsichtlich der 8 Basisflächen P , zu denen sein Problem führt**), dass jede von ihnen ihre eigene Polarfläche ist nach jeder der 7 andern, dass sie in zwei Gruppen von je 4 zerfallen, derartig, dass (unter Anwendung meiner Terminologie) irgend zwei Flächen aus derselben Gruppe harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, irgend zwei aber aus verschiedenen Gruppen harmonisch-zugeordnet sind mit conischer Taction. *Es sind demnach dort in der That die beiden Arten gefunden, wie eine Fläche 2. Grades zu sich selbst polar sein kann nach einer andern.* Es wird dann weiter gezeigt, dass, wenn eine beliebige Fläche \mathfrak{A}^2 als eine der P gewählt wird, vermittelt irgend eines ihrer Polartetraeder die 7 andern gefunden werden: vier sind die der gegebenen harmonisch-zugeordneten, welche sie bez. längs ihrer Schnitte mit den Ebenen des Tetraeders berühren, die drei andern sind die der \mathfrak{A}^2 harmonisch-zugeordneten, welche durch ein Vierseit auf \mathfrak{A}^2 gehen, dessen Seiten die 4 Schnitte von \mathfrak{A}^2 mit zwei Gegenkanten des Tetraeders verbinden und von dem also diese Kanten die Diagonalen sind. Lässt man das Polartetraeder alle möglichen Lagen einnehmen, so erhält man durch die 4 einen und die 3 andern Flächen die beiden Systeme 3. und 4. Stufe der Flächen $\mathfrak{B}_1^2, \mathfrak{B}_2^2$. Die Stufenzahlen 3, 4 hat jedoch Herr Thieme noch nicht ermittelt.

24. In Nr. 19 ergab sich, dass es ∞^1 Correlationen giebt, welche $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ in sich transformiren und deren Kernflächen sich in \mathfrak{B}^2 (oder \mathfrak{A}^2) vereinigen; und nur eine von ihnen ist, wie gesagt, Polarcorrelation. *In der That können die beiden Kernflächen einer räumlichen Correlation identisch werden, ohne dass dieselbe in eine Polarcorrelation übergeht;* während in der Ebene Identität der Kerncurven Polarcorrelation zur Folge hat***).

*) Dissertation von Breslau 1877; auch abgedruckt in der Zeitschrift für Math. Bd. 22, S. 377.

**) Dieselben und ihre Haupteigenschaften behandelt auch Herr d'Ovidio (Giornale di Matematiche Bd. 10 (1872) S. 313). Dort ist auch das analoge Problem auf der Geraden und in der Ebene besprochen. Das ebene Problem ist schon vorher in zwei kurzen Bemerkungen von Steiner und Cremona und dann eingehender von den Herren Rosanes (De polarium reciprocarum theoria observationes, Dissertation von Breslau, 1865) und Schröter (Steiner'sche Vorlesungen über synth. Geom. an der in Nr. 17 erwähnten Stelle) behandelt. An beiden Orten wird auch die Eigenschaft der 4 Kegelschnitte gewonnen, dass jeder seine eigene Polarcurve ist in Bezug auf jeden der 3 andern.

***) Man sehe auch Battaglini in Bd. 12 der Memorie della R. Accademia dei Lincei (1882): *Sulle forme quaternarie bilineari* (auf welchen mir hier nicht züglichen Aufsatz mich Herr Klein aufmerksam gemacht hat).

Macht man das Haupttetraeder einer Correlation (deren Haupt-
vierreit $ABCD$ ist) zum Coordinatentetraeder in derselben Weise wie
in Nr. 11, so ist die Beziehung zwischen den Coordinaten x_i, y_i con-
jugirter Punkte der beiden Räume:

$$a_{13}x_1y_3 + a_{24}x_2y_4 + a_{31}x_3y_1 + a_{42}x_4y_2 = 0;$$

dem Punkte x_i entspricht also die Ebene:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31}x_3 : a_{42}x_4 : a_{13}x_1 : a_{24}x_2,$$

dem Punkte y_i aber die Ebene:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = a_{13}y_3 : a_{24}y_4 : a_{31}y_1 : a_{42}y_2.$$

Nehmen wir nun an, dass $a_{13} : a_{24} = a_{31} : a_{42} (= k)$, so sind die beiden
Kernflächen:

$$x_1x_3 + kx_2x_4 = 0, \quad k\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4 = 0;^*)$$

das sind aber Punkt- und Tangentialgleichung der nämlichen Fläche.
Nur wenn auch $a_{13} = a_{31}$, haben wir Polarcorrelation. Die beiden in
sich transformirten Flächen sind:

$$x_1x_3 + kx_2x_4 = 0, \quad x_1x_3 - kx_2x_4 = 0.$$

25. *Unter den ∞^2 Correlationen, welche die Flächen 2. Grades $\mathcal{H}^2, \mathcal{B}^2$, die harmonisch-zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, auf die erste Art in sich transformiren (Nr. 18), befinden sich auch zwei Nullsysteme.*

Wenn durch ein Nullsystem eine Fläche 2. Grades in sich transformirt wird, so geht von der einen Regelschaar derselben jede Gerade in sich selbst über, ist ein Leit- oder Nullstrahl des Nullsystems und die Fläche ist Träger einer in dem zugehörigen linearen Complex befindlichen Regelschaar; von der andern Schaar entsprechen nur zwei Strahlen sich selbst, die übrigen entsprechen sich involutorisch.

In der That, ist P ein Punkt der Fläche, so berührt auch seine Nullebene dieselbe und enthält, da sie mit ihm incidirt, die eine der beiden in ihm sich schneidenden Geraden der Fläche. Diese ist demnach ein sich selbst entsprechender Strahl des Nullsystems. Von den so bei 5 Punkten der Fläche sich ergebenden sich selbst entsprechenden Strahlen müssen mindestens drei der nämlichen Schaar angehören; woraus folgt, dass jeder Strahl dieser Schaar sich selbst correspondirt.

∞^2 Nullsysteme, nämlich jedes, dessen linearer Complex die eine oder andere Regelschaar der Fläche enthält, transformiren die Fläche in sich selbst. Und jedes Nullsystem transformirt ∞^6 Flächen 2. Grades in sich, denn so viele Regelschaaren enthält ein linearer Complex.

*) Wofern $a_{13} + a_{31} \geq 0$; denn es ist durch $a_{13} + a_{31}$ dividirt; verschwindet diese Grösse, so ist die Correlation ein Nullsystem, bei dem ja die Gleichungen der Kernflächen Identitäten sind.

Sei $g_1 l_1 g_2 l_2$ das Durchschnitts-Vierseit der beiden harmonisch-zugeordneten Flächen $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$. Jede Correlation (und also auch jedes Nullsystem), bei der diese 4 Geraden sich selbst entsprechen und welche die eine der beiden Flächen in sich transformirt, transformirt nach Nr. 16, 17 auch die andere in sich. Wenn nun bei einem Nullsysteme, welches dies thut, auf \mathfrak{A}^2 alle Geraden aus der Schaar der g sich selbst entsprechen, so gilt dies auf \mathfrak{B}^2 für die Schaar der l . Denn wären auch hier alle g sich entsprechend, so würde, wenn g', g'' die beiden durch einen Punkt von l_1 gehenden Geraden g auf $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ sind, die Nullebene dieses Punktes die 3 Geraden l_1, g', g'' enthalten, also in ihm beide Flächen berühren; was bei einem beliebigen Punkte von l_1 nicht der Fall ist. Ist demnach g_3, l_3 je eine dritte Gerade in jeder der beiden Schaaren von \mathfrak{A}^2 , so liefern die beiden linearen Complexe $(g_1, l_1, g_2, l_2, g_3), (g_1, l_1, g_2, l_2, l_3)$ die beiden Nullsysteme. Das eine transformirt jede Gerade g von \mathfrak{A}^2 und jede Gerade l von \mathfrak{B}^2 , das andere jede Gerade l von \mathfrak{A}^2 und jede Gerade g von \mathfrak{B}^2 in sich selbst.*) —

Betrachten wir das erste Nullsystem und die Fläche \mathfrak{A}^2 ; es seien A_1 und α_2 ein Punkt derselben und seine Nullebene; beide sind mit derselben g incident; A_2 sei der Berührungspunkt von α_2 ; so sind die durch A_1 und A_2 gehenden Geraden l harmonisch zu den sich selbst entsprechenden l_1, l_2 , also auch A_1, A_2 harmonisch zu $g l_1, g l_2$.

Mit jedem der ∞^2 Nullsysteme, die eine gegebene Fläche 2. Grades in sich transformiren, ist demnach, in ähnlicher Weise wie bei den Polarcorrelationen (Nr. 21), eine der ∞^2 geschaart-involutorischen Collineationen verbunden, die dies thun, deren Axen aber Gerade der Fläche sind, nicht Polaren. (Nr. 12 Anfang).

VII.

26. Wir haben jetzt die Transformation einer Fläche 2. Grades \mathfrak{A}^2 in sich selbst durch eine Correlation auf die zweite Art zu untersuchen. Wir bezeichnen, wie in Nr. 7, die Punkte $g_1 l_1, g_1 l_2, g_2 l_2, g_2 l_1$ mit A, E, C, F . Die Punkte A, C haben dann in beiderlei Sinne die Ebenen $g_1 l_1, g_2 l_2$, die in ihnen \mathfrak{A}^2 tangiren, zu entsprechenden,

*) Es besteht ein Satz: Wenn die einen Regelschaaren G, G' zweier Flächen 2. Grades einem linearen Complexe Γ angehören, so thun es auch die beiden andern L, L' . Die lineare Congruenz, welche durch G und eine beliebige Gerade g_1' von G' bestimmt ist, befindet sich in Γ und hat deshalb mit G' noch eine zweite Gerade g_2' gemein; ihre Leitlinien, zwei Gerade l_1, l_2 von L , treffen also g_1', g_2' . Durch L und l_1', l_2' , zwei Gerade von L' , ist ein zweiter linearer Complex Λ bestimmt; zu ihm gehört die Congruenz (l_1, l_2, l_1', l_2') ; deren Directricen sind g_1', g_2' und folglich gehört die ganze Schaar L' zu ihr und also auch zu Λ , welcher demnach L und L' umfasst.

den Punkten E, F entsprechen die Ebenen $l_1 g_2, l_2 g_1$ doppelt, die Geraden AC und EF entsprechen sich gegenseitig doppelt. Auf der Geraden EF haben wir in den Punkten E, F zwei doppelt conjugirte Punkte, also eine Involution doppelt conjugirter Punkte und in Folge dessen auch eine Involution doppelt conjugirter Ebenen um AC . Es seien B, D die Doppelpunkte der ersteren Involution und demnach $AC(B, D)$ die Doppelgeraden der letzteren, welche den B, D in beiderlei Sinne entsprechen. Demnach entspricht jede der 4 Geraden AB, BC, CD, DA sich selbst und wir haben in $ABCD$ das Hauptvierseit der Correlation. Da nun im Allgemeinen keine der beiden Diagonalen des Hauptvierseits eine Involution doppelt conjugirter Punkte trägt, so folgt:

Bei einer beliebigen Correlation giebt es keine allgemeine Fläche 2. Grades, die durch sie auf die zweite Art in sich transformirt wird.

