

# L'equazione *razionale* della superficie di KUMMER.

(Memoria VI di ERNESTO PASCAL, a Napoli.)

---

Nella Memoria V ho studiato con dettaglio le cosiddette funzioni JACOBIANE  $\Sigma$  di 1.<sup>a</sup> specie.

In questa nuova Memoria studio la relazione di 4.<sup>o</sup> grado che deve esistere fra le quattro  $\Sigma$  pari, e che non è altro che la cosiddetta *equazione razionale* della superficie di KUMMER, inquantochè i coefficienti di tale equazione sono invarianti *razionali* di una sestica binaria.

Una corrispondenza fra le superficie di KUMMER e una sestica binaria apparì sin dal lavoro classico del KLEIN in cui si dimostrava che la stessa superficie di KUMMER, oltrechè superficie di singolarità di un solo complesso quadratico, potea considerarsi come tale rispetto ad un intero sistema di complessi quadratici confocali rappresentati dall'equazione:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0.$$

Con ciò si veniva già a stabilire una corrispondenza fra le superficie di KUMMER e la sestica le cui radici erano le  $k$ .

Una relazione di una natura diversa fra la superficie di KUMMER e una sestica binaria, apparve quando fu dimostrato che le coordinate di tale superficie si poteano esprimere come funzioni razionali delle funzioni iperellittiche  $\mathfrak{S}$ , corrispondenti al campo di irrazionalità di una sestica binaria.

Una relazione infine di una natura anche più intima e immediata si presenta nell'equazione della superficie in coordinate  $\Sigma$ , in cui i coefficienti sono invarianti razionali della sestica corrispondente al campo di irrazionalità delle  $\Sigma$ .

Nel lavoro che seguirà a questo studierò l'altra relazione esistente fra il quadrato della  $\Sigma$  dispari e le  $\Sigma$  pari, la quale relazione corrisponde all'equazione di un fascio di superficie di 6.° ordine che toccano la superficie di KUMMER.

### § 1. Preliminari sulle superficie di Kummer.

È nota l'esistenza di alcune superficie algebriche, le cui coordinate possono esprimersi razionalmente mediante le funzioni  $\wp$  a due argomenti (di genere 2).

Così per es. sono di tal natura le superficie di 2.° ordine (\*) e le superficie di 4.° ordine aventi una conica doppia, e fra queste ultime in particolare le cosiddette *cicliidi*, cioè quelle in cui la conica doppia è diventata un cerchio immaginario (\*\*). Fra le superficie godenti della stessa proprietà vi è la cosiddetta *superficie di KUMMER*.

Tale superficie è di 4.° ordine e possiede 16 punti nodali e 16 piani singolari.

Essa fu trovata da KUMMER (\*\*\*) come superficie focale di una congruenza di 2.° ordine e di 2.<sup>a</sup> classe; in seguito il KLEIN (\*\*\*\*) dimostrò che si otteneva la stessa superficie anche come la superficie di singolarità del generale complesso quadratico già studiata da PLÜCKER, e infine lo stesso KLEIN (\*\*\*\*) dimostrò poco dopo che la stessa superficie può considerarsi come la superficie di singolarità degli  $\infty^1$  complessi confocali rappresentati dalla formola:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0 \quad (\lambda \text{ arbitrario}),$$

dove  $x_i$  sono le 6 coordinate omogenee della retta nello spazio, fra le quali esiste la relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0.$$

La superficie di KUMMER apparisce dunque in tal maniera in una certa relazione colla binaria di 6.° grado le cui radici sono le  $k_1 \dots k_6$ . Relazioni di

(\*) STAUDE, *Geometrische Deutung der Additionsth. der hyp. Integr. und Funct. I. Ordn. in System der confocalen Flächen 2. Grades*. Math. Ann., Bd. 22.

(\*\*) DOMSCH, *Ueber die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyp. Funct.* (Dissert. Leipzig). Greifswald, 1885.

(\*\*\*) KUMMER, *Monat. Berl. Acad.*, 1864. — *Abhand. der Berl. Akad.*, 1866.

(\*\*\*\*) PLÜCKER, *Neuer Geometrie*, 2<sup>er</sup> Abth. (1869), pag. 315.

(\*\*\*\*\*) KLEIN, *Zur Th. der Liniencomplexe des I. u. II. Gr.*, Math. Ann., Bd. 2, pag. 198.

una natura ancora più intima fra la superficie di KUMMER e una sestica binaria appariranno in seguito; per ora vogliamo limitarci ad accennare brevemente la natura della relazione trovata ora.

È chiaro prima di tutto che ogni sestica individua una superficie di KUMMER, perchè individua il fascio dei complessi confocali; propriamente la superficie di KUMMER è individuata non quando si danno solo i valori delle radici della sestica, ma quando si dà anche l'ordine col quale si vogliono far succedere queste radici. Quindi poichè vi sono 720 permutazioni delle 6 radici vi saranno altrettante superficie di KUMMER. Notiamo intanto che una permutazione fra le radici  $k$  equivale ad una sostituzione:

$$x'_i = x_k \quad (i, k, = 1, 2, \dots, 6),$$

fra le coordinate di rette.

D'altra parte il fascio dei complessi confocali ritorna in sè stesso con una sostituzione:

$$x'_i = \pm x_i \quad (i = 1, \dots, 6),$$

che è una sostituzione che fa tornare da coordinate di rette a coordinate di rette, perchè la relazione citata  $\sum_1^6 x_i^2 = 0$  resta inalterata e quindi sempre soddisfatta.

Ora di tali ultime sostituzioni ve ne sono 32, per ciascuna delle quali dunque la superficie di KUMMER torna in sè stessa (\*).

Possiamo dunque dire che ad ogni sestica binaria  $f(\lambda)$  corrispondono 720 superficie di KUMMER.

Ma si verifica la proprietà reciproca? Data, cioè, una superficie di KUMMER o un numero finito di esse, è determinata una sestica?

La risposta a questa domanda è negativa, perchè si può far vedere facilmente che il fascio dei complessi confocali non si altera per una stessa sostituzione lineare delle quantità  $k_i$ , cioè ritorna in sè stesso; quindi possiamo dire che da una superficie di KUMMER, non restano individuati i coefficienti (o le radici) della sestica, ma solamente i suoi invarianti assoluti o moduli.

Da ciò si ricava che l'equazione della superficie di KUMMER deve potersi ridurre sempre a contenere per coefficienti solo invarianti assoluti della sestica.

---

(\*) Vedi la Memoria di REICHARDT, *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Functionen* (Dissertation Leipzig). Halle, 1887. Nel § 2 di questa Memoria è studiato il gruppo delle 32.720 sostituzioni fra le coordinate di rette, di cui si parla nel testo.

§ 2. Varie forme dell'equazione della superficie di Kummer.  
Relazioni fra questa e le funzioni  $\mathfrak{S}$ .

Introduciamo, anzichè le coordinate di rette, le coordinate di punti  $y_1, y_2, y_3, y_4$  riferite al tetraedro fondamentale (\*). Allora si ricavano notoriamente le relazioni (ponendo  $p_{ij} = y'_i y''_j - y''_i y'_j$ ):

$$\begin{aligned} x_1 &= (p_{12} + p_{34}), & x_3 &= (p_{31} + p_{24}), & x_5 &= (p_{14} + p_{23}) \\ x_2 &= i(p_{12} - p_{34}), & x_4 &= i(p_{31} - p_{24}), & x_6 &= i(p_{14} - p_{23}), \end{aligned}$$

e reciprocamente:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{1}{2}(x_1 - ix_2), & p_{31} &= \frac{1}{2}(x_3 - ix_4), & p_{14} &= \frac{1}{2}(x_5 - ix_6) \\ p_{34} &= \frac{1}{2}(x_1 + ix_2), & p_{24} &= \frac{1}{2}(x_3 + ix_4), & p_{23} &= \frac{1}{2}(x_5 + ix_6), \end{aligned}$$

mentre la relazione fondamentale fra le coordinate  $x$ , cioè  $\sum_1^6 x_i^2 = 0$  diventa:

$$p_{12} p_{34} + p_{31} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Partendo ora dall'equazione del complesso:

$$\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0.$$

possiamo esprimere tale equazione in funzione delle coordinate  $(y')$   $(y'')$  che sono le coordinate di due punti della retta  $(x)$ . Si ha allora una relazione di 2.° grado in  $y'$  e  $y''$ . Fissato  $y''$  questa equazione rappresenterà un cono di 2.° ordine il cui vertice è  $y''$ . Esprimendo la condizione perchè questo cono si scinda in due piani si ha per luogo del punto  $y''$  precisamente la superficie di KUMMER.

Si trova così l'equazione (\*\*):

$$\begin{aligned} y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + y_4^4 + A y_1 y_2 y_3 y_4 - 2 A_{3456} (y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) \\ - 2 A_{5612} (y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) \\ - 2 A_{1234} (y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2) = 0, \end{aligned}$$

(\*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 2.

(\*\*) REICHARDT, Opera cit., pag. 395.

dove

$$A = 8 \frac{k_1 k_2 (k_3 + k_4 - k_5 - k_6) + k_3 k_4 (\text{ecc.}) + k_5 k_6 (\text{ecc.})}{(k_1 - k_2) (k_3 - k_4) (k_5 - k_6)}$$

$$A_{ijhl} = \frac{(k_i - k_h) (k_j - k_l) + (k_i - k_l) (k_j - k_h)}{(k_i - k_j) (k_h - k_l)}.$$

Si può dare varie forme a questa equazione e se ne può anche dare un'altra nella quale compariscono esplicitamente i cosiddetti *moduli di BORCHARDT*, ma per tali argomenti rimandiamo il lettore all'Opera citata di REICHARDT (\*).

Passiamo ora ad un altro genere di considerazioni. Fu primo il KLEIN (\*\*) a riconoscere la possibilità di esprimere le coordinate di un punto della superficie di KUMMER mediante quattro speciali funzioni  $\mathfrak{S}$  iperellittiche a due argomenti; poi si succedettero i lavori di CAYLEY (\*\*\*), BORCHARDT (\*\*\*\*), WEBER (\*\*\*\*\*), ROHN (\*\*\*\*\*).

Ecco intanto alcune indicazioni su quest'altro ramo della teoria.

Si sa che per  $p = 2$  esistono 16 funzioni iperellittiche  $\mathfrak{S}$ , di cui 10 pari e 6 dispari. A ciascuna di tali  $\mathfrak{S}$  corrisponde una caratteristica:

$$\begin{pmatrix} i & j \\ h & l \end{pmatrix},$$

dove  $i, j, h, l$  sono quattro numeri interi e propriamente 0 o 1 (\*\*\*\*\*).

Queste 16 caratteristiche si possono distribuire in gruppi tali che tutte quelle di un gruppo hanno fra loro relazioni simili a quelle che hanno fra loro le caratteristiche di un altro gruppo analogo.

Le  $\mathfrak{S}$  corrispondenti avranno allora fra loro delle speciali relazioni algebriche.

(\*) REICHARDT, loc. cit. I moduli di BORCHARDT possono essere definiti sia come rapporti dei valori nulli di certe speciali funzioni  $\mathfrak{S}$  (vedi BORCHARDT, *Sur le choix des modules dans les intégr. hyp.* Comptes Rendus, t. 88) sia come le coordinate di un nodo della superficie di KUMMER (vedi REICHARDT, Opera cit., pag. 392).

