

SUR UN PROBLÈME D'INVERSION RÉSOLU PAR ABEL

PAR

E. GOURSAT

à PARIS.

En cherchant à déterminer une courbe située dans un plan vertical, de telle façon que le temps mis par un mobile λ , soumis à l'action de la pesanteur et assujetti à se mouvoir sur cette courbe, pour parvenir d'un point de départ quelconque D à un point donné A , soit une fonction donnée $\varphi(a)$ de la hauteur verticale a de la chute, ABEL a été conduit à résoudre une équation qui peut s'écrire

$$(1) \quad \varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{a-x}},$$

où $f(x)$ est la fonction à déterminer. En réfléchissant à la méthode employée pour résoudre cette équation et l'équation plus générale

$$(2) \quad \varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{(a-x)^n},$$

où n est un exposant positif quelconque inférieur à l'unité, il m'a semblé que la marche suivie par ABEL devenait presque intuitive, en rattachant le problème à une certaine intégrale double.

1. La fonction $\varphi(a)$ étant donnée, pour déterminer la fonction $f(x)$ au moyen de l'équation (2), admettons d'abord que cette fonction $f(x)$

peut être représentée par une expression analogue à celle de $\varphi(a)$, et posons

$$(3) \quad f(x) = \int_0^x \frac{\phi(y) dy}{(x-y)^n}$$

n' étant un nouvel exposant positif inférieur à l'unité, et $\phi(y)$ une nouvelle fonction inconnue. La formule (2) peut s'écrire, en posant $x = ax'$,

$$\varphi(a) = \int_0^1 a^{1-n} \frac{f(ax') dx'}{(1-x')^n},$$

et de la formule (3) on tire

$$f(ax') = \int_0^{ax'} \frac{\phi(y) dy}{(ax' - y)^n},$$

ou encore, en posant $y = ay'$,

$$f(ax') = a^{1-n'} \int_0^{x'} \frac{\phi(ay') dy'}{(x' - y')^{n'}},$$

et la valeur de $\varphi(a)$ devient, en remplaçant $f(ax')$ par cette expression,

$$(4) \quad \varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \frac{dx'}{(1-x')^n} \int_0^{x'} \frac{\phi(ay') dy'}{(x' - y')^{n'}}.$$

Mais le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'intégrale double de la fonction

$$\frac{a^{2-n-n'} \phi(ay')}{(1-x')^n (x'-y')^{n'}}$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites $y' = 0$, $y' = x'$, $x' = 1$. En intervertissant l'ordre des intégrations, on a donc aussi

$$\varphi(a) = a^{2-n-n'} \int_0^1 \phi(ay') dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{(1-x')^n (x'-y')^{n'}};$$

or la première intégration nous donne, en posant $x' = y' + (1 - y')t$,

$$\begin{aligned} \int_{y'}^1 \frac{dx'}{(1-x')^n (x'-y')^{n'}} &= (1-y')^{1-n-n'} \int_0^1 t^{-n'} (1-t)^{-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')} (1-y')^{1-n-n'}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\varphi(a) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')} \int_0^1 a^{2-n-n'} (1-y')^{1-n-n'} \phi(ay') dy';$$

en revenant à la variable $y = ay'$, on a encore

$$(5) \quad \varphi(a) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n')}{\Gamma(2-n-n')} \int_0^a (a-y)^{1-n-n'} \phi(y) dy.$$

On satisfait facilement à cette condition en prenant pour l'exposant n' , qui est resté indéterminé jusqu'ici, la valeur $1-n$, ce qui donne

$$(6) \quad \varphi(a) = \Gamma(n)\Gamma(1-n) \int_0^a \phi(y) dy = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^a \phi(y) dy;$$

on ne peut trouver de fonction $\phi(y)$ vérifiant la relation précédente que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$, et, s'il en est ainsi, on a immédiatement, en prenant les dérivées par rapport à la variable a ,

$$(7) \quad \phi(a) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \varphi'(a),$$

et la fonction inconnue $f(x)$ a pour expression

$$(8) \quad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y) dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

2. Cette expression de $f(x)$ n'est valable que si la fonction $\varphi(a)$ est nulle pour $a = 0$. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la fonction $f(x)$ ne peut être continue pour $x = 0$, comme le montre immédiatement la formule (1). Dans ce cas, nous prendrons pour $f(x)$ une expression de la forme

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\phi(y) dy}{(x-y)^{1-n}};$$

par une suite de transformations tout-à-fait pareilles aux précédentes, on trouve que $\varphi(a)$ peut s'écrire

$$(10) \quad \varphi(a) = \int_0^1 \phi(ay') dy' \int_{y'}^1 \frac{dx'}{x'(1-x')^n(x'-y')^{1-n}}.$$

La première intégrale peut être calculée, car si l'on pose

$$x' = \frac{y'}{1 + (y' - 1)t},$$

elle devient

$$\frac{1}{y'^{1-n}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-n}(1-t)^n} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{y'^{1-n}} = \frac{\pi}{\sin n\pi} y'^{n-1},$$

et la formule qui donne $\varphi(a)$ devient

$$(11) \quad \varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^1 \frac{\phi(ay') dy'}{y'^{1-n}},$$

ou, en revenant à la variable $y = ay'$,

$$(12) \quad a^n \varphi(a) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \int_0^a \frac{\phi(y)}{y^{1-n}} dy.$$

Les deux membres de l'égalité (12) s'annulent pour $a = 0$; il suffira donc que leurs dérivées soient égales, ce qui donne

$$\phi(a) = [a\varphi'(a) + n\varphi(a)] \frac{\sin n\pi}{\pi}$$

et l'expression cherchée de $f(x)$ est

$$(13) \quad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi x} \int_0^x \frac{y\varphi'(y) + n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}} dy.$$

Cette expression de $f(x)$ coïncide avec la première lorsque $\varphi(0) = 0$, car on peut l'écrire

$$\frac{\sin n\pi}{\pi x} \int_0^x \frac{(y-x)\varphi'(y) + n\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}} dy + \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

La première partie est égale à

$$-\frac{\sin n\pi}{\pi x} [(x-y)^n \varphi(y)]_0^x = \frac{\sin n\pi}{\pi x} x^n \varphi(0) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \frac{\varphi(0)}{x^{1-n}},$$

et la formule (13) prend la forme plus simple

$$(14) \quad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} + \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y)dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

3. Pour vérifier l'identité de la solution précédente avec la solution d'ABEL, remarquons qu'en posant $y = tx$ l'expression (13) de $f(x)$ devient

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^n t \varphi'(xt) + nx^{n-1} \varphi(xt)}{(1-t)^{1-n}} dt,$$

et le second membre est la dérivée par rapport à x de l'intégrale

$$\frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^n \varphi(xt) dt}{(1-t)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^{1-n}}.$$

Si donc on pose $ds = f(x)dx$, la formule (13) conduit à la formule même d'ABEL

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^{1-n}}.$$