27. *Liegt aber auf einer der beiden Diagonalen, BD , des Hauptvierseits einer Correlation ein Paar und in Folge dessen eine Involution doppelt conjugirter Punkte, was eine einfache Bedingung für die Correlation ist; so liefert jedes Paar E, F derselben mit A, C verbunden zwei Geradenpaare $AE, AF; CE, CF$, die sich in beiderlei Sinne entsprechen; denn E und A haben in beiderlei Sinne ACF und DAB zu entsprechenden Ebenen, so dass der AE die Schnittlinie AF in beiderlei Sinne correspondirt. In dieser Correlation treten also zu den Diagonalen AC, BD , die sonst das einzige Paar (nicht vereinigter) in beiderlei Sinne sich entsprechender Geraden sind,*) noch ∞^1 Paare involutorisch sich entsprechender Geraden.*

Jeder Fläche 2. Grades durch eines dieser Vierseite $AECF$ entspricht durch die Correlation eine durch das nämliche Vierseit gehende andere. In der Projectivität, die so im Büschel entsteht, entsprechen die degenerirten Flächen wiederum nicht sich selbst; also liefert jeder von diesen Büscheln zwei allgemeine sich selbst entsprechende Flächen.

*Durch die vorliegende specielle Correlation werden demnach ∞^1 Flächen 2. Grades in sich selbst transformirt und zwar auf die zweite Art.**)*

Dieses System 1. Stufe von Flächen 2. Grades ist in sich dual.

Durch jeden Punkt gehen, jede Ebene tangiren zwei Flächen desselben.

Denn die sämmtlichen Büschel durch die verschiedenen Vierseite geben, wie in Nr. 8, ein Netz, das zugleich ein Gewebe ist. Ein beliebiger Punkt P bestimmt darin einen Büschel, der ein Ebenenpaar enthält, da es im Netze einen ganzen Büschel von Ebenenpaaren giebt.

*) Schröter, Journ. f. Math. Bd. 77, S. 140.

**) Voss, a. a. O. S. 371.

Folglich berührt eine Ebene nur zwei Flächen des Büschels; ist sie die eine Polarebene von P (nach der Correlation), so entspricht dann jede der beiden von ihr berührten Flächen des Büschels sich selbst, da sie durch das sich selbst entsprechende Vierseit geht und zugleich einen Punkt enthält und seine Polarebene tangirt. — Jede der beiden Flächen tangirt dann auch die andere Polarebene von P .

28. Aus ähnlichen Gründen, wie in Nr. 16, ist die Projectivität in jedem der Büschel ($AECF$) eine Involution. Die beiden sich selbst entsprechenden Flächen sind deshalb harmonisch-zugeordnet.

Ferner entspricht jeder Fläche des Netzes dieser Vierseit-Büschel eine andere Fläche, je aus demselben Vierseit-Büschel, in beiderlei Sinne. Wir haben, wie im allgemeinen Falle (Nr. 16), *im Büschel des Hauptvierseits $ABCD$ eine Involution*. Weil dieser Büschel mit dem Netze die Fläche $BD(A, C)$ gemein hat, so *befinden sich Büschel und Netz in demselben Gebüsche* und analog wie in Nr. 10 kann man beweisen, dass *jede Fläche dieses Gebüsches einer andern desselben in beiderlei Sinne entspricht*;^{*)} nur dass hier \mathfrak{D}^2 , \mathfrak{E}^2 nicht sich selbst entsprechen, sondern bez. ihnen doppelt entsprechende Flächen \mathfrak{D}_1^2 , \mathfrak{E}_1^2 haben, was aber am Beweise nichts ändert.

Bemerken wir den Unterschied, dass hier das System 3. Stufe der sich involutorisch entsprechenden Flächen nur ein System 1. Stufe von sich selbst entsprechenden Flächen enthält, im analogen Falle der Collineation aber ein System 2. Stufe, hingegen die Collineation zwei Bedingungen, die Correlation nur eine zu erfüllen hat.

Benutzt man dasselbe Coordinatentetraeder wie in Nr. 24, so ist der jetzige Specialfall charakterisirt durch:

$$a_{42} = a_{24}.$$

Das quadratische System der sich selbst entsprechenden Flächen ist:

$$2\sqrt{-a_{13}a_{31}}\tau x_1x_3 + a_{21}(x_2^2 - \tau^2 x_4^2) = 0;$$

das Gebüsche der sich involutorisch entsprechenden Flächen ebenso wie in Nr. 11:

$$x^2 - \lambda x_4^2 + \mu x_1x_3 + \nu x_2x_4 = 0. —$$

Die vorliegende specielle Correlation hat noch folgende leicht zu beweisende Eigenschaften.

Der tetraedrale Complex der Wechselstrahlen**) zerfällt in die beiden speciellen linearen Complexe (Strahlengewinde, wie ich vor einiger Zeit vorgeschlagen habe, diese Complexe zu nennen), welche die Diagonalen AC , BD bez. zu Axen haben; der erste, bez. zweite dieser Complexe stellt ferner den (sonst allgemeinen) linearen Complex

*) Voss, ebenda.

**) Schröter, Journal f. Math. Bd. 77, S. 105 B.

der Geraden dar, welche Involutionen doppelt conjugirter Ebenen, bez. Punkte tragen. *)

29. Bei der *Polarcorrelation* kann jedes der ∞^4 auf der Basisfläche \mathfrak{A}^2 befindlichen Vierseite $ABCD$ als Hauptvierseit angesehen werden und sogar beide Diagonalen (und demnach alle Geraden) tragen eine Involution doppelt conjugirter Punkte (und Ebenen). Es sei E, F ein Paar der Involution auf BD ; sind dann G, H die Doppelpunkte der Involution $(B, D; E, F)$, so sind G und ACH Pol und Polarebene nach \mathfrak{A}^2 . Die Fläche \mathfrak{B}^2 , die der \mathfrak{A}^2 harmonisch-zugeordnet ist mit conischer Berührung längs des Schnitts von ACH und also nach \mathfrak{A}^2 zu sich selbst polar ist, geht gerade durch das Vierseit $AECF$; denn die beiden Geraden, welche die gemeinsame Berührungsebene von $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{B}^2$ in A aus \mathfrak{B}^2 ausschneidet, müssen, weil G und ACH auch nach \mathfrak{B}^2 polar sind, zu G und H harmonisch sein, aber auch zu B und D , weil BD durch den Berührungspol G geht. Folglich sind sie AE, AF , und ebenso wird \mathfrak{B}^2 von BCD in CE, CF geschnitten. Demnach ist \mathfrak{B}^2 die eine der durch $AECF$ gehenden in sich selbst transformirten Flächen, ACG liefert die andere. So führt jede Ebene durch AC oder BD zu einer \mathfrak{B}^2 , die nach \mathfrak{A}^2 zu sich selbst polar ist. Man kann sich leicht überzeugen, dass nicht ∞^5 , sondern nur ∞^3 Flächen sich ergeben. —

30. In der Ebene findet man ohne Mühe folgende Resultate: *Bei jeder Correlation zweier Felder derselben Ebene werden zwei Kegelschnitte in sich selbst transformirt; sie befinden sich in dem Büschel (der Schaar) der beiden Kerncurven;**) sie sind harmonisch-zugeordnet und harmonisch zu den beiden Kerncurven. Die übrigen Curven des Büschels entsprechen sich involutorisch.***) Dass zwei Kegelschnitte harmonisch-zugeordnet sind, ist sowohl Bedingung dafür, dass einer und deshalb jeder von ihnen zu sich selbst polar ist nach dem andern, als auch dafür, dass beide zugleich durch die nämliche Correlation und dann sofort durch ∞^1 Correlationen in sich selbst transformirt werden.*

Zweiter Theil.

I.

31. Für die analoge Untersuchung über die *cubeische Raumcurve* ist die Figur eines gewissen zu zwei Punkten A, C der Curve und ihren Tangenten a, c gehörigen Tetraeders, das Herr Schröter †) als

*) Math. Ann. Bd. 19, S. 461 Abschn. II.

**) Voss, a. a. O. S. 364.

***) Ebenda und S. 358 Anm.

†) Math. Ann. Bd. 25, S. 293.

das Schmiegunstetraeder der beiden Punkte (und ihrer Tangenten) bezeichnet und als wichtige Figur für Raumcurven überhaupt, insbesondere für cubische Raumcurven hervorgehoben hat, von Werth. A, C sind zwei Ecken desselben, die beiden andern sind die Schnitte B, D der Tangenten a, c mit den Schmiegungebenen γ, α von C, A . Die Ebenen desselben sind demnach die beiden Schmiegungebenen α, γ und die Ebenen, welche ihre Tangenten a, c je mit dem Osculationspunkte C, A der andern verbinden. Zwei Gegenkanten sind also die beiden Tangenten AB, CD , zwei weitere die Sehne AC und die Schnittlinie $\alpha\gamma$ der Schmiegungebenen; das dritte Paar AD, CB wird gebildet von den beiden Schmiegungsstrahlen der Punkte A, C , von denen jeder die Tangente des andern Punktes trifft; wenn wir dabei mit Herrn Schubert*) unter *Schmiegungsstrahl* eines Punktes einer Raumcurve jeden Strahl verstehen, der durch den Punkt in dessen Schmiegungebene gezogen ist, also bei der cubischen Raumcurve jeden durch den Punkt gehenden Nullstrahl des der Curve zugehörigen Nullsystems.

Die Figur des Schmiegunstetraeders ist in sich dual. Sie tritt auch schon in älteren Aufsätzen auf. Das Coordinatentetraeder, das zu der einfachsten Form der Möbius'schen parametrischen Darstellung der cubischen Raumcurve führt, die Herr Cremona**) gefunden hat, ist ein Schmiegunstetraeder der Curve. Von zwei solchen Schmiegungsstrahlen, wie AD, CB , zu zwei Punkten A, C der Curve gehörig und jeder die Tangente des andern treffend, beweist weiter Herr Cremona***), dass jede Sehne der cubischen Raumcurve, welche den einen trifft, auch dem andern begegnet und dass die beiden Treffpunkte conjugirt sind in Bezug auf die Curve d. h. harmonisch zu den Schnitten der Sehne mit der Curve. Er nennt sie *associirte Geraden* der Curve. Es ergibt sich unmittelbar, dass jede geschaart-involutorische Collineation, welche zwei associirte Geraden der cubischen Raumcurve zu Axen hat, die Curve in sich selbst transformirt.