(\*\*) Math. Ann., Bd. 5, pag. 302.

(\*\*\*) CAYLEY, *On the double  $\Theta$  fonctions in connexion with a 16 nodal quartic surface.* Crelle, vol. 83.

(\*\*\*\*) BORCHARDT, *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche, etc.* Crelle, vol. 83, pag. 234.

(\*\*\*\*\* WEBER, *Ueber Kummerschen Fläche, etc.* Crelle, vol. 84, pag. 332.

(\*\*\*\*\* ROHN, *Transformation der hyperellipt. Funct.  $p = 2$ , etc.* Math. Ann., Bd. 15, pag. 315.

(\*\*\*\*\* Vedi Memoria III. Annali di Matematica, vol. 17, § 2.

Fra tali gruppi sono notevoli le cosiddette quaterne di GÖPEL (\*), e le quaterne di ROSENHAIN (\*\*).

Una quaterna di GÖPEL risulta di tali quattro funzioni  $\mathfrak{S}$  o tutte pari, o due pari e due dispari, tali che la somma delle loro caratteristiche sia congruente (mod. 2) alla caratteristica fondamentale  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (\*\*\*).

Una quaterna di ROSENHAIN risulta di quattro  $\mathfrak{S}$  tali che fra esse vi è sempre un numero dispari di  $\mathfrak{S}$  dispari, e che la somma delle loro caratteristiche sia anche congruente (mod. 2) alla caratteristica fondamentale (0).

Esistono 60 quaterne di GÖPEL e 80 quaterne di ROSENHAIN.

Una quaterna di GÖPEL è per es. quella formata colle quattro caratteristiche pari:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

corrispondenti, secondo la notazione di WEIERSTRASS, alle  $\mathfrak{S}$  coi seguenti indici:

$$\mathfrak{S}_5, \quad \mathfrak{S}_{34}, \quad \mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{S}_{01}.$$

Una quaterna di ROSENHAIN è per es quella formata colle caratteristiche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

corrispondenti, secondo le notazioni di WEIERSTRASS, alle  $\mathfrak{S}$  cogli indici:

$$\mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{S}_5, \quad \mathfrak{S}_{01}, \quad \mathfrak{S}_0.$$

Ora sono precisamente queste tali quaterne che hanno una relazione assai intima colla superficie di KUMMER.

Se indichiamo con  $v_1, v_2$  i due parametri di un punto della superficie di KUMMER, allora si dimostra che i quadrati delle quattro  $\mathfrak{S}$ , appartenenti ad una quaterna di GÖPEL, eguagliati a 0, rappresentano sulla superficie le quattro coniche che sono tagliate sulla superficie da quattro piani *singolari* tali che il loro tetraedro non ha per vertici alcun *nodo*.

---

(\*) GÖPEL, Crelle, vol. 35, pag. 377.

(\*\*) ROSENHAIN, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*. Mém. des savants étrang., vol. 11 (1846).

(\*\*\*) Per somma di *caratteristiche* si intende la caratteristica i cui elementi sono rispettivamente le *somme* degli elementi omologhi dei termini.

Se invece di una quaterna di GÖPEL, ne consideriamo una di ROSENHAIN, abbiamo le quattro coniche generate da quattro piani singolari tali che i quattro vertici del tetraedro sieno quattro *nodi* (\*). D'altra parte si sa che fra i quadrati delle quattro  $\mathfrak{S}$  appartenenti ad una quaterna di GÖPEL o di ROSENHAIN esistono delle relazioni algebriche di 4.º grado (\*\*); se dunque scegliamo per tetraedro fondamentale delle coordinate un tetraedro di GÖPEL o di ROSENHAIN, le coordinate omogenee di un punto della superficie di KUMMER saranno proporzionali ai quadrati delle quattro funzioni  $\mathfrak{S}$  corrispondenti, e l'equazione della superficie di KUMMER sarà data dalla relazione algebrica di 4.º grado di cui si è parlato avanti.

Si hanno così due altre forme per l'equazione della nostra superficie; i coefficienti che entrano in tali equazioni sono funzioni razionali dei valori nulli di certe funzioni  $\mathfrak{S}$ , e quindi dipendono direttamente, sebbene in maniera trascendente, dai *moduli* della forma di 6.º grado che è il fondamento della irrazionalità iperellittica. Per le forme di tali equazioni rimandiamo il lettore all'Opera più volte citata di REICHARDT (\*\*\*).

### § 3. Introduzione delle quattro funzioni $\Sigma$ pari come coordinate di un punto della superficie di Kummer.

Introduciamo ora le quattro funzioni  $\Sigma$  pari studiate nella Memoria V.

Esse si possono esprimere linearmente mediante i quadrati di quattro speciali funzioni  $\sigma$  o  $\mathfrak{S}$  (\*\*\*\*) (tre dispari e una pari formanti una quaterna di ROSENHAIN). Di qui si ricava che le coordinate di un punto della superficie di KUMMER debbono potersi esprimere linearmente mediante le dette funzioni  $\Sigma$ ; con una trasformazione lineare deve dunque sempre potersi ridurre la superficie di KUMMER in modo che le quattro coordinate omogenee di un suo punto sieno precisamente le  $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$ . Ora è facile far vedere che fra queste quattro funzioni esiste una relazione algebrica razionale di 4.º grado, la quale è dunque la richiesta equazione (\*\*\*\*\*).

(\*) Vedi, per l'esposizione di queste proprietà, REICHARDT, Opera cit., § 9-10.

(\*\*) Per la generalizzazione di tali relazioni al caso iperellittico di genere qualunque  $p$ , vedi: BRIOSCHI, Annali di Matem., vol. 10, pag. 161. Ivi il BRIOSCHI dimostra che una relazione analoga a quella di GÖPEL sussiste anche fra certe speciali  $2p$  funzioni  $\mathfrak{S}$ .

(\*\*\*) REICHARDT, Opera cit., § 11.

(\*\*\*\*) BURKHARDT, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, pag. 241 in nota.

(\*\*\*\*\*) Lezioni di KLEIN (Estate 1887, Inverno 1887-88). — BURKHARDT, Opera cit., pag. 231.

Per trovare tale relazione cominciamo a trovare la relazione che esiste fra le quattro espressioni  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , i cui rapporti sono le funzioni iperellittiche di 1.<sup>a</sup> specie e che sono state studiate nella Memoria precedente.

Esse sono:

$$X_1 = (x' x'')^2 l_{x'} l_{x''}$$

$$X_2 = (x' x'')^2 m_{x'} m_{x''}$$

$$X_3 = (x' x'')^2 n_{x'} n_{x''}$$

$$X_4 = \sqrt{f x'} \sqrt{f x''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3,$$

essendo  $a_x^6$  la sestica, e  $l_x^2, m_x^2, n_x^2$  i noti suoi tre covarianti quadratici.

Osserviamo che, secondo la posizione dei punti  $x' x''$ , il prodotto  $\sqrt{f x'} \sqrt{f x''}$  potrà avere il segno positivo o il negativo, quindi in ogni caso possiamo scrivere:

$$[X_4 - (\sqrt{f x'} \sqrt{f x''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3)] [X_4 - (-\sqrt{f x'} \sqrt{f x''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3)] = 0,$$

cioè:

$$X_4^2 - 2 a_{x'}^3 a_{x''}^3 X_4 + [(a_{x'}^3 a_{x''}^3)^2 - f(x') f(x'')] = 0 \quad (*). \quad (a)$$

Ora si abbia un covariante di  $f$  in  $x', x''$ , simmetrico in queste due serie di variabili e dello stesso grado in ciascuna di esse. Allora, con un metodo perfettamente analogo a quello tenuto da CLEBSCH (\*\*), si può rappresentarlo come funzione razionale di  $l_{x'} l_{x''}, m_{x'} m_{x''}, n_{x'} n_{x''}$ , e coi coefficienti che sieno *invarianti* di  $f$ .

Al denominatore comparirà solo una potenza dell'invariante:

$$-R = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_2^2 \\ m_1^2 & m_1 m_2 & m_2^2 \\ n_1^2 & n_1 n_2 & n_2^2 \end{vmatrix} = -(lm)(mn)(nl),$$

e l'esponente di tal potenza sarà propriamente eguale al grado del primitivo covariante in  $x'$  o  $x''$ . È facile vedere che il 3.<sup>o</sup> termine della formola (a) è divisibile per  $(x' x'')$ , perchè si annulla per  $x' = x''$ ; e inoltre essendo poi simmetrico in tali due variabili sarà addirittura divisibile per  $(x' x'')^2$ .

Possiamo dunque scrivere (a) sotto l'altra forma:

$$X_4^2 - 2 a_{x'}^3 a_{x''}^3 X_4 + (x' x'')^2 G_4(x' x'') = 0,$$

essendo  $G_4$  un covariante razionale intero di  $f$ .

(\*) BURKHARDT, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, pag. 231.

(\*\*) *Theorie d. alg. Formen*, pag. 411.



Facciamo ora per  $a_x^3 a_{x'}^3$ , e  $G_4(x' x'')$  la trasformazione di cui si è parlato avanti, e poi moltiplichiamo tutta l'espressione per  $R^4(x' x'')^6$ . Allora si ha un'espressione della forma:

$$R^2(x' x'')^2 \cdot R^2(x' x'')^4 X_4 + R(x' x'')^6 H_3 + (x' x'')^8 H_4 = 0,$$

dove  $H_3$ ,  $H_4$  sono delle funzioni razionali intere dei gradi 3, 4, in  $l_{x'} l_{x''}$ ,  $m_{x'} m_{x''}$ ,  $n_{x'} n_{x''}$ .

Ora, per lo stesso principio sviluppato sopra, si ha che  $R^2(x' x'')^2$  può esprimersi come funzione intera di 2.° grado  $H_2$  di queste ultime variabili, onde poi infine accoppiando i fattori esterni  $(x' x'')$  colle dette variabili che compariscono nelle  $H$ , si ha la espressione:

$$R^2 F_2(X_1, X_2, X_3) X_4^2 + R F_3(X_1, X_2, X_3) X_4 + F_4(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad (b)$$

dove le  $F$  sono funzioni intere di  $X_1, X_2, X_3$ , e che è la richiesta relazione biquadratica (\*).

Basta ora moltiplicare tutta la formola precedente per  $[\chi(x' x'')]^4$  essendo  $\chi$  la *forma media* di cui si è parlato nella Memoria precedente (\*\*), per ottenere la relazione fra le quattro funzioni  $\Sigma$  pari. Per le cose osservate sopra si ha che in tale equazione (b) i coefficienti sono funzioni razionali intere degli invarianti fondamentali della sestica. L'equazione (b) in coordinate omogenee  $X$  o  $\Sigma$  rappresenta *l'equazione razionale della superficie di KUMMER*, per le cose osservate al principio di questo paragrafo.

Lo scopo dei paragrafi seguenti è di costruire effettivamente l'equazione (b), esprimendo i suoi coefficienti razionalmente mediante i quattro invarianti fondamentali  $A, B, C, D$  della sestica binaria.

#### § 4. Introduzione alla effettiva costruzione dell'equazione (b) del paragrafo precedente.

Dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} l_{x'} l_{x''} &= l_1^2 x'_1 x''_1 + l_1 l_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + l_2^2 x'_2 x''_2 \\ m_{x'} m_{x''} &= m_1^2 x'_1 x''_1 + m_1 m_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + m_2^2 x'_2 x''_2 \\ n_{x'} n_{x''} &= n_1^2 x'_1 x''_1 + n_1 n_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + n_2^2 x'_2 x''_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(\*) KLEIN, Lezioni. Göttingen (1887-88). — BURKHARDT, loc. cit.

(\*\*) Memoria V, § 7.

si ricavano i valori di

$$-R x'_1 x''_1, \quad -R(x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2), \quad -R x'_2 x''_2.$$

Intanto:

$$(x' x'')^2 = (x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2)^2 - 4 x'_1 x''_1 \cdot x'_2 x''_2,$$

onde si ha:

$$\begin{aligned} R^2(x' x'')^2 = & \begin{vmatrix} l_1^2 & l_{x'} l_{x''} & l_2^2 \\ m_1^2 & m_{x'} m_{x''} & m_2^2 \\ n_1^2 & n_{x'} n_{x''} & n_2^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} l_{x'} l_{x''} & l_1 l_2 & l_2^2 \\ m_{x'} m_{x''} & m_1 m_2 & m_2^2 \\ n_{x'} n_{x''} & n_1 n_2 & n_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_{x'} l_{x''} \\ m_1^2 & m_1 m_2 & m_{x'} m_{x''} \\ n_1^2 & n_1 n_2 & n_{x'} n_{x''} \end{vmatrix} \\ = & \left. \begin{aligned} & [(m n)(m' n')(m' n)(m n) - (m n)(m' n')(m m')(n n')] l_{x'} l_{x''} \cdot l'_{x'} l'_{x''} \\ & + \text{ecc.} \quad \text{ecc.} \quad \text{ecc.} \\ & + 2 [(m n)(l' n')(n' m)(l' n) + (m n)(l' n')(m l')(n n')] l_{x'} l_{x''} \cdot m_{x'} m_{x''} \\ & + \text{ecc.} \quad \text{ecc.} \quad \text{ecc.}, \end{aligned} \right\} (2) \end{aligned}$$

dove le altre linee si ricavano dalle precedenti permutando circolarmente i simboli  $l, m, n$ , e le lettere cogli apici rappresentano simboli *equivalenti* rispettivamente a quelli rappresentati dalle lettere simili senza apici.

Unendo alle (1) l'altra formola:

$$a_{x'} a_{x''} = a_1^2 x'_1 x''_1 + a_1 a_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + a_2^2 x'_2 x''_2,$$

e eliminando fra le quattro formole le tre quantità:

$$x'_1 x''_1, \quad x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1, \quad x'_2 x''_2,$$

si ha:

$$\begin{aligned} -R a_{x'} a_{x''} = & + (m n)(n a)(m a) l_{x'} l_{x''} + (n l)(n a)(l a) m_{x'} m_{x''} \\ & + (l m)(l a)(m a) n_{x'} n_{x''}, \end{aligned}$$

ed elevando a 3.<sup>a</sup> potenza si ha:

$$\begin{aligned} R^3 a_{x'}^3 a_{x''}^3 = & \sum (m n)(m' n')(m'' n'') (m a)(m' a)(m'' a) (n a)(n' a)(n'' a) l_{x'} l_{x''} l'_{x'} l'_{x''} l''_{x'} l''_{x''} \\ & + 3 \sum (m n)(m' n')(n'' l'') (m a)(m' a)(n a)(n' a)(n'' a) (l' a) l_{x'} l_{x''} l'_{x'} l'_{x''} m'_{x'} m''_{x''} \\ & + 3 \sum (m n)(n' l')(n'' l'') (m a)(n a)(n' a)(n'' a) (l' a) (l'' a) l_{x'} l_{x''} m'_{x'} m'_{x''} m''_{x'} m''_{x''} \\ & + 6 (m n)(n' l')(l'' m'') (m a)(m'' a)(n a)(n' a)(l' a) (l'' a) l_{x'} l_{x''} m'_{x'} m'_{x''} n''_{x'} n''_{x''}, \end{aligned} \quad (3)$$

dove col segno  $\sum$  indichiamo l'assieme di tutte le altre espressioni che si otterrebbero permutando circolarmente i simboli  $l, m, n$ .

Se nell'espressione (2) mutiamo:

$$l_x l_{x''}, \quad m_x m_{x'}, \quad n_x n_{x'},$$

rispettivamente in

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3,$$

abbiamo esattamente l'espressione di  $F_2$  della equazione (b) del paragrafo precedente.

Analogamente cogli stessi mutamenti, il secondo membro della formola (3) diventa l'espressione di  $\frac{1}{2} F_3$ .

Introducendo le notazioni:

$$\lambda = (mn) m_x n_x, \quad \mu = (nl) n_x l_x, \quad \nu = (lm) l_x m_x,$$

possiamo dunque brevemente scrivere:

$$F_3 = 2 [\sum (\lambda a)^2 X_1]^3, \quad (4)$$

dove col segno  $\sum$  si intende al solito che bisogna operare la somma delle espressioni che si ottengono permutando i simboli circolarmente.

Passiamo ora a trovare l'espressione di  $F_4$ .

Si ha in primo luogo:

$$\left. \begin{aligned} a_{x'}^3 a_{x''}^3 \cdot b_x^3 b_{x''}^3 - a_{x'}^6 b_{x''}^6 &= a_x^3 b_{x''}^3 (a_{x'}^3 b_x^3 - a_{x'}^3 b_{x''}^3) = \\ &= \frac{1}{2} (a_x^3 b_{x''}^3 - a_{x''}^3 b_x^3) (a_{x'}^3 b_x^3 - a_{x'}^3 b_{x''}^3) \\ &= -\frac{1}{2} (ab)^2 (x' x'')^2 \left\{ 2 a_{x'}^4 b_{x''}^4 + 3 a_{x'}^2 a_{x''}^2 b_x^2 b_{x''}^2 + 4 a_{x'}^3 a_{x''} b_x b_{x''}^3 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ora applicando la nota formola di GORDAN per le forme binarie si ha (indicando al solito con  $\Delta$  le operazioni di polare):

$$\begin{aligned} a_{x'}^4 b_{x''}^4 &= \Delta^4 a_{x'}^4 b_{x''}^4 + \frac{12}{7} (x' x'')^2 (ab)^2 \Delta^2 a_{x'}^2 b_{x''}^2 + \frac{1}{5} (x' x'')^4 (ab)^4 \\ a_{x'}^2 a_{x''}^2 b_x^2 b_{x''}^2 &= \Delta^4 a_{x'}^4 b_{x''}^4 - \frac{2}{7} (x' x'')^2 (ab)^2 \Delta^2 a_{x'}^2 b_{x''}^2 + \frac{1}{30} (x' x'')^4 (ab)^4 \\ a_{x'}^3 a_{x''} b_x b_{x''}^3 &= \Delta^4 a_{x'}^4 b_{x''}^4 - \frac{3}{14} (x' x'')^2 (ab)^2 \Delta^2 a_{x'}^2 b_{x''}^2 - \frac{1}{20} (x' x'')^4 (ab)^4, \end{aligned}$$

tenendo presente che nelle nostre formole i simboli del primo membro si completano tutti col determinante  $(ab)^2$ , e quindi, poichè si sviluppano funzioni

che sono simmetriche in  $x', x''$  (perchè  $a, b$  sono simboli equivalenti), è inutile tener conto dei termini contenenti  $(x' x'')$  a potenze dispari.

Allora il primo membro di (5) diventa:

$$-\frac{1}{2}(ab)^2(x'x'')^2\left\{9\Delta^4a_x^4b_x^4+\frac{12}{7}(x'x'')^2(ab)^2\Delta^2a_x^2b_x^2+\frac{3}{10}(x'x'')^4(ab)^4\right\},$$

e ponendo:

$$(ab)^2a_x^4b_x^4=H_x^2$$

$$(ab)^4a_x^2b_x^2=i_x^4$$

$$(ab)^6=A,$$

si ha:

$$-\frac{1}{2}(x'x'')^2\left\{9H_x^4H_{x''}^4+\frac{12}{7}(x'x'')^2i_x^2i_{x''}^2+\frac{3}{10}A(x'x'')^4\right\}.$$

Esprimendo ora  $H_x, H_{x''}, i_x, i_{x''}$  analogamente come abbiamo fatto avanti per  $a_x, a_{x''}$ , si ha infine

$$\left. \begin{aligned} F_4 &= -\frac{9}{2}[\sum(\lambda H)^2 X_1]^4 \\ &\quad -\frac{6}{7}F_2[\sum(\lambda i)^2 X_1]^2 \\ &\quad -\frac{3}{20}A \cdot F_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Resta a calcolare ora  $F_2, F_3, F_4$  in funzione degli invarianti fondamentali della sestica.

### § 5. Cenno sugli invarianti e covarianti della sestica binaria $f$ .

In questo paragrafo inseriremo alcune formole sulle forme invariantive di una sestica, le quali ci serviranno poi in seguito.

In primo punto è noto che una sestica binaria possiede un sistema completo composto di 26 forme di cui 5 invarianti, e 21 covarianti (\*). Dei 5 in-

---

(\*) CLEBSCH, *Theorie d. b. alg. Form.*, pag. 296. — GORDAN, *Invariantenth.*, Bd. 2, pag. 283.

varianti, 4 sono di peso pari e sono quelli chiamati  $A, B, C, D$ , e uno ( $R$ ) è di peso dispari; quindi il quadrato di  $R$  si esprimerà razionalmente mediante  $A, B, C, D$ .

Esistono sei covarianti di 2.<sup>o</sup> ordine che sono i cosiddetti  $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$  dove gli ultimi tre non sono che rispettivamente i determinanti funzionali dei primi tre combinati a due a due.

È interessante poi per i nostri scopi, ricordare il covariante di 4.<sup>o</sup> ordine (ponendo  $f = a_x^6 = b_x^6 = \dots$ ):

$$k = i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2 \quad (*),$$

e il suo essiano (anche di 4.<sup>o</sup> ordine)  $\Delta$ .

Partendo da questo  $k$  si possono esprimere assai semplicemente, come *spinte*, i principali covarianti e gli invarianti di  $f$ .

Così si ha:

$$\begin{aligned} l &= (ak)^4 a_x^2, & m &= (lk)^2 k_x^2, & n &= (mk)^2 k_x^2 \\ A &= (ab)^6, & B &= (kk')^4, & C &= (kk')^2 (k'k'')^2 (k''k)^2, \\ D &= (f, l^3)^6, & R &= (lm)(mn)(nl). \end{aligned}$$

Si usa indicare con  $A_{ll}, A_{mm}, A_{nn}, A_{lm}, \dots$  rispettivamente, gli invarianti delle quadratiche  $l, m, n$  considerate isolatamente, e considerate a due a due. Ci occorre qui trascrivere le formole che esprimono tali nuovi invarianti in funzione dei fondamentali. Tali formole sono:

$$\left. \begin{aligned} A_{ll} &= 2C + \frac{1}{3}AB & A_{mn} &= \frac{1}{3}B^3 + \frac{2}{3}C^2 + \frac{4}{9}ABC \\ A_{mm} &= D & A_{nl} &= D \\ A_{nn} &= \frac{1}{2}BD + \frac{2}{9}C(B^2 + AC) & A_{lm} &= \frac{2}{3}(B^2 + AC) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

In seguito ci occorreranno ancora le seguenti altre formole:

a) 2.<sup>e</sup> *überschiebungen* di  $i$  su  $l, m, n$ , cioè:

$$\left. \begin{aligned} (il)^2 &= m, & (im)^2 &= n, \\ (in)^2 &= \frac{Bm}{2} + \frac{Cl}{3} \quad (**). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(\*) CLEBSCH lo chiama  $i$ , GORDAN lo chiama  $k$ .