32. Wird ein Schmiegunstetraeder $ABCD$ gegeben, mit der genaueren Festsetzung, dass A und C die Punkte der Curve, AB, CD die Tangenten in ihnen sind, aus der dann folgt, dass ABD, CDB die Schmiegungebenen von A, C sind, und ausserdem noch ein Punkt E

*) Kalkül der abzählenden Geometrie § 25. — Herr Schröter nennt am oben a. O. $\alpha\gamma$ einen Schmiegungsstrahl.

**) Annali di Matematica ser. I, Bd. I (1858) S. 164, 278. — Vergl. auch Joachimsthal Journ. f. Math. Bd. 56, S. 44 und Salmon-Fiedlers Raumgeometrie Bd. II. Nr. 99 in der 3. Auflage.

***) Journ. f. Math. Bd. 58, S. 138, Nr. 14; Nouv. Ann. de math. Ser. II, Bd. 1, S. 287, 366, 436 Nr. 6. Vergl. auch Reye, Geom. der Lage, Abth. II, S. 108 der 2. Aufl.; Schröter, Oberflächen 2. Ordn. S. 263.

oder eine Schmiegungebene, so ist die cubische Raumcurve eindeutig bestimmt. Wir stellen uns irgend eine cubische Raumcurve, welche in der vorgeschriebenen Weise $ABCD$ zum Schmiegungstetraeder hat, und die beiden Kegel 2. Grades vor, welche sie aus A, C projeciren. Der erstere wird von der Schmiegungebene ABD seines Scheitels A längs der Tangente AB berührt,*) und da CD ihn auf AC tangirt, so wird er auch von ACD längs AC berührt.***) Also gehört dieser Kegel (A) einem gewissen Büschel sich längs zweier Kanten berührender Kegel 2. Grades an. Ebenso wird der Kegel (C) von CDB längs CD , von CAB längs CA berührt. Jeder Kegel des einen Büschels mit jedem des andern geschnitten liefert eine Curve aus dem Systeme 2. Stufe (Bündel) von Curven, welche $ABCD$ in der obigen Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Der Punkt E bestimmt aus jedem Büschel einen Kegel und somit eine Curve aus dem Bündel. Die duale Betrachtung ergibt die andere Behauptung.***)

33. Es sei eine cubische Raumcurve gegeben und $ABCD$, $A'B'C'D'$ seien zwei Schmiegungstetraeder derselben, gehörig zu A, C ; AB, CD , bez. A', C' ; $A'B', C'D'$, und E, E' zwei beliebige Punkte der Curve. Die Collineation, in der den Punkten A, B, C, D, E die Punkte A', B', C', D', E' correspondiren, transformirt die Curve in eine andere, welche $A'B'C'D'$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder hat und durch E' geht, also mit der gegebenen identisch ist. Entsprechen aber in einer Correlation den Punkten A, B, C, D, E die Ebenen $A'B'D', A'B'C', C'D'B', C'D'A'$ und die Schmiegungebene von E' , so geht die Curve über in eine andere (in den Torsus einer andern), welche $A'B'C'D'$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder hat und die genannte Schmiegungebene osculirt, also ebenfalls mit der gegebenen identisch ist.

Lässt man nun A', C', E' die gegebene Curve durchlaufen, so folgt, dass jede cubische Raumcurve durch ∞^3 Collineationen oder Correlationen in sich selbst transformirt werden kann.

Da es nun ∞^{12} cubische Raumcurven giebt, so wird, wenn eine Collineation oder Correlation i Bedingungen erfüllen muss, um eine cubische Raumcurve in sich überzuführen, jede, welche dieselben erfüllt, ∞^i cubische Raumcurven in sich transformiren.

Auf einer cubischen Raumcurve, welche durch Collineation oder Correlation in sich selbst übergeht, entsteht stets eine Projectivität von Punkten, in welcher entsprechende Punkte der Collineation sich

*) Vergl. Schröter, Oberflächen 2. Ordnung S. 262.

**) Cremona, a. zuerst a. O.

***) Vergl. auch Staudt, Beitr. zur Geom. der Lage Nr. 464, wo bewiesen wird, dass durch 3 Punkte und die Tangenten und Schmiegungebenen von zweien die cubische Raumcurve eindeutig bestimmt ist.

ebenfalls correspondiren, bei der Correlation aber ein Punkt der Curve als dem ersten Raume angehörig und der Osculationspunkt der ihm im zweiten correspondirenden Schmiegungeebene sich entsprechen.

II.

34. Die sich selbst entsprechenden Punkte A, C dieser Projectivität sind nun bei der Collineation zwei Ecken des Haupttetraeders (Nr. 5), die zugehörigen Tangenten, die sich ebenfalls selbst entsprechen, zwei Kanten desselben und zwar nothwendig zwei windschiefe AB, CD und die Schmiegungeebenen zwei Ebenen desselben, also da die Schmiegungeebene des einen Punktes den andern nicht enthalten kann, die Ebenen ABD, CDB .*) Demnach ist das Haupttetraeder der Collineation für eine cubische Raumcurve, welche durch dieselbe in sich transformirt wird, ein Schmiegungetetraeder.

Betrachten wir nun einen der 12 Bündel von cubischen Raumcurven, welche das Haupttetraeder $ABCD$ einer gegebenen Collineation zum Schmiegungetetraeder haben, also etwa, wie bisher, den, für welchen A, C die Punkte der Curve und AB, CD die zugehörigen Tangenten sind. Die beiden Kegelbüschel $(A), (C)$, welche die Curven aus A, C projiciren, gehen durch die Collineation in sich selbst über, denn z. B. einem Kegel, der ABD und ACD längs AB und AC tangirt, entspricht ein eben so beschaffener Kegel. In einer sich selbst entsprechenden cubischen Raumcurve müssen also sich selbst entsprechende Kegel (A) und (C) einander schneiden. Die sich selbst entsprechenden Elemente der Projectivität im Büschel (A) sind aber im allgemeinen die ausgearteten (ABD, ACD) und (ABC, ABC) ; und dasselbe gilt in (C) .

Also transformirt eine beliebige Collineation keine allgemeine cubische Raumcurve in sich selbst.

35. Geschieht dies aber, so existirt in jedem der beiden Büschel $(A), (C)$ noch ein drittes sich selbst entsprechendes Element, und alle entsprechen sich deshalb selbst.

Alle ∞^2 cubischen Raumcurven gehen dann in sich selbst über, welche das Haupttetraeder der Collineation in derselben Weise zum Schmiegungetetraeder haben wie die Curve, die n. V. in sich transformirt wird.

Die Collineation hat dann zwei Bedingungen zu genügen. Zwei entsprechende Punkte X, X' müssen beide sowohl auf einem Kegel (A) , als auf einem Kegel (C) liegen. Jenes führt zu:

$$AB(X, X', C, D) = AC(X, X', D, B)$$

oder:

$$(XX' \mathfrak{D} C) = (XX' \mathfrak{B} D),$$

*) Staudt, Beiträge zur Geom. der Lage Nr. 514.

wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, wie im ersten Theil, die Schnitte von XX' mit den Ebenen BCD, \dots des Haupttetraeders sind; dieses zu:

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (XX' \mathfrak{B} \mathfrak{D}).$$

Also hat die Collineation die Doppelbedingung:

$$(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{C}) = (XX' \mathfrak{B} \mathfrak{D})$$

oder eine der 11 analogen zu erfüllen, wenn sie eine und dann sofort einen ganzen Bündel von cubischen Raumcurven in sich transformiren soll.

Die 12 Fälle ergeben sich aus den 6 Combinationen von A, B, C, D (oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$) zu je zweien und den dann noch möglichen 2 Permutationen der beiden übrigen.

Aus: $(XX' \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (XX' \mathfrak{D} \mathfrak{C})$ folgt nach Nr. 6, dass die Collineation sämtliche Flächen des Büschels $(ABCD)$ in sich selbst überführt. Jede dieser Flächen wird von allen ∞^2 in sich transformirten cubischen Raumcurven in A, C osculirt, denn jede der Curven tangirt in A, C die beiden Geraden AB, CD der Fläche und die Schmiegungebene des Berührungspunktes ist die Tangentialebene der Fläche. Folglich enthält die durch einen beliebigen Punkt der Curve gelegte Fläche des Büschels die Curve ganz, so dass auf jeder Fläche des Büschels ∞^1 Curven des Bündels liegen, welche einen Büschel sich doppelt berührender Curven bilden.

Die 3 Büschel sich selbst entsprechender Flächen, die in diesem Falle sich ergeben haben, haben zu je zweien keine Fläche gemein. Ihre Flächen sind die einzigen in sich transformirten.

Durch jede der ∞^2 in sich transformirten cubischen Raumcurven gehen demnach drei in sich transformirte Flächen 2. Grades; die aber nicht demselben Büschel angehören; sie haben zu je zweien noch gemeinsam AC, AB, CD .

36. Das Haupttetraeder $ABCD$ sei in derselben Weise wie in Nr. 11 zum Coordinatentetraeder gewählt; so erhalten wir die ∞^2 cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ als zu $A, C; AB, CD$ gehöriges Schmiegungstetraeder haben, als Schnitte der Kegel:

$$x_2 x_3 - \lambda x_4^2 = 0, \quad x_1 x_4 - \mu x_2^2 = 0;$$

woraus wir, mit Herrn Cremona*), die parametrische Darstellung:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu \lambda^2 \omega^3 : \lambda \omega^2 : 1 : \omega,$$

ableiten; jedes Werthepaar (λ, μ) giebt eine Curve. Hieraus folgt:

$$x_1 x_3 = \lambda \mu x_2 x_4;$$

d. h. alle Curven des Bündels mit constantem Producte $\lambda \mu$ liegen auf derselben Fläche durch das Vierseit $ABCD$.

*) a. in Nr. 31 zuerst a. O.