(\*\*) GORDAN, Opera cit., pag. 286-287.

b) 2.<sup>e</sup> *überschiebungen* di  $\Delta$  su  $l, m, n$ , cioè (\*):

$$\left. \begin{aligned} (\Delta l)^2 &= n - \frac{B}{3} l \\ (\Delta m)^2 &= \frac{1}{6} B m + \frac{1}{3} C l \\ (\Delta n)^2 &= \frac{1}{6} B n + \frac{1}{3} C m. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

c) 4.<sup>e</sup> *überschiebungen* di  $f$  su prodotti a due a due delle tre quadratiche, cioè (\*\*):

$$\left. \begin{aligned} (f, l^2)^4 &= -\frac{2}{3} B l + \frac{A}{3} m + 2 n \\ (f, m^2)^4 &= \left( \frac{1}{3} B^2 + \frac{4}{9} A C \right) l - \frac{1}{3} C m + \frac{1}{3} B n \\ (f, n^2)^4 &= \left( \frac{2}{9} C^2 + \frac{1}{6} B^2 + \frac{2}{9} A B C \right) l + \left( \frac{1}{2} D - \frac{1}{18} B C \right) m - \left( \frac{1}{6} B^2 + \frac{2}{9} A C \right) n \\ (f, m n)^4 &= \left( \frac{1}{9} B C + \frac{1}{2} D \right) l + \left( \frac{1}{6} B^2 + \frac{1}{9} A C \right) m - \frac{1}{3} C n \\ (f, n l)^4 &= \frac{1}{9} A C l + \left( \frac{2}{3} C + \frac{1}{6} A B \right) m + \frac{1}{3} B n \\ (f, l m)^4 &= \frac{2}{3} C l + \frac{1}{3} B m + \frac{1}{3} A n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

d) 2.<sup>e</sup> *überschiebungen* di  $f$  su  $l, m, n$ , cioè (\*\*\*):

$$\left. \begin{aligned} (f, l)^2 &= 2 \Delta + \frac{A}{3} i \\ (f, m)^2 &= \frac{l^2}{2} + \frac{B}{3} i + \frac{A}{3} \Delta \\ (f, n)^2 &= l m - \frac{1}{3} C i + \frac{B}{3} \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(\*) GORDAN, Opera cit., pag. 287.

(\*\*) CLEBSCH, Opera cit., pag. 454. — GORDAN, Opera cit., pag. 287.

(\*\*\*) GORDAN, Opera cit., pag. 287 e seg.

## § 6. Calcolo dell'espressione di $F_2$ .

Secondo la formola (2) del § 4 abbiamo che l'espressione di  $F_2$  può scriversi:

$$F_2 = \sum [(mn)(m'n')(m'n)(mn) + (mn)(m'n')(m'm)(nn)] X_1^2 \\ + 2 \sum [(mn)(l'n')(n'm)(l'n) + (mn)(l'n')(m'l')(nn)] X_1 X_2,$$

dove col simbolo  $\sum$  si intende che bisogna sommare tutti gli altri termini analoghi che si ottengono permutando le lettere  $l, m, n$  e contemporaneamente permutando anche circolarmente  $X_1, X_2, X_3$ .

Passiamo ora ad esprimere i coefficienti di  $F_2$  mediante gli invarianti del sistema completo.

Il secondo termine del coefficiente di  $X_1^2$  trasformiamolo colla formola:

$$(m'm)(nn) = -(m'n)(n'm) - (m'n')(mn),$$

onde tutto il coefficiente di  $X_1^2$  diventa:

$$2(mn)(m'n')(m'n)(mn) + A_{mn}^2 = \\ = 2[-(mm')(n'n) - (mn')(nm')] (m'n)(mn) + A_{mn}^2 = \\ = -(mm')(n'n)[(m'n)(mn) - (mn)(m'n')] + 3A_{mn}^2 \\ = 3A_{mn}^2 - A_{mm}A_{nn}.$$

Permutando circolarmente le lettere  $l, m, n$  si hanno i coefficienti di  $X_2^2, X_3^2$ .

Passiamo ora al coefficiente di  $X_1 X_2$ .

Il primo termine di tal coefficiente è:

$$(mn)(l'n')[(m'l')(nn') + (mn)(n'l')] = \\ = \frac{1}{2}(m'l')(nn')[(mn)(l'n') - (mn')(l'n)] - A_{mn}A_{nl} \\ = -\frac{1}{2}(m'l')(nn')(m'l')(n'n) - A_{mn}A_{nl} = \frac{1}{2}A_{ml}A_{nn} - A_{mn}A_{nl}.$$

Inoltre il secondo termine è, giusta il calcolo ora eseguito:

$$(mn)(l'n')(m'l')(nn') = \frac{1}{2}A_{ml}A_{nn},$$

onde infine tutto il coefficiente di  $X_1 X_2$  è:

$$A_{ml}A_{nn} - A_{mn}A_{nl}.$$

Si ha dunque:

$$F_2 = \sum [3 A_{mn}^2 - A_{mm} A_{nn}] X_1^2 \\ + 2 \sum [A_{ml} A_{nn} - A_{mn} A_{nl}] X_1 X_2,$$

ovvero, esprimendolo mediante gli invarianti fondamentali [giovandosi delle (1) del § 5], si ha:

$$F_2 = \left[ \frac{1}{3} B^6 + \frac{8}{9} A B^4 C + \frac{16}{27} A^2 B^2 C^2 + \frac{4}{3} C^4 + \frac{16}{9} A B C^3 + \frac{4}{3} B^3 C^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B D^2 - \frac{2}{9} B^2 C D - \frac{2}{9} A C^2 D \right] X_1^2 \\ + \left[ 3 D^2 - B C D - \frac{1}{6} A B^2 D - \frac{4}{9} B^2 C^2 - \frac{2}{27} A B^3 C - \right. \\ \left. - \frac{4}{9} A C^3 - \frac{2}{27} A^2 B C^2 \right] X_1^2 \\ + \left[ \frac{4}{3} B^4 + \frac{4}{3} A^2 C^2 + \frac{8}{3} A B^2 C - 2 C D - \frac{1}{3} A B D \right] X_1^2 \\ + 2 \left[ \frac{4}{27} B^4 C + \frac{8}{27} A B^2 C^2 + \frac{4}{27} A^2 C^3 - \frac{2}{3} C^2 D - \frac{1}{9} A B C D \right] X_1 X_2 \\ + 2 \left[ \frac{2}{3} C B^3 + \frac{1}{9} A B^4 + \frac{4}{3} C^3 + \frac{10}{9} A B C^2 + \frac{4}{27} A^2 B^2 C - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} B^2 D - \frac{2}{3} A C D \right] X_2 X_3 \\ + 2 \left[ D^2 - \frac{2}{9} B^5 - \frac{14}{27} A B^3 C - \frac{4}{9} B^2 C^2 - \frac{4}{9} A C^3 - \frac{8}{27} A^2 B C^2 \right] X_3 X_1.$$

### § 7. Osservazioni generali sulla costruzione delle espressioni $F_3$ , $F_4$ del § 4.

Dalle formole (4) (6) del § 4 risulta che per trovare  $F_3$  bisognerebbe conoscere le seste spinte (*überschiebungen*) di  $f$  su tutti i prodotti a tre a tre delle tre quadratiche  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

E così, per trovare  $F_4$ , bisognerebbe sapere le ottave spinte di  $H$  su prodotti a quattro a quattro di  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , e le quarte spinte di  $i$  su prodotti a due a due di  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Queste spinte di ordine elevato (6.°, 8.°, 4.°), le possiamo naturalmente scomporre in successive spinte di 2.° ordine di certi covarianti sopra una delle tre quadratiche.



Troviamo le espressioni delle seconde spinte di  $H$  (che è di 8.° ordine) sopra i tre covarianti  $\lambda \mu \nu$ . Tali spinte verranno espresse mediante i covarianti di 6.° ordine; troviamo ora le seconde spinte di tutti i possibili covarianti di 6.° ordine su ciascuna delle tre quadratiche (dove fra i covarianti di 6.° ordine bisognerebbe includere anche i covarianti impropri, cioè i prodotti di covarianti di ordini inferiori); troviamo poi analogamente le espressioni delle seconde spinte di tutti i possibili covarianti di 4.° e poi di tutti i covarianti di 2.° ordine su  $\lambda \mu \nu$ , e allora con tutte queste formole trovate la ricerca di  $F_3$  e  $F_4$  sarà immediata.

Però se si dovesse effettivamente seguire questa via, la cosa sarebbe difficile e lunga e bisognerebbe fare entrare nei calcoli non solo i pochi covarianti che abbiamo sinora considerati, ma ancora tutti gli altri del sistema completo.

Noi faremo vedere in seguito che si può far di meno di seguire la via generale e lunghissima indicata avanti, ma con speciali artifizi si può giungere ai risultati finali, senza conoscere le espressioni di tutte le spinte indicate, e senza introdurre nei calcoli altri covarianti che i pochi introdotti sinora, cioè  $H$ ,  $\Delta$ ,  $i$ ,  $f$ , e i covarianti quadratici.

### § 8. Seconde spinte di $\lambda$ , $\mu$ , $\nu$ sopra i sei covarianti di 2.° ordine, e su prodotti a due a due di essi.

Si hanno in primo luogo le seguenti formole:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda l)^2 &= -R & (\lambda m)^2 &= (\lambda n)^2 = 0 \\ (\mu m)^2 &= -R & (\mu l)^2 &= (\mu n)^2 = 0 \\ (\nu n)^2 &= -R & (\nu l)^2 &= (\nu m)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Inoltre facilmente si ha:

$$(\lambda \lambda')^2 = \frac{1}{2} (mn) (m' n') [(mm') (nn') + (mn') (nm')].$$

Ora nel § 6 abbiamo appunto calcolata tale espressione, onde si ha:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, \lambda)^2 &= -\frac{1}{2} [3 A_{mn}^2 - A_{mm} A_{nn}] \\ &= -\frac{1}{6} B^6 - \frac{4}{9} A B^4 C - \frac{8}{27} A^2 B^2 C^2 - \frac{2}{3} C^4 - \frac{8}{9} A B C^3 \\ &\quad - \frac{2}{3} B^3 C^2 + \frac{1}{4} B D^2 + \frac{1}{9} B^2 C D + \frac{1}{9} A C^2 D. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Analogamente si ricavano  $(\mu, \mu)^2$ ,  $(\nu, \nu)^2$ .

In quanto a  $(\lambda \mu)^2$  è facile vedere che essa è eguale a

$$-\frac{1}{2} [A_{ml} A_{nn} - A_{mn} A_{nl}],$$

la cui espressione mediante gli invarianti sta calcolata nel § 6.

Ci pare inutile dunque trascrivere dal § 6 le espressioni di

$$(\mu \mu)^2, \quad (\nu \nu)^2, \quad (\lambda \mu)^2, \quad (\mu \nu)^2, \quad (\nu \lambda)^2.$$

Solo notiamo che tali espressioni sono ordinatamente i coefficienti delle potenze delle  $X$ , nella formola di  $F_2$ , moltiplicati pel fattore  $-\frac{1}{2}$ .

Passiamo ora a calcolare le seconde spinte di  $\lambda, \mu, \nu$  su prodotti a due a due dei sei covarianti quadratici. E propriamente, prima calcoleremo le seconde spinte di  $\lambda, \mu, \nu$  sui quadrati di  $l, m, n$  e sui loro prodotti a due a due; poi quelle fatte sui quadrati di  $\lambda, \mu, \nu$ . Le altre non ci occorrono.

Si ha:

$$(\lambda, l^2)^2 = \frac{1}{3} [(\lambda l)^2 l + 2(l\lambda)(l'\lambda)l_x l'_x].$$

Ora:

$$\begin{aligned} (l\lambda)(l'\lambda)l_x l'_x &= \frac{1}{2} (mn) [(ml)(nl') + (ml')(nl)] l_x l'_x \\ &= (mn)(ml)l'_x [(ll')n_x + (nl)l'_x] \\ &= \frac{1}{2} (mn)(ll')n_x [(ml)l'_x - (ml')l_x] + (mn)(ml)(ml)l'_x \\ &= -\frac{1}{2} A_{ll} \lambda - R \cdot l. \end{aligned}$$

Così si ricavano le altre formole analoghe; onde infine:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, l^2)^2 &= -R \cdot l - \frac{1}{3} A_{ll} \cdot \lambda \\ (\mu, m^2)^2 &= -R \cdot m - \frac{1}{3} A_{mm} \cdot \mu \\ (\nu, n^2)^2 &= -R \cdot n - \frac{1}{3} A_{nn} \cdot \nu. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Inoltre:

$$(\lambda, m^2)^2 = \frac{1}{3} [(m\lambda)^2 \cdot m + 2(m\lambda)(m'\lambda)m_x m'_x],$$

di cui il primo termine è zero [formole (1)] e il secondo è:

$$= \frac{1}{2} (m m'')^2 (n m') n_x m'_x.$$

Si ha così il sistema di formole:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, m^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{mm} \cdot \lambda; & (\lambda, n^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nn} \cdot \lambda \\ (\mu, n^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nn} \cdot \mu; & (\mu, l^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ll} \cdot \mu \\ (\nu, l^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ll} \cdot \nu; & (\nu, m^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{mm} \cdot \nu. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Calcoliamo ora le spinte sopra prodotti a due a due di  $l, m, n$ . Si ha:

$$(\lambda, lm)^2 = \frac{1}{6} [(\lambda m)^2 \cdot n + (\lambda n)^2 m + 4(\lambda m)(\lambda n)m_x n_x].$$

I due primi termini sono zero, e l'ultimo è:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} [(m' m)(n' n) + (m' n)(n' m)] (m' n') m_x n_x \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} (m m')^2 (n n') n_x n'_x + (m' n)(n' m) m_x [(n n') m'_x - (n m') n'_x] \right\}, \end{aligned}$$

onde si ha infine:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, mn)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nm} \cdot \lambda \\ (\mu, nl)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ln} \cdot \mu \\ (\nu, lm)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ml} \cdot \nu. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} (\lambda, lm)^2 &= \frac{1}{6} [(\lambda l)^2 m + (\lambda m)^2 l + 4(\lambda l)(\lambda m)l_x m_x] \\ &= \frac{1}{6} [-Rm + 2(m' n)[(m' l)(n m) + (m' m)(n l)] l_x m_x] \\ &= \frac{1}{6} [-Rm + 2(m' n)(m' l)(n m)l_x m_x + A_{mm}\mu] \\ &= \frac{1}{6} [-Rm + 2(m' n)l_x m_x[(m' n)(l m) + (m' m)(n l)] + A_{mm}\mu], \end{aligned}$$

onde infine si hanno le formole:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, lm)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rm + 2A_{mm}\mu + 2A_{mn}\nu \right\} \\ (\mu, mn)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rn + 2A_{nn}\nu + 2A_{nl}\lambda \right\} \\ (\nu, nl)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rl + 2A_{ll}\lambda + 2A_{lm}\mu \right\} \\ (\lambda, ln)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rn + 2A_{nn}\nu + 2A_{nm}\mu \right\} \\ (\mu, ml)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rl + 2A_{ll}\lambda + 2A_{ln}\nu \right\} \\ (\nu, nm)^2 &= \frac{1}{6} \left\{ -Rm + 2A_{mm}\mu + 2A_{ml}\lambda \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} (\lambda, \lambda^2)^2 &= \frac{1}{3} (\lambda \lambda')^2 \cdot \lambda + \frac{2}{3} (\lambda' \lambda) (\lambda'' \lambda) \lambda'_x \lambda''_x \\ &= \frac{1}{3} (\lambda \lambda')^2 \cdot \lambda + \frac{1}{3} (\lambda' \lambda) \lambda''_x \left\{ (\lambda'' \lambda) \lambda'_x - (\lambda'' \lambda') \lambda_x \right\} \\ &= \frac{2}{3} (\lambda \lambda')^2 \cdot \lambda, \end{aligned}$$

onde indicando con  $A_{\lambda\lambda}, A_{\lambda\mu}, \dots$  rispettivamente gli invarianti delle tre quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ , i cui valori sono stati trovati dalle formole (2) (e le analoghe) di questo paragrafo, si ha finalmente il sistema di formole:

$$(\lambda, \lambda^2)^2 = \frac{2}{3} A_{\lambda\lambda} \cdot \lambda \quad (\mu, \mu^2)^2 = \frac{2}{3} A_{\mu\mu} \cdot \mu \quad (\nu, \nu^2)^2 = \frac{2}{3} A_{\nu\nu} \cdot \nu. \quad (7)$$

Analogamente si trovano le altre:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda, \mu^2)^2 &= A_{\lambda\mu} \cdot \mu - \frac{1}{3} A_{\mu\mu} \cdot \lambda \\ (\mu, \nu^2)^2 &= A_{\mu\nu} \cdot \nu - \frac{1}{3} A_{\nu\nu} \cdot \mu \\ (\nu, \lambda^2)^2 &= A_{\nu\lambda} \cdot \lambda - \frac{1}{3} A_{\lambda\lambda} \cdot \nu \\ (\lambda, \nu^2)^2 &= A_{\lambda\nu} \cdot \nu - \frac{1}{3} A_{\nu\nu} \cdot \lambda \\ (\mu, \lambda^2)^2 &= A_{\mu\lambda} \cdot \lambda - \frac{1}{3} A_{\lambda\lambda} \cdot \mu \\ (\nu, \mu^2)^2 &= A_{\nu\mu} \cdot \mu - \frac{1}{3} A_{\mu\mu} \cdot \nu \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

§ 9. Seconde spinte di  $\lambda, \mu, \nu$  sopra i covarianti di 4.° ordine  $i$ , e  $\Delta$ .  
Calcolo del secondo termine di  $F_4$ .

Calcoliamo in questo paragrafo le seconde spinte di  $\lambda, \mu, \nu$  su ciascuno dei covarianti  $i, \Delta$ . Tali spinte sono covarianti di 2.° ordine, e quindi dovranno esprimersi linearmente mediante i 6 covarianti quadratici.

Vogliamo usare un metodo pel quale potessimo direttamente giovarci di calcolazioni già eseguite o riportate nei paragrafi precedenti.

Una seconda spinta di una forma  $\Omega_x^s$  sopra una quadratica, per es.  $\lambda$ , può esprimersi mediante spinte sopra  $l, m, n$ , nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(\Omega_x^s, \lambda)^2 &= (\Omega \lambda)^2 \Omega_x^{s-2} = (m n) (\Omega m) (\Omega n) \Omega_x^{s-2} \\ &= (\Omega m) (\Omega n) \Omega_x^{s-3} [(\Omega n) m_x - (\Omega m) n_x] \\ &= [(\Omega, n)^2, m] - [(\Omega, m)^2, n].\end{aligned}$$

Supponiamo ora che la nostra forma  $\Omega$  sia proprio rispettivamente la biquadratica  $i_x^4$  ovvero la biquadratica  $\Delta_x^4$ . Allora le seconde spinte di tali biquadratiche su  $l, m, n$  sono note e le abbiamo riportate al § 5 [formole (2), (3)]. Possiamo quindi immediatamente da quelle formole ricavare quelle che ci occorrono ora.

Si ha così il sistema di formole.

$$\left. \begin{aligned}(i, \lambda)^2 &= \frac{1}{3} C \nu \\ (i, \mu)^2 &= \lambda + \frac{1}{2} B \nu \\ (i, \nu)^2 &= \mu\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}(\Delta, \lambda)^2 &= -\frac{1}{3} B \lambda + \frac{1}{3} C \mu \\ (\Delta, \mu)^2 &= \frac{1}{6} B \mu + \frac{1}{3} C \nu \\ (\Delta, \nu)^2 &= \frac{1}{6} B \nu + \lambda.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dalla formola (6) del § 4 risulta che il secondo termine dell'espressione di  $F_4$  è il prodotto di  $F_2$  per

$$[\sum (\lambda i)^2 X_i]^2. \quad (3)$$

Siamo ora nel caso di calcolare questa espressione. Si tratta di calcolare i diversi coefficienti delle potenze di  $X$ , che sono rispettivamente:

$$[(\lambda i)^2, \lambda]^2 X_1^2 + [(\mu i)^2, \mu]^2 X_2^2 + [(\nu i)^2, \nu]^2 X_3^2 \\ + 2[(\lambda i)^2, \mu]^2 X_1 X_2 + 2[(\mu i)^2, \nu]^2 X_2 X_3 + 2[(\nu i)^2, \lambda]^2 X_3 X_1.$$

Mediante le formole (1) vediamo facilmente che questa espressione, cioè la (3) diventa:

$$\frac{1}{3} C A_{\nu\lambda} X_1^2 + \left[ A_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} B A_{\mu\nu} \right] X_2^2 + A_{\mu\nu} X_3^2 \\ + \frac{2}{3} C A_{\mu\nu} X_1 X_2 + \left[ A_{\nu\lambda} + \frac{1}{2} B A_{\nu\nu} \right] X_2 X_3 + 2 A_{\lambda\mu} X_3 X_1.$$

#### § 10. Introduzione alla determinazione delle quarte spinte di $f$ su prodotti a due a due di $\lambda, \mu, \nu$ .

Esaminiamo l'espressione di  $(f, \lambda^2)^4$ . Essa è

$$= (mn)(m'n')(ma)(na)(m'a)(n'a)a_x^2.$$

Trasformiamola colle formole:

$$(mn)a_x = -(na)m_x + (ma)n_x \\ (m'n')a_x = -(n'a)m'_x + (m'a)n'_x.$$

Allora si ha:

$$(f, \lambda^2)^4 = (na)^2(n'a)^2(ma)(m'a)m_x m'_x + (ma)^2(m'a)^2(na)(n'a)n_x n'_x \\ - (na)^2(m'a)^2(ma)(n'a)m_x n'_x - (ma)^2(n'a)^2(na)(m'a)n_x m'_x.$$

Supponiamo ora di conoscere la quarta spinta di  $f$  sul quadrato di  $n$  [vedi formole (4) del § 5]. Tale quarta spinta è

$$(na)^2(n'a)^2 a_x^2, \quad (1)$$

e per mezzo delle citate formole (4) del § 5 essa resta espressa linearmente mediante i soli covarianti quadratici  $l, m, n$ .