Ist wiederum wie in Nr. 11 die Beziehung zwischen den Coordinaten x_i, y_i entsprechender Punkte:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a_{11}x_1 : a_{22}x_2 : a_{33}x_3 : a_{44}x_4,$$

so entspricht dem Punkte ω der Curve (λ, μ) der Punkt mit den Coordinaten $a_{11}\mu\lambda^2\omega^3, a_{22}\lambda\omega^2, a_{33}, a_{44}\omega$; er gehört derselben Curve an und diese coincidirt dann, wegen Nr. 32, mit ihrer entsprechenden, wenn es ein ω' giebt, so beschaffen, dass:

$$\mu\lambda^2\omega'^3 : \lambda\omega'^2 : 1 : \omega' = a_{11}\mu\lambda^2\omega^3 : a_{22}\lambda\omega^2 : a_{33} : a_{44}\omega.$$

Dies erfordert die beiden Gleichungen:

$$a_{44}^3 = a_{11}a_{33}^2, \quad a_{44}^2 = a_{22}a_{33}$$

oder die drei mit zweien äquivalenten:

$$a_{11}a_{44} = a_{22}^2, \quad a_{22}a_{33} = a_{44}^2, \quad a_{11}a_{33} = a_{22}a_{44}.$$

Dieselben sind von λ, μ unabhängig. Werden sie erfüllt, so gehen alle Curven des Bündels in sich selbst über. Die Uebereinstimmung dieser Doppelbedingung mit der von Nr. 35 ist leicht zu verificiren; und ebenso sieht man unmittelbar, dass sie bewirken, dass die Flächen der drei Büschel:

$$x_2x_3 - \lambda x_4^2 = 0, \quad x_1x_4 - \mu x_2^2 = 0, \quad x_1x_3 - \nu x_2x_4 = 0$$

in sich selbst transformirt werden.

37. In Nr. 31 wurde bemerkt, dass jede geschaart-involutorische Collineation, welche zwei associirte Geraden einer cubischen Raumcurve zu Axen hat, die Curve in sich selbst transformirt.

Auch umgekehrt sind stets die Axen einer geschaart-involutorischen Collineation, welche eine cubische Raumcurve in sich selbst transformirt, zwei associirte Geraden derselben.

Denn die entsprechenden Punkte auf der Curve bilden eine Involution und ihre Verbindungslinien eine Regelschaar, zu deren Leit-schaar die Axen u, v gehören. Jede wird demnach von der Curve einmal getroffen: in A , bez. C , und die Tangenten a, c an die Curve in A, C sind Gerade der Regelschaar (mit drei vereinigten von den 4 harmonischen Punkten); sie treffen also auch v, u : in B, D . Die Ebenen au, cv haben je drei in A , bez. C zusammenfallende Schnitte mit der Curve (zwei auf a , einen auf u z. B.), osculiren sie also dort; mithin sind u, v Schmiegungsstrahlen und da sie a , bez. c treffen, associirte Geraden.

Auch die Fläche der Regelschaar wird von der Curve in A, C osculirt. Sie geht durch die Collineation ebenfalls in sich selbst über, aber auf die im Anfang von Nr. 12 besprochene Weise.

Jede cubische Raumcurve wird demnach durch ∞^2 geschaart-involutorische Collineationen in sich transformirt.

Jede geschaart-involutorische Collineation hingegen transformirt ∞^6 cubische Raumcurven in sich selbst.

Denn wir können A, C beliebig auf den Axen u, v annehmen und als a, c einen beliebigen Strahl von A nach v , bez. von C nach u . Ist dann $B \equiv av, D \equiv bu$, so gehen alle ∞^2 cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ als zu $A, C; AB, CD$ gehöriges Schmiegungstetraeder haben, durch die Collineation in sich selbst über.

Da hier alle Geraden XX' die u, v treffen: in U, V , so ist, wenn $ABCD$ wieder eins der ∞^4 Haupttetraeder ist (A, D auf u, B, C auf v), $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \equiv U, \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D} \equiv V$; also geht die Doppelbedingung von Nr. 35 über in die einfache: $(XX' VU) = (XX' UV)$, welche erfüllt wird, weil $(XX' UV) = -1$.

Dass durch keine nicht involutorische Collineation mit Axen (Nr. 12), so wie auch durch keine Homologie — auch nicht die involutorische — eine Raumcurve in sich transformirt werden kann, ist leicht einzusehen.

III.

38. Der Fall der Correlation ist wesentlich schwieriger. Wenn durch eine Correlation eine cubische Raumcurve in sich selbst übergeht und dabei dem zum ersten Raume gerechneten Punkte X desselben die Schmiegungebene ξ' im zweiten entspricht, so entspricht der Tangente und der Schmiegungebene von X die Tangente und der Osculationspunkt von ξ' . Die vereinigten Punkte A, C der nach Nr. 33 Schluss auf der Curve entstehenden Projectivität sind dann solche Punkte, denen, wenn sie zum ersten Raume gerechnet werden, je ihre eigene Schmiegungebene im zweiten correspondirt. Folglich entspricht jedem dieser Punkte, als Punkt des zweiten Raums, auch die eigene Schmiegungebene im ersten, und jede der Tangenten sich selbst. Mithin sind A, C und ihre Tangenten zwei Ecken und Seiten des Hauptvierseits der Correlation (Nr. 15) und zwar sind, da keine der beiden Schmiegungebenen den andern Punkt enthält und zwei Tangenten einer cubischen Raumcurve immer windschief sind, A, C zwei Gegenecken und die Tangenten zwei Gegenseiten AB, CD . Also ist $ABCD$ dieses Vierseit und ABD, CDB , welche A, C in der Correlation entsprechen, sind die Schmiegungebenen von A, C . Mithin ist das Tetraeder des Hauptvierseits $ABCD$ der Correlation das zu den Punkten A, C und den Tangenten AB, CD gehörige Schmiegungstetraeder der Curve. Seiten des Vierseits sind die beiden Tangenten und die beiden Schmiegungststrahlen.

39. Ist nun eine Correlation gegeben und $ABCD$ ihr Hauptvierseit, so ist zu untersuchen, ob es in einem der vier Bündel von cubischen Raumcurven, welche $ABCD$ zum Schmiegungstetraeder haben, das zu

A und C und AB , CD , oder zu A , C ; AD , CB oder zu B , D ; BC , DA oder zu B , D ; BA , DC gehört, *sich selbst entsprechende Curven giebt*. Wir wollen den *ersten Bündel* ins Auge fassen.

Statt die Curven durch die Kegel (A) und (C) und also punktweise zu erzeugen, können wir sie auch durch Schmiegungebenen erzeugen mittelst je zweier Kegelschnitte, die in den gemeinsamen Schmiegungebenen ABD und CDB oder γ , α^*) liegen. Die Kegelschnitte (α) bilden in α einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte mit CB als Berührungssehne und CD , BD als gemeinsamen Tangenten. Ebenso haben die Kegelschnitte (γ) in γ die Gerade AD zur Berührungssehne und AB , BD zu gemeinsamen Tangenten. Die Büschel (A) und (α), (C) und (γ) sind ersichtlich je zu einander perspectiv. Legt man nun von den verschiedenen Punkten der Geraden BD , die für alle (α) und (γ) gemeinsame Tangente ist, je die zweite Tangente an einen Kegelschnitt (α) und einen (γ), so geben die Verbindungsebenen dieser zweiten Tangenten die Schmiegungebenen der cubischen Raumcurve, die aus diesen beiden Kegelschnitten (α), (γ) entsteht. Es fragt sich, wie gewinnt man aus einem Kegel-paar (A), (C) das Kegelschnittpaar (α), (γ), welches die nämliche Raumcurve liefert.

X sei der Punkt, durch den wir die cubische Raumcurve und die beiden Kegel bestimmt denken wollen. Die Kante AX treffe α in X_α ; dieser bestimmt einen Kegelschnitt (α)₁, die Spur des Kegels (A); x_α sei die Tangente desselben in X_α , also die Spur der längs AXX_α den Kegel (A) berührenden Ebene in α . Der Schnittpunkt von x_α mit BD sei D_1 ; so ist AD_1 die Spur derselben Tangentialebene in der Ebene ABD oder γ . Ebenso treffe CX die Ebene γ in X_γ ; durch diesen gehe der Kegelschnitt (γ)₁, der in X_γ von x_γ berührt werde, welche die Spur der den Kegel (C) längs CXX_γ berührenden Ebene in γ ist, während ihre Spur in CBD oder α die Gerade CB_1 ist, wenn B_1 wieder der Schnitt von x_γ mit BD ist. Die beiden Tangentialebenen schneiden sich in der Tangente an die cubische Raumcurve in X , folglich sind $Y_\alpha \equiv (x_\alpha, CB_1)$ und $Y_\gamma \equiv (x_\gamma, AD_1)$ die Spuren dieser Tangente in α , γ . Der von den Spuren der Schmiegungebenen einer cubischen Raumcurve in einer festen Schmiegungeebene eingehüllte Kegelschnitt ist zugleich der Ort der Spuren der Tangenten in dieser Ebene. Demnach sind die beiden durch Y_α , bez. Y_γ gehenden Kegelschnitte (α), (γ) die gesuchten.

40. *Man kann sich auf die Punkte X einer Ebene durch AC beschränken, um den ganzen Curvenbündel herzustellen. Ist dann Z*

*) α und γ sind also im Folgenden, sofern nicht direct anderes gesagt ist: die den Ecken A , C gegenüberliegenden Ebenen des Tetraeders $ABCD$, und demnach γ die Schmiegungeebene von A , α die von C .

der Schnittpunkt dieser Ebene mit BD , so bewegen sich X_α und X_γ auf CZ und AZ .

Nun hat man für einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte den Satz: Ist durch den einen Berührungspunkt eine Gerade gezogen, so gehen die verschiedenen Tangenten an die Kegelschnitte in deren zweiten Schnitten mit dieser Geraden alle durch denselben festen Punkt auf der Tangente des andern gemeinsamen Berührungspunktes; derselbe ist vom Berührungspol (Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten) durch die Berührungssehne und jene Gerade harmonisch getrennt. Wir benutzen zum Beweise den Büschel in α , in dem ja CZ durch den einen Berührungspunkt C gezogen ist. X_α liegt auf CZ und (α) sei, wie oben, der durch ihn gehende Kegelschnitt, seine Tangente $x_\alpha \equiv D_1 X_\alpha$ treffe die andere gemeinsame Tangente CD in K . Da $DD_1 K$ dem (α) umgeschrieben ist, so laufen DX_α, CD_1, KB in einen Punkt O zusammen; das vollständige Viereck $ACX_\alpha O$ zeigt, dass D_1 harmonisch ist zu D in Bezug auf B und Z . Demnach bleibt D_1 fest, und ebenso bleibt B_1 fest im vierten harmonischen Punkte zu B in Bezug auf D und Z . Folglich bewegen sich Y_α und Y_γ auf den festen Geraden CB_1, AD_1 . Wir gewinnen dadurch das Resultat:

Die Tangenten aller Curven unseres Curvenbündels in den dritten Schnitten mit einer Ebene durch die beiden gemeinsamen Punkte stützen sich auf zwei Schmiegungsstrahlen dieser Punkte und erzeugen also eine lineare Congruenz.