Allora per formare il primo termine dell'espressione di  $(f, \lambda^2)^4$ , dovremmo in luogo di  $a_x^2$ , nella detta quarta spinta (1), porre:

$$(ma)(m'a)m_x m'_x.$$

Quindi quando tale quarta spinta (1) è invece espressa in  $l_x^2, m_x^2, n_x^2$ , dob-

biamo porre in luogo di tali quantità le espressioni:

$$\left. \begin{aligned} (lm)(lm')m_x m'_x \\ (m''m)(m''m')m_x m'_x \\ (nm)(nm')m_x m'_x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Se noi dunque sappiamo calcolare queste espressioni (2) mediante gli invarianti fondamentali e i covarianti quadratici fondamentali (dimostriamo che non occorrono per questo tutti i 6 covarianti quadratici ma solo  $l, m, n$ ) allora avremo definitivamente calcolata la quarta spinta di  $\lambda^2$  su  $f$ .

Con un procedimento completamente simile si calcolerebbero tutte le altre formazioni analoghe.

Calcoliamo intanto per ora le espressioni (2) e tutte le loro analoghe.

È facile trovare la seguente tabella di formole:

$$\begin{aligned} (ll')(ll'')l'_x l''_x &= \frac{1}{2} A_{ll} \cdot l \\ (ml')(ml'')l'_x l''_x &= A_{ml} \cdot l - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot m \\ (nl')(nl'')l'_x l''_x &= A_{nl} \cdot l - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot n \\ (lm')(lm'')m'_x m''_x &= A_{lm} \cdot m - \frac{1}{2} A_{mm} \cdot l \\ (mm')(mm'')m'_x m''_x &= \frac{1}{2} A_{mm} \cdot m \\ (nm')(nm'')m'_x m''_x &= A_{nm} \cdot m - \frac{1}{2} A_{mm} \cdot n \\ (ln')(ln'')n'_x n''_x &= A_{ln} \cdot n - \frac{1}{2} A_{nn} \cdot l \\ (mn')(mn'')n'_x n''_x &= A_{mn} \cdot n - \frac{1}{2} A_{nn} \cdot m \\ (nn')(nn'')n'_x n''_x &= \frac{1}{2} A_{nn} \cdot n \\ (ln')(lm')n'_x m'_x &= \frac{1}{2} [-A_{nm} \cdot l + A_{lm} \cdot n + A_{ln} \cdot m] \\ (mn')(mm')n'_x m'_x &= \frac{1}{2} A_{mm} \cdot n \\ (nn')(nm')n'_x m'_x &= \frac{1}{2} A_{nm} \cdot m \end{aligned}$$

$$(ln')(l'l')n'_x l'_x = \frac{1}{2} A_{ll} \cdot n$$

$$(mn')(ml')n'_x l'_x = \frac{1}{2} [-A_{ln} \cdot m + A_{mn} \cdot l + A_{ml} \cdot n]$$

$$(nn')(nl')n'_x l'_x = \frac{1}{2} A_{nn} \cdot l$$

$$(ll')(lm')l'_x m'_x = \frac{1}{2} A_{ll} \cdot m$$

$$(ml')(mm')l'_x m'_x = \frac{1}{2} A_{mm} \cdot l$$

$$(nl')(nm')l'_x m'_x = \frac{1}{2} [-A_{ml} \cdot n + A_{nl} \cdot m + A_{nm} \cdot l].$$

Mediante questa tabella si faranno le calcolazioni del paragrafo seguente.

### § 11. Determinazione definitiva delle $(f, \omega \omega')^4$ .

Dal paragrafo precedente appare il metodo che possiamo tenere per calcolo delle  $(f, \omega \omega')^4$  dove  $\omega, \omega'$  sono due qualunque delle quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ . Supponiamo che  $\omega$  sia il determinante funzionale di  $a$  e  $b$ , e  $\omega'$  quello di  $c, d$  essendo  $a, b, c, d$  quattro quadratiche scelte fra le  $l, m, n$ . Sieno allora, secondo le formole (4) del § 5, le quarte spinte di  $f$  sui prodotti  $ac, bd, ad, bc$  espresse rispettivamente da:

$$(f, ac)^4 = A_1 l + B_1 m + C_1 n$$

$$(f, bd)^4 = A_2 l + B_2 m + C_2 n$$

$$(f, ad)^4 = A_3 l + B_3 m + C_3 n$$

$$(f, bc)^4 = A_4 l + B_4 m + C_4 n.$$

Secondo i risultati del paragrafo precedente si ha allora:

$$\begin{aligned} (f, \omega \omega')^4 = & [A_1(lb)(ld) + B_1(mb)(md) + C_1(nb)(nd)] b_x d_x \\ & + [A_2(la)(lc) + B_2(ma)(mc) + C_2(na)(nc)] a_x c_x \\ & - [A_3(lb)(lc) + B_3(mb)(mc) + C_3(nb)(nc)] b_x c_x \\ & - [A_4(la)(ld) + B_4(ma)(md) + C_4(na)(nd)] a_x d_x, \end{aligned}$$



e le espressioni  $(lb)(ld)b_x d_x$ , ecc. ecc. sono state tutte calcolate nel paragrafo precedente.

Nel caso che  $\omega, \omega'$  sono la stessa quadratica, la terza e quarta linea sono identiche, perchè allora  $a \equiv c, b \equiv d$ .

Così operando si possono stabilire le seguenti formole:

$$(f, \lambda^2)^4 = L_{11}l + M_{11}m + N_{11}n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{2}{9} C^2 D - \frac{1}{27} A B^2 C^2 - \frac{4}{81} A^2 C^3 + \frac{2}{27} B C^3 \\ M_{11} &= \frac{1}{18} B^5 + \frac{4}{27} B^2 C^2 + \frac{1}{9} A B^3 C + \frac{1}{9} A C^3 + \frac{4}{81} A^2 B C^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} D^2 + \frac{1}{9} B C D \\ N_{11} &= \frac{1}{9} A C D - \frac{4}{27} B^3 C - \frac{2}{9} C^3 - \frac{5}{27} A B C^2 \end{aligned}$$

$$(f, \mu^2)^4 = L_{22}l + M_{22}m + N_{22}n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{22} &= -\frac{5}{54} B^3 C - \frac{2}{9} C^3 - \frac{5}{27} A B C^2 \\ &\quad - \frac{1}{36} A B^4 - \frac{1}{27} A^2 B^2 C + \frac{1}{6} B^2 D + \frac{1}{9} A C D \\ M_{22} &= \frac{1}{6} C D + \frac{1}{18} B C^2 - \frac{1}{36} A B^2 C - \frac{1}{27} A^2 C^2 \\ N_{22} &= -\frac{1}{18} B^2 C + \frac{1}{36} A B^3 + \frac{1}{27} A^2 B C - \frac{1}{6} B D \end{aligned}$$

$$(f, \nu^2)^4 = L_{33}l + M_{33}m + N_{33}n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{33} &= \frac{1}{9} B^2 C - \frac{1}{18} A B^3 - \frac{2}{27} A^2 B C + \frac{1}{3} B D \\ M_{33} &= \frac{2}{9} B^3 + \frac{5}{18} A B C - \frac{1}{6} A D + \frac{1}{3} C^2 \\ N_{33} &= -D - \frac{1}{3} B C + \frac{1}{6} A B^2 + \frac{2}{9} A^2 C \end{aligned}$$

$$(f, \lambda \mu)^4 = L_{12} l + M_{12} m + N_{12} n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{1}{18} B^5 + \frac{4}{27} B^2 C^2 + \frac{1}{9} A B^3 C + \frac{1}{9} A C^3 \\ &\quad + \frac{4}{81} A^2 B C^2 - \frac{1}{4} D^2 + \frac{1}{9} B C D \\ M_{12} &= -\frac{5}{54} B^3 C - \frac{2}{9} C^3 - \frac{5}{27} A B C^2 \\ &\quad - \frac{1}{36} A B^4 - \frac{1}{27} A^2 B^2 C + \frac{1}{6} B^2 D + \frac{1}{9} A C D \\ N_{12} &= -\frac{1}{6} A B^2 C - \frac{1}{27} A^2 C^2 + \frac{1}{6} C D + \frac{1}{12} A B D \\ &\quad - \frac{1}{9} B C^2 - \frac{1}{9} B^4 \end{aligned}$$

$$(f, \mu \nu)^4 = L_{23} l + M_{23} m + N_{23} n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_2 &= -\frac{1}{6} A B^2 C - \frac{1}{27} A^2 C^2 + \frac{1}{6} C D + \frac{1}{12} A B D \\ &\quad - \frac{1}{9} B C^2 - \frac{1}{9} B^4 \\ M_{23} &= -\frac{1}{18} B^2 C + \frac{1}{36} A B^3 + \frac{1}{27} A^2 B C - \frac{1}{6} B D \\ N_{23} &= \frac{2}{9} B^3 + \frac{5}{18} A B C - \frac{1}{6} A D + \frac{1}{3} C^2 \end{aligned}$$

$$(f, \nu \lambda)^4 = L_{31} l + M_{31} m + N_{31} n,$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{31} &= \frac{1}{9} A C D - \frac{4}{27} B^3 C - \frac{2}{9} C^3 - \frac{5}{27} A B C^2 \\ M_{31} &= -\frac{1}{6} A B^2 C - \frac{1}{27} A^2 C^2 + \frac{1}{6} C D + \frac{1}{12} A B D \\ &\quad - \frac{1}{9} B C^2 - \frac{1}{9} B^4 \\ N_{31} &= \frac{1}{9} B^2 C - \frac{1}{18} A B^3 - \frac{2}{27} A^2 B C + \frac{1}{3} B D. \end{aligned}$$

Il calcolo di tutti questi coefficienti riesce più agevole se si tien conto del fatto che debbono sussistere le seguenti relazioni fra essi, come si può prevedere *a priori*, e come si trova poi effettivamente verificato:

$$\begin{aligned} M_{11} &= L_{12}; & N_{11} &= L_{31}; & L_{22} &= M_{12}; \\ N_{22} &= M_{23}; & L_{33} &= N_{31}; & M_{33} &= N_{23}; \\ N_{12} &= M_{31} = L_{23}. \end{aligned}$$

## § 12. Determinazione dell'espressione di $F_3$ .

Mediante le formole ottenute nel paragrafo precedente possiamo calcolare l'espressione definitiva di  $F_3$ , giovandoci della formola (4) del § 4.

Sviluppando tale formola si ha:

$$\begin{aligned} F_3 &= 2(f, \lambda^3)^6 X_1^3 + 2(f, \mu^3)^6 X_2^3 + 2(f, \nu^3)^6 X_3^3 \\ &+ 6(f, \lambda^2 \mu)^6 X_1^2 X_2 + 6(f, \mu^2 \nu)^6 X_2^2 X_3 + 6(f, \nu^2 \lambda)^6 X_3^2 X_1 \\ &+ 6(f, \lambda \mu^2)^6 X_1 X_2^2 + 6(f, \mu \nu^2)^6 X_2 X_3^2 + 6(f, \nu \lambda^2)^6 X_3 X_1^2 \\ &+ 12(f, \lambda \mu \nu)^6 X_1 X_2 X_3. \end{aligned}$$

Ora:

$$(f, \lambda^3)^6 = [(f, \lambda^2)^4, \lambda]^2,$$

e così analogamente possiamo esprimere tutti gli altri coefficienti come seconde spinte sopra  $\lambda$ , o  $\mu$ , o  $\nu$ , di una delle espressioni calcolate al paragrafo precedente. Poichè tali ultime espressioni sono funzioni lineari in  $l, m, n$  bisognerà tener presenti le formole semplicissime (1) del § 8.

Onde possiamo scrivere senz'altro:

$$\begin{aligned} F_3 &= -2R \left\{ L_{11} X_1^3 + M_{22} X_2^3 + N_{33} X_3^3 \right. \\ &+ 3L_{12} X_1^2 X_2 + 3M_{23} X_2^2 X_3 + 3N_{31} X_3^2 X_1 \\ &+ 3L_{22} X_1 X_2^2 + 3M_{33} X_2 X_3^2 + 3N_{11} X_3 X_1^2 \\ &\left. + 6N_{12} X_1 X_2 X_3 \right\}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $L, M, N$  sono calcolati nel paragrafo precedente in funzione degli invarianti fondamentali.

§ 13. Introduzione alla costruzione del primo termine di  $F_4$ .

Il secondo e terzo termine di  $F_4$  li abbiamo calcolati nei paragrafi precedenti. Per poter calcolare il primo termine occorre la conoscenza delle ottave spinte di  $H$  sopra prodotti di quarto grado delle  $\lambda, \mu, \nu$ , giusta la formola (6) del § 4.

Cercheremo dunque prima di tutto di trovare un artificio col quale, *giovandosi solo delle formole stabilite sinora*, si possano trovare le seste spinte di  $H$  su prodotti di 3.<sup>o</sup> grado delle  $\lambda, \mu, \nu$ . Quando avremo poi conosciute tali seste spinte, che verranno linearmente espresse mediante i sei covarianti quadratici, allora coll'applicazione di una ulteriore seconda spinta sopra  $\lambda, \mu$ , o  $\nu$  otteniamo i risultati desiderati.

Incominciamo intanto col mostrare che un'espressione del tipo:

$$(ab)^2 (a\omega)^2 (a\omega')^2 (b\omega'')^2 b_x^2, \quad (1)$$

dove  $\omega, \omega', \omega''$  sieno in un ordine qualunque le tre quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$  (potendo essere anche tutte tre una stessa  $\lambda$ , ovvero due di esse potendo rappresentare  $\lambda$  e la terza,  $\mu$ , e così di seguito) può esprimersi mediante le spinte di cui già ci son noti i valori.

Infatti la (1) è chiaramente eguale a

$$\left( [(f, \omega\omega')^4, f]^2 \omega'' \right)^2.$$

Ora  $(f, \omega\omega')^4$  ci è noto dalle formole del § 11, da cui risulta ancora che esso si esprime linearmente solo mediante  $l, m, n$ .

Per operare ora la seconda spinta del risultato ottenuto su  $f$ , basta dunque conoscere le seconde spinte su  $f$ , delle tre quadratiche  $l, m, n$ . Tali seconde spinte sono note (\*), e si sa ancora che esse si esprimono solo mediante le seguenti formazioni di 4.<sup>o</sup> ordine [vedi formole (5) § 5]:

$$\Delta, \quad i, \quad l^2, \quad lm.$$

Quindi le seconde spinte finali sopra  $\omega''$  si possono effettuare mediante le formole (3) (4) (5) (6) del § 8 e le formole (1) (2) del § 10.

Vogliamo far vedere ora come si può dal calcolo dell'espressione (1) ricavare quello della sesta spinta di  $H$  sopra il prodotto  $\omega\omega'\omega''$ .

---

(\*) GORDAN, *Invariant.*, Bd. 2, pag. 287-88-89.

Consideriamo l'espressione:

$$(ab)^2 a_y^2 a_z^2 b_t^2 b_x^2, \quad (2)$$

e trasformiamola colla nota formola di GORDAN che esprime un covariante con più serie di variabili cogredienti mediante polari di covarianti contenenti una sola serie di variabili.

Si ottengono consecutivamente i seguenti sviluppi (indicando al solito con  $\Delta$  le operazioni di polari):

$$\begin{aligned} (ab)^2 a_y^2 a_z^2 b_t^2 b_x^2 &= \Delta_{tx}^2 (ab)^2 a_y^2 a_z^2 b_x^4 \\ &= (ab)^2 \Delta_{tx}^2 \left\{ \Delta_{zx}^2 a_y^2 a_x^2 b_x^4 + \frac{4}{3} (zx) (ab) \Delta_{zx} a_y^2 a_x b_x^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{5} (zx)^2 (ab)^2 a_y^2 b_x^2 \right\} \\ &= (ab)^2 \Delta_{tx}^2 \left\{ \Delta_{zx}^2 \left[ \Delta_{yx}^2 a_x^4 b_x^4 + (yx) (ab) \Delta_{yx} a_x^3 b_x^3 + \frac{2}{7} (yx)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^2 \right] \right. \\ &\quad + \frac{4}{3} (zx) (ab) \Delta_{zx} \left[ \Delta_{yx}^2 a_x^3 b_x^3 + (yx) (ab) \Delta_{yx} a_x^2 b_x^2 + \frac{3}{10} (yx)^2 (ab)^2 a_x b_x \right] \\ &\quad \left. + \frac{3}{5} (zx)^2 (ab)^2 \left[ \Delta_{yx}^2 a_x^2 b_x^2 + (yx) (ab) \Delta_{yx} a_x b_x + \frac{1}{3} (yx)^2 (ab)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

e, tenendo conto che  $a, b$  sono simboli equivalenti, e quindi sono zero i termini contenenti  $(ab)$  a potenze dispari, resta finalmente:

$$(ab)^2 a_y^2 a_z^2 b_t^2 b_x^2 = \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 \Delta_{yx}^2 (ab)^2 a_x^4 b_x^4 + \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{7} \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (yx)^2 \\ &+ \frac{4}{3} \Delta_{tx}^2 (zx) \Delta_{zx} (yx) \Delta_{yx} \\ &+ \frac{3}{5} \Delta_{tx}^2 (zx)^2 \Delta_{yx}^2 \\ &+ \frac{1}{5} \Delta_{tx}^2 (zx)^2 (yx)^2 \cdot A. \end{aligned} \right\} (ab)^4 a_x^2 b_x^2 \quad (3)$$

Se mutiamo in questa formola le variabili  $t, z, y$  nei simboli,  $\omega, \omega', \omega''$  abbiamo nel primo termine del secondo membro esattamente la sesta spinta di  $H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4$  sopra il prodotto  $\omega \omega' \omega''$ . È di questa formola appunto che noi ci serviremo assai opportunamente per calcolare la detta sesta spinta.

**§ 14. Osservazioni sull'applicazione dell'espressione (3)  
del paragrafo precedente.**

Vediamo quali difficoltà presenta l'applicazione della espressione (3) del paragrafo precedente.

In primo punto mutando  $y \ z \ t$  in  $\omega, \omega', \omega''$  l'ultimo termine diventa:

$$(\omega\omega', \omega'')^2. \quad (1)$$

Ora nel § 8 abbiamo calcolate le seconde spinte di una  $\lambda, \mu, \nu$  su prodotti di due covarianti quadratici; però non abbiamo calcolate tutte le possibili combinazioni di tal tipo; ma è facile mostrare che per il nostro scopo attuale ci sono sufficienti quelle ivi calcolate. Infatti perchè a noi non occorre altro che di trovare le ottave spinte di  $H$  sopra prodotti di 4.° grado di  $\lambda, \mu, \nu$ , così fra i fattori di tal prodotto ve ne saranno certamente almeno *due* eguali; possiamo dunque limitarci a calcolare non tutte le possibili seste spinte di cui è parola avanti, ma tutte meno quella sul prodotto  $\lambda\mu\nu$ . Allora possiamo sempre supporre  $\omega = \omega'$ , e quindi la (1) verrà ricondotta sempre ad una di quelle comprese nelle formole (7) (8) del § 8.

Passiamo ora a considerare il penultimo termine della formola (3) del paragrafo precedente.

Tale penultimo termine rappresenta un certo complesso di operazioni di polari effettuato sopra:

$$i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2.$$

Ora mutando  $y, z, t$  in  $\omega, \omega', \omega''$  comparirebbero le *prime* spinte di  $i$  sopra  $\omega, \omega', \omega''$ .

A prescindere dal fatto che tali *prime* spinte non le conosciamo dalle formole stabilite avanti e dovremmo quindi calcolarle a parte, si avrebbe però ancora che esse verrebbero espresse in generale mediante *tutti* i covarianti di 4.° ordine; dovremmo quindi introdurre nel giro di tutte le nostre calcolazioni tutti i covarianti di 4.° ordine (che sono cinque a prescindere dai prodotti a due a due dei covarianti quadratici), mentre che noi finora non abbiamo introdotto altri covarianti di 4.° ordine che  $i, \Delta$ .

Tutto ciò si evita se noi cercheremo di trasformare tutto l'assieme delle polari espresso dal penultimo termine di (3), in modo che la polare da operare immediatamente su  $i$  sia sempre una *seconda polare*.

Passiamo dunque a trasformare, sotto il detto punto di vista, il simbolo operativo su  $i$ :

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{7} \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y x)^2 \\ + \frac{4}{3} \Delta_{tx}^2 (zx) \Delta_{xx} (y x) \Delta_{yx} \\ + \frac{3}{5} \Delta_{tx}^2 (zx)^2 \Delta_{yx}^2. \end{array} \right\}$$

### § 15. Trasformazione del simbolo operativo $D$ .

In primo luogo si vede che il terzo termine del simbolo  $D$  presenta una difficoltà di applicazione che però si elimina facilmente. Giacchè mutando  $y, z, t$  in  $\omega, \omega', \omega''$  si ha una espressione del tipo:

$$[(\omega, i)^2 \cdot \omega', \omega'']^2.$$

Ora  $(\omega, i)^2$  si esprime linearmente mediante  $\lambda, \mu, \nu$ ; bisognerebbe poi conoscere le seconde spinte su  $\omega''$ , del prodotto di due di tali quadratiche; ora noi nel § 8 non abbiamo calcolate tutte le possibili spinte del prodotto di due quadratiche su di un'altra, quindi avremmo ora la necessità di completare questa ricerca del § 8. Però è facile vedere che ciò si può evitare.

Infatti noi possiamo scrivere:

$$\Delta_{tx}^2 (zx)^2 \Delta_{yx}^2 \cdot i_x^4 = \frac{1}{6} \left\{ (zt)^2 \Delta_{yx}^2 + 4(zx)(zt) \Delta_{tx} \Delta_{yx}^2 + (zx)^2 \Delta_{tx}^2 \Delta_{yx}^2 \right\} i_x^4, \quad (1)$$

ed è facile vedere che nell'applicazione del secondo membro non si incontra più la difficoltà accennata.