Die Schmiegungebenen der Curven in diesen Punkten gehen alle durch den Punkt Z nach dem bekannten Satze, dass der Schnittpunkt der Schmiegungebenen von 3 Punkten der Curve in deren Ebene liegt.

Also sind $Y_\alpha Z, Y_\gamma Z$ die Tangenten an die beiden Curven $(\alpha), (\gamma)$ in Y_α, Y_γ .

Man kann leicht weiter beweisen, dass sämtliche Tangenten der Curven des Bündels einen tetraedralen Complex erzeugen. *)

Bewegt man nun in der festen Ebene ACZ den Punkt X auf einer Geraden g , so wird seine Tangente $XY_\alpha Y_\gamma$ eine Regelschaar (g, AD_1, CB_1) beschreiben **); Y_α, Y_γ also werden sich projectiv auf CB_1, AD_1 bewegen, und da diese Geraden je durch einen der Berührungspunkte der Büschel $(\alpha), (\gamma)$ gehen, so werden diese Büschel projectiv mit je den durch Y_α, Y_γ gehenden Kegelschnitten als entsprechenden.

*) Ein analoges Resultat habe ich Journal f. Math. Bd. 79 S. 107 gefunden für die cubischen Raumcurven, welche durch 4 gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade zweimal treffen.

**) Die Schmiegungebene beschreibt daher einen Kegel 2. Grades, so dass der Punkt X und seine Schmiegungeebene Feld und Bündel erzeugen, die quadratisch verwandt sind.

Legt man demnach von einem festen Punkte R auf BD je die zweiten Tangenten an zwei entsprechende Kegelschnitte, so ergeben sich projective Strahlbüschel um R in den Ebenen α, γ . Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen, also die dritten Schmiegungeebenen von R (ausser α, γ) an die cubischen Raumcurven, welche durch die verschiedenen Punkte X von g bestimmt werden, umhüllen einen Kegel 2. Grades.

Der Punkt X in ACZ und die dritte Schmiegungeebene ξ aus R auf BD an die durch ihn bestimmte Raumcurve des Bündels bestimmen sich gegenseitig eindeutig. Demnach sind das Punktfeld in ACZ und der Ebenenbündel aus R dadurch in eine eindeutige quadratische Verwandtschaft gebracht.

Liegt R in Z , so ist die Schmiegungeebene ξ immer die in X selbst osculirende.

41. Wir nennen die feste Ebene ACZ , je nachdem sie zum ersten oder zweiten Raume gehört, σ oder τ' ; die ihr in der vorgelegten Correlation entsprechenden Pole, die beide auf BD liegen, seien S', T . Wir denken den obigen Punkt R in T fallend; dann sei X' der Pol der Schmiegungeebene ξ . Er liegt in $\tau' \equiv ACZ$ und ist der dritte Schnitt dieser Ebene mit der Curve des Bündels, welche der durch X gehenden und von ξ osculirten Curve, insofern sie zum ersten Raume gehört, im zweiten correspondirt. Da, wenn ξ einen Kegel 2. Grades umhüllt, X' einen Kegelschnitt beschreibt; so befinden sich die beiden Felder, welche in ACZ von X und X' — den beiden Punkten, in denen diese feste Ebene zwei in der Correlation entsprechende Curven unseres Bündels zum dritten Male schneidet, — beschrieben werden, in eindeutiger quadratischer Verwandtschaft.

Das Dreieck ACZ ist für beide Felder das Hauptdreieck, derartig, dass den Ecken A, C, Z die Seiten AZ, CZ, AC in beiderlei Sinne correspondiren.

Zunächst ist klar, dass wir von X' zu X auf die nämliche Weise gelangen, wie von X zu X' ; nur dass S' an Stelle von T tritt. Also genügt es, darzuthun, dass wenn X nach Z fällt, oder in einen beliebigen Punkt von AZ , X' jeder beliebige Punkt von AC sein kann, bez. nach A fällt. Wenn X nach Z fällt, so zerfällt die cubische Raumcurve in AB, CD, BD ; die dritte Schmiegungeebene ξ aus T (oder S') ist jede beliebige Ebene durch BD ; ihr Pol X' also jeder beliebige Punkt von AC .

Fällt zweitens X beliebig auf die Linie AZ , so fällt X_α nach Z , x_α nach D , $Z \equiv BD$, also Y_α nach B , und der durch Y_α bestimmte Kegelschnitt (α) ist das Paar der gemeinsamen Tangenten (CD, BD); die an ihn aus dem Punkte T (oder S') auf BD kommende zweite Tangente fällt ebenfalls nach BD ; und wie auch die zweite Tangente

aus T an den Kegelschnitt (γ) liege, die beide verbindende Ebene ξ ist γ oder DAB und ihr Pol X' ist A .

42. Wenn nun zwei in dieser quadratischen Verwandtschaft entsprechende Punkte X, X' (die ausserhalb des Hauptdreiecks liegen) sich vereinigen, so fallen auch zwei entsprechende Curven zusammen.

Jedem Strahle durch A , zum X -Felde gerechnet, entspricht, abgesehen von AZ , ein Strahl durch C im X' -Felde. Beide bewegen sich projectiv und der durch ihren Schnittpunkt erzeugte Kegelschnitt \mathcal{K}_A ist der Ort der Punkte X' , die je mit ihrem entsprechenden X auf einer Geraden durch A liegen. Man findet leicht, dass dieser Kegelschnitt die Geraden AZ, CZ in A, C tangirt. Der analog für C construirte Kegelschnitt \mathcal{K}_C thut dasselbe. Eine Coincidenz von X und X' muss auf beiden Kegelschnitten liegen. Dieselben haben aber im Allgemeinen ausser den Berührungspunkten A, C keinen Punkt gemein. Demnach erhalten wir zunächst das negative Resultat:

Durch eine beliebige Correlation wird keine (allgemeine) cubische Raumcurve in sich transformirt.

43. Fallen aber die beiden Kegelschnitte $\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_C$ in einen \mathcal{K} zusammen, so vereinigt sich jeder Punkt X desselben mit seinem entsprechenden X' , da nur so X, X' sowohl mit A , als mit C in gerader Linie liegen; und umgekehrt, wenn X' sich mit X vereinigt, so ist dieser Punkt beiden Kegelschnitten $\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_C$ gemeinsam, so dass sie coincidiren.

Alle ∞^1 Curven des Bündels, die durch einen Punkt von \mathcal{K} gehen, coincidiren mit ihren entsprechenden.

Da \mathcal{K} die beiden Geraden AZ, CZ in A, C tangirt, so tangirt er auch die Ebenen ADB, CDB , welche von ACZ in AZ, CZ geschnitten werden, und liegt deshalb auf einer gewissen Fläche \mathcal{X}^2 des Büschels $(ABCD)$; und da alle Curven des Bündels alle Flächen dieses Büschels und demnach auch \mathcal{X}^2 in A, C osculiren, so liegen die sich selbst entsprechenden Curven, weil sie überdies \mathcal{K} treffen, auf dieser Fläche \mathcal{X}^2 des Büschels durch das Hauptvierseit und bilden auf ihr einen Büschel.

Jedem Strahle durch Z in der Ebene ACZ , als zum X -Felde gehörig, correspondirt ein ebenfalls durch Z gehender Strahl im X' -Felde. Diese Strahlen müssen in unserem Falle sich vereinigen, da sie \mathcal{K} , der nicht durch Z geht, in demselben Punkte treffen. Demnach liegen zwei entsprechende Punkte X, X' stets auf einer Geraden durch Z ; die so auf jedem Strahle durch Z entstehende Projectivität ist eine Involution, da Z und der Schnitt mit AC sich in beiderlei Sinne entsprechen; die Doppelpunkte sind die Schnitte mit \mathcal{K} . Also ist in unserm Falle die quadratische Verwandtschaft der X - und X' -Felder in ABZ

eine Hirst'sche*) quadratische Inversion. Und weil nun jede zwei correspondirenden Punkte X, X' involutorisch sich entsprechen, so entsprechen sich auch jede zwei correspondirenden cubischen Raumcurven des Bündels involutorisch.

Wir können als Kennzeichen dieses Falles angeben, dass irgend einmal zwei entsprechende Curven des Bündels von einer Ebene durch AC in zwei dritten Punkten getroffen werden, welche mit der Spur Z der Geraden BD in der Ebene in gerader Linie liegen; es geschieht dies dann für jede zwei entsprechenden Curven und jede Ebene durch AC , und die beiden dritten Schmiegungebenen, die von einem beliebigen Punkte auf BD an zwei entsprechende Curven gelegt sind, schneiden sich in einer AC treffenden Geraden. Denn wenn X, X' mit Z in gerader Linie liegen, so haben wir auf dieser eine Involution und die Doppelpunkte geben uns zwei weitere gemeinsame Punkte von \mathbb{K}_A und \mathbb{K}_C , u. s. f.

Jede Gerade, welche AC, BD und die eine von zwei entsprechenden Curven des Bündels trifft, trifft auch die andere, und die beiden Treffpunkte mit den Curven sind conjugirt in Bezug auf die Fläche, welche die sich selbst entsprechenden Curven trägt.

44. Wir suchen aber noch nach einem einfacheren Kennzeichen, zu dem uns eine andere Betrachtung führen soll.

Es lässt sich nämlich darthun, dass bei jeder Correlation den sämtlichen cubischen Raumcurven des betrachteten Bündels, welche auf einem Kegel (A) oder (C) sich befinden, Curven entsprechen, die auf demselben Kegel (C) oder (A) liegen.

Bewegt man X in der festen Ebene ACZ auf einer Geraden durch A , so dass man auf demselben Kegel (A) bleibt; so bleibt X_α fest, folglich auch Y_α (Nr. 39), mithin auch der durch Y_α bestimmte Kegelschnitt (α), demnach auch die zweite Tangente an ihn aus T , d. h. die Schnittlinie der Schmiegungeebene ξ mit α oder CBD ; folglich bewegt sich X' auf einer Geraden, die durch C , den Pol von CBD , geht, und die durch X' bestimmte Curve also auf dem durch diese Gerade bestimmten Kegel (C).

Es sei nun insbesondere der Kegel (A) das Ebenenpaar (ACD, ABD) der gemeinsamen Tangentialebenen. Der Schnitt mit ACZ (ausser AC) ist AZ ; X_α fällt dann nach Z und Y_α nach B ; der durch Y_α bestimmte Kegelschnitt (α) ist das Paar der gemeinsamen Tangenten CD, BD ; die zweite Tangente aus T an ihn ist also BD , mithin bewegt sich X' auf AC ; dadurch wird im Büschel (C) die Doppelenebene CAD bestimmt [das Ebenenpaar (CAB, CDB) ist bestimmt durch irgend einen Punkt seiner zweiten Schnittkante BZ mit ABZ]. Ebenso würden wir,

*) Annali di Matematica ser. I Bd. 7 S. 49.

wenn wir den Punkt X' auf AZ laufen liessen, um (ACD, ABD) zu bestimmen, durch die X die Doppelebene CAD erhalten; es träte nur S' an Stelle von T .

Daraus folgt, dass dem Kegel (ACB, ACB) , durch X oder X' bestimmt, der Kegel (CAB, CDB) , durch X' oder X bestimmt, entspricht.

Es sind also jedem Kegel (A) , von Curven des Bündels erfüllt, zwei Kegel (C) zugeordnet, welche bez. die den Curven auf (A) entsprechenden Curven tragen, je nachdem man die Curven auf (A) zum ersten oder zweiten Raume rechnet. Dadurch entsteht im Büschel (C) eine Projectivität; vereinigte Elemente derselben sind im Allgemeinen nur die Ebenenpaare (CAD, CAD) , (CAB, CDB) , welche, wie eben gezeigt, den (ACD, ABD) , (ACB, ACB) in beiderlei Sinne correspondiren.

Hat jedoch die Projectivität in (C) ein drittes vereinigtes Element, d. h. *entspricht irgend einem allgemeinen Kegel von (A) in beiderlei Sinne derselbe allgemeine Kegel in (C) , so entspricht jedem Kegel (A) ein Kegel (C) in beiderlei Sinne.*

Die eine beliebige Curve des Bündels projecirenden Kegel $(A)_1$, $(C)_1$ sind im Allgemeinen nicht entsprechende. Zu welchem Raume wir die Curve auch rechnen, die eine, wie die andere entsprechende Curve liegen auf dem $(A)_1$ entsprechenden Kegel (C) und auf dem $(C)_1$ entsprechenden Kegel (A) , sind also identisch. *Alle Curven des Bündels entsprechen sich involutorisch.*

Sind aber $(A)_1$, $(C)_1$ entsprechend in der jetzigen Beziehung, so fällt die Curve mit ihrer entsprechenden zusammen; *die Paare der entsprechenden Kegel liefern die ∞^1 sich selbst entsprechenden Curven.*

Das Erzeugniss 4. Ordnung der beiden projectiven Kegelbüschel besteht aus den Ebenen ACD , ABC und einer Fläche 2. Grades, welche die sich selbst entsprechenden Curven trägt.

Wir können das obige Kriterium auch so aussprechen: Es seien X' , Y die beiden Pole einer Ebene $\xi \equiv \eta'$. Liegen sie auf einem allgemeinen Kegel (C) , so befinden sich die beiden Curven p'^3 , r^3 des Bündels, die der von $\xi \equiv \eta'$ osculirten $p^3 \equiv r^3$ entsprechen und die bez. durch X' , Y gehen, auf jenem Kegel (C) ; derselbe entspricht dem Kegel (A) , welcher $p^3 \equiv r^3$ enthält, in beiderlei Sinne, und *unser Fall liegt vor.*

Aber es lässt sich zeigen, dass dann X' , Y auch auf demselben Kegel (A) liegen. Je nachdem sie nämlich auf einem Kegel (C) oder einem Kegel (A) liegen, hat man, durch eine ähnliche Ueberlegung wie in Nr. 35:

$$(X'Y\mathfrak{C}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D}), \text{ bez. } (X'Y\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D}).$$

Aber eine dieser Bedingungen zieht die andere nach sich, denn nach

Nr. 16 sind bei jeder Correlation auf jedem Wechselstrahle $X', Y; \mathfrak{A}, \mathfrak{C}; \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$ in Involution; also ist:

$$(X' Y \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (Y X' \mathfrak{C} \mathfrak{D}) = (X' Y \mathfrak{D} \mathfrak{C}).$$

Demnach können wir eine dieser beiden Bedingungen als Kriterium für unsern Fall annehmen.

Da dann X', Y gleichzeitig auf einem Kegel (A) und einem Kegel (C) liegen, so fallen die beiden Curven p^3 und r^3 zusammen.

Nach dem Pascal'schen Satze lässt sich aber das Liegen von X', Y auf einem Kegel (A) oder (C) dahin aussprechen, dass die Schnittlinien $(ACX', ABY), (ABX', ACY)$ auf einer Ebene durch AD liegen, bez. die Schnittlinien $(CA X', CD Y), (CD X', CA Y)$ in einer Ebene durch CB .

Wenn also bei einer Correlation, von welcher $ABCD$ das Hauptvierseit ist und X', Y irgend ein Paar zu derselben Ebene gehöriger Pole sind, von den eben erwähnten Lagenbeziehungen die eine eintritt, so tritt auch die andere ein; beide treten dann bei allen solchen Paaren wie X', Y ein, und die so beschaffene Correlation transformirt jede Curve des Bündels, für welche $ABCD$ das zu $A, C; AB, CD$ gehörige Schmiegungstetraeder ist, in eine andere Curve des Bündels involutorisch um (d. h. so, dass die beiden Curven sich in beiderlei Sinne entsprechen); ein Büschel in diesem Bündel enthält lauter in sich selbst transformirte Curven, welche von einer durch das Hauptvierseit gehenden Fläche 2. Grades getragen werden. Die in der Involution dieses Büschels (Nr. 16) ihr entsprechende Fläche wird von den Torsen dieser Curven eingehüllt.

Fasst man die 3 andern Bündel (Nr. 38) ins Auge, so erhält die Bedingung drei andere Formen.

Also eine der 4 Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} (ACX', ABY) \text{ und } (ABX', ACY) \text{ mit } AD \\ (ACX', ADY) \text{ und } (ADX', ACY) \text{ mit } AB \\ (BDX', BAY) \text{ und } (BAX', BDY) \text{ mit } BC \\ (BDX', BCY) \text{ und } (BCX', BDY) \text{ mit } BA \end{array} \right\} \text{ in einer Ebene}$$

(von denen jede durch eine äquivalente ersetzt werden kann), muss von der Correlation erfüllt werden, wenn sie eine und dann ∞^1 cubische Raumcurven in sich transformiren soll.

46. Wir wollen die hauptsächlichsten Resultate noch analytisch bestätigen. Wir nehmen $ABCD$ als Coordinatentetraeder in derselben Weise wie in Nr. 36 (und 11) und erhalten die Curven des Bündels, der von Nr. 39 ab ins Auge gefasst wurde, dargestellt durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu \lambda^2 \omega^3 : \lambda \omega^2 : 1 : \omega.$$

Die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der Curve (λ, μ) ist:

$$x_1 - \mu \lambda (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) - \mu \lambda^2 \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 x_3 \\ + \mu \lambda^2 (\Theta_1 \Theta_2 + \Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2 \Theta_3) x_4 = 0;$$

also die der Schmiegungeebene in Θ :

$$x_1 - 3\mu \lambda \Theta x_2 - \mu \lambda^2 \Theta^3 x_3 + 3\mu \lambda^2 \Theta^2 x_4 = 0.$$

Also sind ihre Coordinaten

$$1, -3\mu \lambda \Theta, -\mu \lambda^2 \Theta^3, 3\mu \lambda^2 \Theta^2.$$

Der Punkt R auf BD habe die Coordinaten $0, \varrho, 0, 1$; so haben wir für die dritte Schmiegungeebene von ihm an die Curve (λ, μ) und den Parameter Θ ihres Osculationspunktes:

$$\Theta = \frac{\varrho}{\lambda}.$$

Aehnlich erhält man für den dritten Schnitt einer Ebene $x_2 - \tau x_4 = 0$ durch AC und (λ, μ) :

$$\omega = \frac{\tau}{\lambda}.$$

Ist $ABCD$ das Hauptvierseit der Correlation, so haben wir (Nr. 24):

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31} x_3 : a_{42} x_4 : a_{13} x_1 : a_{24} x_2;$$

also die dem Punkte $\omega = \frac{\tau}{\lambda}$ der Curve (λ, μ) entsprechende Ebene ist:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31} \lambda : a_{42} \tau : a_{13} \mu \tau^3 : a_{24} \tau^2.$$

Sei nun der obige Punkt $(0, \varrho, 0, 1)$ der Schnitt dieser Ebene mit BD , also der Pol im zweiten Raume zu der Ebene $x_2 - \tau x_4 = 0$, so ist:

$$a_{42} \tau \varrho + a_{24} \tau^2 = 0, \text{ oder: } \varrho = -\frac{a_{24} \tau}{a_{42}};$$

mithin ist die dritte Schmiegungeebene von ihm an die Curve (λ, μ) , da das Θ ihres Osculationspunktes $-\frac{a_{24} \tau}{a_{42} \lambda}$ ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = a_{42}^3 \lambda : 3 a_{42}^2 a_{24} \tau \lambda \mu : a_{24}^3 \tau^3 \mu : 3 a_{42} a_{24}^2 \tau^2 \lambda \mu.$$

Wenn die Ebenen η_i und ξ_i identisch sind, so ist auch die Curve (λ, μ) mit ihrer entsprechenden identisch; denn beide haben $ABCD$ in derselben Weise zum Schmiegungetetraeder und noch eine Schmiegungeebene gemein.

Zu jener Identität ist zunächst erforderlich:

$$a_{13} : a_{31} = a_{24}^3 : a_{42}^3.$$

Nur wenn diese Bedingung (oder eine der drei analogen) erfüllt wird, transformirt die Correlation cubische Raumcurven in sich. Wird sie

erfüllt und ist k der gemeinsame Werth von $a_{24}^3 : a_{13}$, $a_{42}^3 : a_{31}$, so ist weiter nothwendig:

$$3a_{24}a_{42}\lambda\mu = k.$$

Die ∞^1 cubischen Raumcurven des Bündels, deren λ, μ dieser Bedingung genügen, gehen in sich selbst über; sie erfüllen (Nr. 36) die Fläche:

$$3a_{24}a_{42}x_1x_3 = kx_2x_4$$

durch das Hauptvierseit, und ihre Torsen umhüllen die polare Fläche: $3k\eta_1\eta_3 = a_{24}a_{42}\eta_2\eta_4$ oder: $a_{24}a_{42}x_1x_3 = 3kx_2x_4$. Man findet leicht, dass die obige Bedingung, die von der Correlation zu erfüllen ist, mit $(X'Y\mathfrak{U}\mathfrak{B}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D})$ äquivalent ist.

Die dem Punkte $\omega = \frac{\tau}{\lambda}$ der Curve (λ, μ) entsprechende Ebene war:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{31}\lambda : a_{42}\tau : a_{13}\mu\tau^3 : a_{24}\tau^2.$$

Sie osculire die Curve (λ_1, μ_1) im Punkte $\Theta = -\frac{a_{24}\tau}{a_{42}\lambda_1}$; also sind ihre Coordinaten:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{42}^3\lambda_1 : 3a_{42}^2a_{24}\tau\lambda_1\mu_1 : a_{24}^3\tau^3\mu_1 : 3a_{42}a_{24}^2\tau^2\lambda_1\mu_1.$$

Hieraus folgt, da die Proportion der zweiten und vierten Glieder von selbst erfüllt wird:

$$a_{31}\lambda = a_{42}^2 : 3a_{24}\mu_1, \quad a_{13}\mu = a_{24}^2 : 3a_{42}\lambda_1;$$

worin wir die Beziehung zwischen den λ, μ ; λ_1, μ_1 entsprechender Curven haben. Wir sehen aber, dass μ_1 nur von λ, λ_1 nur von μ abhängt, d. i. der Satz von Nr. 44. Genügt nun die Correlation der Bedingung: $a_{13} : a_{31} = a_{24}^3 : a_{42}^3$, so gehen die obigen Gleichungen in:

$$3a_{24}a_{42}\lambda\mu_1 = 1, \quad 3a_{24}a_{42}\mu\lambda_1 = 1$$

über; die Vertauschbarkeit von λ_1, μ_1 mit λ, μ beweist, dass alle Curven des Bündels sich involutorisch entsprechen.

IV.

47. Die beiden involutorischen Correlationen, Polarcorrelation (Polar-system) und Nullsystem, erfüllen die Bedingung, von welcher die Transformirbarkeit von cubischen Raumcurven in sich selbst abhängt; weil bei ihnen stets X' mit Y identisch ist oder, analytisch, weil $a_{13} = a_{31}$, $a_{24} = a_{42}$, bez. $a_{13} = -a_{31}$, $a_{24} = -a_{42}$; und zwar erfüllen sie dieselbe gleich für alle vier Bündel.

Bei der Polarcorrelation kann jedes auf der Basisfläche \mathfrak{B}^2 befindliche windschiefe Vierseit $ABCD$ als Durchschnitt der beiden (in \mathfrak{B}^2) vereinigten Kernflächen angesehen werden. Jedes liefert uns vier Bündel, und darin je einen Büschel von Curven, die in sich selbst transformirt

werden. Betrachten wir die beiden zu den Gegenecken A, C gehörigen, deren Curven also durch diese Ecken gehen und dort die Tangentialebenen DAB und BCD der \mathfrak{B}^2 und also auch \mathfrak{B}^2 osculiren, während die Curven des einen Bündels AB, CD , die des andern AD, CB in A, C tangiren. Die beiden Büschel der sich selbst entsprechenden Curven in diesen Bündeln liegen auf derselben Fläche \mathfrak{A}^{2*}) durch $ABCD$ und verhalten sich ungleichartig zu deren beiden Schaaren.

48. Um die Identität der beiden tragenden Flächen zu beweisen, müssen wir zunächst die auf BD gelegenen Punkte B, D, Z, B_1, D_1 (Nr. 39, 40) genauer betrachten, zu denen wir noch den Punkt Q , der zu Z in Bezug auf B, D harmonisch ist, fügen wollen. Wir haben:

$$(DZBB_1) = -1, (BZDD_1) = -1;$$

also:

$$(DZBB_1) = (BZDD_1),$$

d. h. BD, ZZ, B_1D_1 sind in Involution; demnach ist Q als zweiter Doppelpunkt derselben auch harmonisch zu Z in Bezug auf B_1, D_1 .

Nun folgt aus:

$$(DZBB_1) = -1, (D_1B_1QZ) = -1,$$

dass DD_1, ZB_1, BQ in Involution sind, und ebenso sind es BB_1, ZD_1, DQ .

In Nr. 39 fanden wir den Kegelschnitt (α) in α , der von den Schmiegungebenen der durch X gehenden Curve des ersten Bündels eingehüllt wird, folgendermassen: Wir construiren die Punkte $X_\alpha \equiv (XA, CZ)$, $Y_\alpha \equiv (D_1X_\alpha, CB_1)$. Der durch Y_α gehende Kegelschnitt, welcher CD, BD in C, B tangirt, ist der verlangte (α) und seine Tangente in Y_α geht durch Z . Sie treffe CD in W_α .

Ersetzen wir den ersten Bündel durch den zweiten, so haben wir B und D, B_1 und D_1 zu vertauschen, und indem wir den analogen Kegelschnitt mit $(\alpha)^*$ bezeichnen, construiren wir:

$$Y_\alpha^* \equiv (B_1X_\alpha, CD_1); \quad W_\alpha^* \equiv (ZY_\alpha^*, CB).$$

Beweisen wir zunächst, dass die Gerade $W_\alpha W_\alpha^*$ durch Q geht.

Das vollständige Viereck $CX_\alpha Y_\alpha Y_\alpha^*$ ergibt, weil Z, Q zu B_1, D_1 harmonisch sind, dass $Y_\alpha Y_\alpha^*$ durch Q geht; ferner ergeben die vollständigen Vierecke $CY_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha$ und $CY_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha^*$ wegen der Involutionen: BB_1, ZD_1, DQ ; DD_1, ZB_1, BQ , dass $Y_\alpha^* W_\alpha$ durch B , $Y_\alpha W_\alpha^*$ durch D geht, und endlich liefert das vollständige Viereck $Y_\alpha Y_\alpha^* W_\alpha W_\alpha^*$ und die Harmonicität von Z, Q zu B, D die Behauptung.

*) Wird $ABCD$ in der bisherigen Weise zum Coordinatentetraeder gewählt und ist dann $a_{13}x_1x_3 + a_{24}x_2x_4 = 0$ die Basisfläche, so ist:

$$3a_{13}x_1x_3 = a_{24}x_2x_4$$

die Gleichung dieser Fläche.

Wenn man nun von einem beliebigen Punkte T auf BD die zweite Tangente an den Kegelschnitt (α) legt, welcher CD , BD in C , B tangirt und von ZW_α berührt wird, so ergibt sich leicht:

$$(BDZT) = (DCW_\alpha V_\alpha),$$

wobei V_α der Schnitt jener zweiten Tangente mit DC ist; ziehen wir ebenso die zweite Tangente aus T an $(\alpha)^*$, welche BC in V_α^* treffe, so ist:

$$(DBZT) = (BCW_\alpha^* V_\alpha^*).$$

Diese zweiten Tangenten sind die Spuren der dritten Schmiegungebenen aus T an die beiden durch X gehenden Curven der beiden Bündel in α .

Lassen wir den Punkt T in den obigen Punkt Q fallen, der zu Z harmonisch ist nach B, D , so wird: $(BDZQ) = (DBZQ)$, also auch:

$$(DCW_\alpha V_\alpha) = (BCW_\alpha^* V_\alpha^*),$$

und daraus ergibt sich, dass auch $V_\alpha V_\alpha^*$ durch Q geht. Mithin fallen die beiden zweiten Tangenten zusammen, und da wir einen analogen Beweis auch für γ führen können, so ergibt sich, dass die beiden Schmiegungebenen ξ, ξ^* von Q an die durch X gehenden Curven unserer beiden Bündel sich vereinigen. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

Die durch einen Punkt X gehenden Curven der beiden Bündel, welche $ABCD$ als zu A, C ; AB, CD , bez. zu A, C ; AD, CB gehöriges Schmiegungetetraeder haben, erhalten aus dem Punkte der Geraden BD , der durch B und D von der Ebene ACX harmonisch getrennt ist, dieselbe dritte Schmiegungeebene.

49. In der unserer jetzigen Betrachtung zu Grunde liegenden *Polarcorrelation* ist nun der Punkt Q der Pol der Ebene ACZ ; also erhalten wir bei beiden Bündeln zu dem Punkte X in ACZ dieselbe Schmiegungeebene ξ (Nr. 40),*) mithin auch denselben Punkt X' , also *dieselbe Hirst'sche Inversion in ACZ , denselben Kegelschnitt \mathfrak{K} und dieselbe tragende Fläche \mathfrak{A}^2 für die sich selbst entsprechenden Curven* (Nr. 43), wie oben in Nr. 47 behauptet wurde.

Da die einen Curven AB, CD , die andern AD, CB tangiren, so ist klar, dass sie sich zu den beiden Geradenschaaren von \mathfrak{A}^2 verschiedenartig verhalten.

Diese beiden Geradenschaaren von \mathfrak{A}^2 haben aber noch eine andere Beziehung zu den beiden Curvenbüscheln.

Betrachten wir dazu eine bestimmte Curve r^3 des ersten Büschels (mit AB, CD als Tangenten in A, C). Da r^3 durch eine *Polarcorrelation* in sich selbst übergeht, so entsteht auf ihr eine Punktinvolution,

*) Q ist sowohl T als S' der früheren allgemeinen Betrachtung.

in der je zwei Punkte gepaart sind, von denen jeder der Pol der Schmiegungebene des andern ist. Die Fläche, welche die Regelschaar der Verbindungslinien gepaarter Punkte trägt, sei \mathfrak{C}^2 . Da A, C zu ihren eigenen Schmiegungebenen polar sind, so sind sie die Doppelpunkte der Involution und \mathfrak{C}^2 geht durch die Tangenten AB, CD , hat also mit der Basisfläche \mathfrak{B}^2 noch zwei Gerade der andern Schaar gemein; wären diese von AD, BC verschieden, so hätte r^3 mit \mathfrak{B}^2 noch weitere Punkte gemein ausser den 6 in A, C , da ja diese Geraden von r^3 je einmal getroffen werden. Folglich geht auch \mathfrak{C}^2 durch $ABCD$ und ist deshalb mit \mathfrak{A}^2 identisch, da beide r^3 und $ABCD$ gemeinsam haben.

Die Regelschaar auf \mathfrak{A}^2 , zu der die Tangenten AB, CD gehören, schneidet also auf jeder Curve des ersten Büschels die oben erwähnte Involution von Punkten ein, von denen jeder der Pol der Schmiegungebene des andern ist. Die Punkte, in denen jede Gerade dieser Schaar die \mathfrak{B}^2 trifft, d. h. in denen sie AD, BC trifft, sind demnach harmonisch zu den beiden Punkten auf r^3 , und so entsteht auf jeder dieser Geraden durch die Curven des Büschels eine Involution, von welcher die Punkte auf AD, BC die Doppelpunkte sind; dieselben rühren von degenerirten Curven des Büschels her: jede der beiden Geraden AD, BC setzt, doppelt gedacht, mit CD, AB bez., eine solche Curve zusammen.

Die andere Regelschaar auf \mathfrak{A}^2 hat zum zweiten Büschel dieselbe Beziehung. Die Torsen der Curven beider Büschel umhüllen die Fläche, welche zu \mathfrak{A}^2 nach \mathfrak{B}^2 polar ist: für ihre Geradenschaaren erhalten wir die dualen Eigenschaften.

50. Jedes Vierseit der Basisfläche \mathfrak{B}^2 liefert 4 Büschel von cubischen Raumcurven, die in sich selbst übergehen. Demnach transformirt jede Polarcorrelation ∞^5 cubische Raumcurven in sich selbst; da es nun ∞^9 Polarcorrelationen und ∞^{12} eubische Raumcurven giebt, so wird jede gegebene cubische Raumcurve durch ∞^2 Polarcorrelationen in sich selbst transformirt.

Beweisen wir dies direct.

Es sei wieder $ABCD$ das zu den Punkten A, B und den Tangenten AB, CD der gegebenen Curve r^3 gehörige Schmiegungstetraeder, E ein beliebiger Punkt, ε eine beliebige Schmiegungebene von r^3 .

Wir lassen den Punkten A, B, C, D, E im ersten Raume die Ebenen $BCD, CDA, DAB, ACB, \varepsilon$ im zweiten correspondiren. Die dadurch festgelegte Correlation ist eine Polarcorrelation, da jeder Ecke von $ABCD$ die Gegenebene entspricht. *) Da nun r^3 durch

*) Staudt, Geometrie der Lage Nr. 326; Reye, Geometrie der Lage Abth. II. 9. Vortrag der 2. Aufl.

A, C, E geht, in den ersteren AB, CD tangirt, ABD, CDB osculirt, so osculirt die entsprechende Curve CDB, ABD, ε , tangirt in jenen CD, AB und geht durch C, A ; d. h. sie hat $ABCD$ in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder wie r^3 und ausserdem noch ε gemein und ist deshalb mit ihr identisch.

Solcher Schmiegungstetraeder der Curve, die auch in sich übergehen, aber derartig, dass jeder der beiden Punkte A, C in die Schmiegungebene des andern und die beiden Tangenten in einander übergehen, haben wir ∞^1 . Denn wenn bei einer Polarcorrelation, die eine cubische Raumcurve in sich überführt, einem Punkte A , seiner Tangente a und Schmiegungebene α , als zum ersten Raume gehörig, eine Schmiegungebene γ , ihre Tangente c und ihr Osculationspunkt C im zweiten entsprechen, so entsprechen auch den A, a, α im zweiten Raume γ, c, C im ersten; was bei der allgemeinen Correlation nicht der Fall ist. Mithin liefern jeder Punkt A der Curve und der Osculationspunkt C der ihm polaren Schmiegungebene eins jener Tetraeder.

Bei der obigen Herstellung einer Polarcorrelation, durch welche r^3 in sich transformirt wird, können wir demnach A, E festhalten, C, ε über die Curve bewegen und erhalten die ∞^2 Polarcorrelationen, welche die Reproduction der Curve leisten.

Wie bei jeder allgemeinen, so haben wir auch bei jeder Polarcorrelation, die eine cubische Raumcurve in sich überführt, ein und nur ein Schmiegungstetraeder, das in der früher besprochenen Weise in sich übergeht, d. h. so, dass jeder der beiden Curvenpunkte in seine eigene Schmiegungebene, jede der beiden Tangenten in sich transformirt wird. Es ist dies ein „Polartetraeder der besondern Art.“*) Dasselbe tritt ja auch bei der allgemeinen Correlation (im Haupttetraeder) auf; während das gemeine Polartetraeder für die Polarcorrelation charakteristisch ist.

51. Weil bei einem Nullsystem jeder Punkt in seine entsprechende Ebene (Nullebene) fällt, so muss jeder Punkt einer cubischen Raumcurve, die durch ein Nullsystem in sich übergeführt wird, seine eigene Schmiegungebene zur Nullebene haben.

Jede cubische Raumcurve wird nur durch das ihr zugehörige Nullsystem in sich selbst transformirt.

Da es nun ∞^5 Nullsysteme giebt, so muss jedes Nullsystem ∞^7 cubische Raumcurven in sich selbst transformiren oder zu so vielen gehören.

Um dies direct einzusehen, benutzen wir von Staudt**) erhaltene Sätze. Staudt beweist zunächst, dass, wenn drei Punkte einer cubischen

*) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung S. 143.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 485, 486.

Raumcurve ihre Nullebene in einem gegebenen Nullsystem N zur Schmiegungeebene haben, dies bei jedem Punkte der Fall ist. Sodann zeigt er, dass, wenn α, β, γ die Nullebenen von drei beliebigen Punkten A, B, C in N sind, bloß in einem der Büschel $A\alpha, B\beta, C\gamma$, etwa im ersten, ein Strahl a beliebig gewählt werden kann; der Strahl b in $B\beta$ ist dann eindeutig bestimmt, wenn die cubische Raumcurve, welche durch A, B, C geht und in A, B die Geraden α, b tangirt und die Ebenen α, β osculirt (Nr. 32), auch in C die Nullebene γ zur Schmiegungeebene haben soll. Wir können uns hinsichtlich der Punkte A, B, C auf eine feste Ebene beschränken; in dieser kann jeder von ihnen ∞^2 Lagen einnehmen, und nachdem A bestimmt ist, sind für a noch ∞^1 Lagen in $A\alpha$ möglich. So erhalten wir die ∞^7 cubischen Raumcurven.

Oder: Jedes Vierseit, in dem jede Ecke die Ebene ihres Winkels zur entsprechenden im Nullsysteme hat und die 4 Seiten sich also selbst entsprechen, liefert (Nr. 47) in jedem der vier Bündel einen Büschel sich selbst entsprechender Curven. Eine allgemeine Correlation hat nur ein solches Vierseit, eine Polarcorrelation hat ∞^4 , ein Nullsystem besitzt ∞^8 solche Vierseite. Auf jeder der ∞^6 Flächen 2. Grades, die durch N in sich transformirt werden (Nr. 25), geht jede Gerade der einen Schaar in sich selbst über, von der andern thun es nur zwei; diese mit irgend zwei von jenen bilden eins der fraglichen Vierseite. Während dann bei einer allgemeinen Correlation (und auch der Polarcorrelation) bloß ein Schmiegungstetraeder einer in sich transformirten cubischen Raumcurve so in sich übergeht, wie es in Nr. 38 $ABCD$ that, gehen alle ∞^2 Schmiegungstetraeder einer cubischen Raumcurve durch ihr Nullsystem in sich selbst über; weil jeder Punkt seiner Schmiegungeebene entspricht: die Projectivität von Nr. 33, 38 wird Identität. Jede durch das gegebene Nullsystem in sich transformirte cubische Raumcurve ergiebt sich deshalb bei ∞^2 Vierseiten, und wir erhalten $\frac{\infty^8 \times \infty^1}{\infty^2}$ oder ∞^7 in sich durch N transformirte cubische Raumcurven.

52. Jedes solche Vierseit gab, wie gesagt, vier Büschel in sich selbst transformirter Curven, die dann je auf einer durch das Vierseit gehenden Fläche 2. Grades liegen. Die beiden Trägerflächen der Büschel, die zu denselben zwei Gegenecken gehören, sind nicht identisch.*)

Der Pol (oder Nullpunkt) von ACZ ist Z ; die zweite Tangente aus ihm an (α) in α ist $ZY_\alpha W_\alpha$, die von der an $(\alpha)^*$ gezogenen $ZY_\alpha^* W_\alpha^*$ verschieden ist, und ebenso in γ ; so dass die beiden durch

*) Ihre Gleichungen, bezogen auf das mehrfach benutzte Tetraeder, sind:

$$2a_{12}x_1x_2 + a_{24}x_2x_4 = 0, \quad 3a_{13}x_1x_3 - a_{24}x_2x_4 = 0.$$

sie gehenden Schmiegungebenen ξ, ξ^* aus Z und also auch die beiden Pole X', X'^* verschieden sind. In Nr. 48 fanden wir, dass $Y_\alpha Y_{\alpha'}$ durch Q , der zu Z nach B_1, D_1 harmonisch ist, geht; daraus ergibt sich leicht, dass auch die beiden erwähnten zweiten Tangenten $ZY_\alpha, ZY_{\alpha'}$ zu ZC und BD harmonisch sind. Durch jene zweiten Tangenten $ZY_\alpha, ZY_{\alpha'}$ gehen die dritten Schmiegungebenen ξ, ξ^* von Z an die durch X gehenden Curven der beiden Bündel. Weil sie von Z kommen, haben sie beide den Punkt X selbst zum Osculationspunkte (Nr. 40). Schnittlinie $\xi\xi^*$ ist mithin ZX ; ihre Verbindungsebenen mit den obigen 4 harmonischen Strahlen, also die Ebenen ξ, ξ^*, ACZ und $(ZX, BD) \equiv \Lambda$ sind harmonisch, folglich auch ihre Pole (Nullpunkte) $X', X'^*, Z, L' \equiv (ZX, AC)$. X und X', X und X'^* sind entsprechende Punkte der beiden Inversionen in ACZ , die zu den beiden Curvenbündeln gehören, aber jene conjugirt in Bezug auf \mathfrak{R} und die Trägerfläche \mathfrak{A}^2 der sich selbst entsprechenden Curven des ersten Bündels, welche durch \mathfrak{R} geht; diese ebenso conjugirt in Bezug auf \mathfrak{A}^{2*} . Z , auf BD , und L' , auf AC gelegen, sind conjugirt zu X nach den beiden Ebenenpaaren im Büschel $(ABCD)$. Also sind die beiden Trägerflächen \mathfrak{A}^2 und \mathfrak{A}^{2*} harmonisch zu diesen beiden Ebenenpaaren ihres Büschels oder *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt*.*)

Münster i/W., Anfang April 1885.

*) Nachdem diese Abhandlung der Redaction der Annalen übersandt war, sind zwei andere Arbeiten erschienen, welche mit ihr in Zusammenhang stehen:

1) Corr. Segre, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale etc. (Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino, Ser. II, Tom. XXXVII), der die Arbeit desselben Verfassers, auf die sie sich vielfach bezieht: Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie (Memorie dell' Accademia dei Lincei. Ser. III, vol. XIX) vorangegangen war.

2) P. Del Pezzo, Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un' altra. — Sulle quadriche ad $n - 1$ dimensioni polari reciproche etc. (Rendiconto dell' Accademia di Napoli. Juni, Juli 1885). Vergl. Abschnitt VI des ersten Theiles der vorliegenden Arbeit, so wie meine Note in Bd. 25, durch die Herrn Del Pezzo's Abhandlungen veranlasst zu sein scheinen. — Ich muss noch Herrn G. Veronese's grosse Abhandlung: Sopra alcune notevoli configurazioni etc. (Memorie dell' Accademia dei Lincei Ser. III, vol. IX, 1881) erwähnen, in der sich einige Berührungspunkte mit meiner Arbeit finden. [Nov. 1885].