Facciamo ora la trasformazione del primo e secondo termine di  $D$ .

Si ha in primo luogo:

$$\begin{aligned} \Delta_{zx}^2 (y x)^2 \cdot i_x^4 &= \frac{1}{15} (y z)^2 i_x^4 + \frac{8}{15} (y x) (y z) i_x^3 i_x + \frac{2}{5} (y x)^2 i_x^2 i_x^2 \\ (y z) \Delta_{tx}^2 (y x) i_x^3 i_x &= \frac{(y z)}{2} [(y t) i_x^2 i_x i_t + (y x) i_x i_t^2 i_x]. \end{aligned}$$

Si trasformi il primo termine della seconda formola con

$$(y t) i_x = (x t) i_y + (y x) i_t.$$

Allora risulta un termine in  $i_x i_y i_z i_t$ , il qual termine si trasformi poi daccapo con

$$(y z) i_x = (x z) i_y + (y x) i_z.$$

Allora risultano infine sempre termini contenenti  $i_z^2$ , ovvero  $i_t^2$ , ovvero  $i_y^2$ . Quindi si ha infine:

$$\begin{aligned} \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y x)^2 i_x^4 = & \left[ \frac{1}{15} (y z)^2 + \frac{8}{15} (y z) (y x) \Delta_{zx} \right] \Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & + \left[ \frac{1}{15} (y t)^2 + \frac{4}{15} (y x) (y t) \Delta_{tx} + \frac{1}{15} (y x)^2 \Delta_{tx}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{15} (y x) (x t) \Delta_{tx} \Delta_{yx} \right] \Delta_{zx}^2 \cdot i \\ & + \frac{4}{15} (x t) (x z) \Delta_{zx} \Delta_{tx} \Delta_{yx}^2 \cdot i. \end{aligned}$$

I quattro termini della seconda parentesi possono ridursi ad un numero minore, usando l'identità:

$$(y t) \Delta_{xx} + (t x) \Delta_{yx} + (x y) \Delta_{tx} = 0,$$

dove con  $\Delta_{xx}$  si intende l'operazione identica.

Con ciò si ha:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y x)^2 i_x^4 = & \left[ \frac{1}{15} (y z)^2 + \frac{8}{15} (y z) (y x) \Delta_{zx} \right] \Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & + \left[ \frac{1}{15} (y t)^2 + \frac{8}{15} (y x) (y t) \Delta_{tx} - \frac{1}{5} (y x)^2 \Delta_{tx}^2 \right] \Delta_{zx}^2 \cdot i \\ & + \frac{4}{15} (x t) (x z) \Delta_{zx} \Delta_{tx} \Delta_{yx}^2 \cdot i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Cerchiamo ora di ridurre ad una forma analoga il secondo termine del simbolo operativo  $D$ .

Si ha:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{tx}^2 (z x) \Delta_{zx} (y x) \Delta_{yx} \cdot i = & \frac{1}{12} \left\{ \left[ \frac{3}{2} (z t) (z x) \Delta_{tx} + \frac{3}{2} (z t) (x t) \Delta_{zx} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 3 (z x) (x t) \Delta_{zx} \Delta_{tx} \right] \Delta_{yx}^2 \cdot i \right. \\ & + \left[ \frac{21}{2} (y x) (z x) \Delta_{zx} \Delta_{yx} + \frac{3}{2} (y z) (z x) \Delta_{yx} \right] \Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & \left. + 6 (y x) (x t) \Delta_{tx} \Delta_{yx} \cdot \Delta_{zx}^2 \cdot i. \right\} \quad (3) \end{aligned}$$



Raccogliendo ora i risultati (1) (2) (3) si ha:

$$D := \left[ \frac{6}{7 \cdot 5} (y z)^2 + \frac{67}{7 \cdot 6 \cdot 5} (y z) (z x) \Delta_{yx} + \frac{7}{6} (y x) (z x) \Delta_{yx} \Delta_{zx} \right] \Delta_{tx}^2 \\ + \left[ \frac{2}{7 \cdot 5 \cdot 3} (y t)^2 + \frac{86}{7 \cdot 5 \cdot 3} (y x) (y t) \Delta_{tx} - \frac{76}{7 \cdot 5 \cdot 3} (y x)^2 \Delta_{tx}^2 \right] \Delta_{zx}^2 \\ + \left[ \frac{3}{7} (z t)^2 - \frac{17}{7 \cdot 5 \cdot 3} (x t)^2 \Delta_{zx}^2 + \frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} (z x)^2 \Delta_{tx}^2 \right] \Delta_{yx}^2.$$

Questa espressione però può anche notevolmente semplificarsi e ciò si ottiene trasformando le prime due parentesi in maniera da far loro acquistare una forma simile a quella acquistata dalla terza parentesi, cioè contenente solo polari a seconda potenza e non a prima potenza; e a tal uopo si debbono adoperare le formole identiche:

$$(y t) (y x) \Delta_{tx} = \frac{1}{2} \left\{ (y t)^2 + (x y)^2 \Delta_{tx}^2 - (t x)^2 \Delta_{yx}^2 \right\} \\ (y x) \Delta_{zx} = (z x) \Delta_{yx} + (y z) \\ (z y) (z x) \Delta_{yx} = \frac{1}{2} \left\{ (y z)^2 + (z x)^2 \Delta_{yx}^2 - (y x)^2 \Delta_{zx}^2 \right\}.$$

Facendo questa riduzione opportunamente, e osservando poi che l'ordine delle polari è indifferente, si ha infine, riducendo:

$$D = - \frac{4}{7} (y z)^2 \Delta_{tx}^2 + \frac{3}{7} (y t)^2 \Delta_{zx}^2 + \frac{3}{7} (z t)^2 \Delta_{yx}^2 \\ - \frac{4}{7} (t x)^2 \Delta_{yx}^2 \Delta_{zx}^2 + \frac{3}{7} (y x)^2 \Delta_{zx}^2 \Delta_{tx}^2 + \frac{3}{7} (z x)^2 \Delta_{yx}^2 \Delta_{tx}^2. \quad (4)$$

Quest'espressione è simmetrica in  $y$  e  $z$  come appunto deve verificarsi, perchè tale simmetria è posseduta originariamente dal primo membro, e dal primo e terzo termine del secondo membro, della formola (3) del § 13.

#### § 16. Determinazione di alcune formazioni del tipo $(H, \omega \omega' \omega'')$ .

Per lo scopo finale che ci siamo proposti sin da principio, cioè la ricerca delle ottave spinte di  $H$  su prodotti di 4.<sup>o</sup> grado di  $\lambda, \mu, \nu$ , non ci occorrerà di conoscere che solo le seste spinte di  $H$  sopra

$$\lambda^3, \quad \mu^3, \quad \nu^3, \quad \lambda^2 \mu, \quad \mu^2 \nu, \quad \nu^2 \lambda.$$

Ci proponiamo di calcolare in questo paragrafo separatamente ciascuna di queste spinte, e ci serviremo naturalmente della formola (3) del § 13.

Mutiamo in essa  $y, z, t$  in  $\lambda$  e abbiamo:

$$\begin{aligned}(H, \lambda^3)^6 &= \left( [(f, \lambda^2)^4, f]^2, \lambda \right)^2 - \frac{1}{5} A \cdot (\lambda, \lambda^2)^2 \\ &\quad - \left[ \frac{2}{7} A_{\lambda\lambda} (i, \lambda)^2 + \frac{2}{7} \lambda \cdot (i, \lambda^2)^4 \right] \\ &= L_{111} l + M_{111} m + N_{111} n + L'_{111} \lambda + M'_{111} \mu + N'_{111} \nu,\end{aligned}$$

dove i coefficienti hanno i seguenti valori:

$$L_{111} = -\frac{1}{2} R M_{11}$$

$$M_{111} = -\frac{1}{6} R N_{11}$$

$$N_{111} = 0$$

$$\begin{aligned}L'_{111} &= -\frac{2}{3} L_{11} B - \frac{1}{9} M_{11} A B - \frac{1}{9} N_{11} B^2 - \frac{1}{6} A_{11} M_{11} \\ &\quad - \frac{2}{15} A_{\lambda\lambda} \cdot A - \frac{2}{21} C A_{\nu\lambda}\end{aligned}$$

$$M'_{111} = \frac{2}{3} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} A C + \frac{1}{9} N_{11} C B + \frac{1}{3} A_{mn} N_{11}$$

$$N'_{111} = \frac{2}{9} L_{11} A C + \frac{1}{9} M_{11} B C - \frac{1}{9} N_{11} C^2 + \frac{1}{3} A_{mn} N_{11} - \frac{2}{21} C A_{\lambda\lambda},$$

(per le  $L, M, N$  con due indici vedi il § 11).

Mutando invece gli stessi simboli in  $\mu$ , e servendosi delle formole stabilite si ha:

$$(H, \mu^3)^6 = L_{222} l + M_{222} m + N_{222} n + L'_{222} \lambda + M'_{222} \mu + N'_{222} \nu,$$

dove:

$$L_{222} = -\frac{1}{6} R N_{22}$$

$$M_{222} = 0$$

$$N_{222} = 0$$

$$L'_{222} = \frac{2}{3} A L_{22} + \frac{1}{3} B M_{22} - \frac{1}{3} C N_{22} + \frac{1}{3} A_{11} N_{22} - \frac{2}{7} A_{\mu\mu}$$

$$\begin{aligned}M'_{222} &= \frac{1}{3} B L_{22} + \frac{1}{18} A B M_{22} + \frac{1}{18} B^2 N_{22} - \frac{1}{6} A_{11} M_{22} - \frac{2}{15} A A_{\mu\mu} \\ &\quad - \frac{2}{7} A_{\lambda\mu} - \frac{1}{7} B A_{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$N'_{222} = \frac{2}{3} C L_{22} + \frac{1}{9} A C M_{22} - \frac{1}{18} C B N_{22} + \frac{1}{3} A B L_{22} + \frac{1}{6} B^2 M_{22} \\ + \frac{1}{3} A l n N_{22} - \frac{1}{7} B A_{\mu\mu}$$

$$(H, \nu^3)^6 = L_{333} l + M_{333} m + N_{333} n + L'_{333} \lambda + M'_{333} \mu + N'_{333} \nu,$$

dove:

$$L_{333} = 0$$

$$M_{333} = 0$$

$$N_{333} = 0$$

$$L'_{333} = 2 L_{33} + \frac{1}{3} A M_{33} + \frac{1}{3} B N_{33}$$

$$M'_{333} = \frac{2}{3} A L_{33} + \frac{1}{3} B M_{33} - \frac{1}{3} C N_{33} - \frac{2}{7} A_{\nu\nu}$$

$$N'_{333} = \frac{1}{3} B L_{33} + \frac{1}{18} A B M_{33} + \frac{1}{18} B^2 N_{33} - \frac{1}{6} A u M_{33} - \frac{1}{3} A_{ml} N_{33} \\ - \frac{2}{15} A A_{\nu\nu} - \frac{2}{7} A_{\mu\nu}.$$

Mutiamo invece nella (3) del § 13 le variabili  $y, z$  in  $\lambda$ , e  $t$  in  $\mu$ . Si ha:

$$(H, \lambda^2 \mu)^6 = \left[ (f, \lambda^2)^4, f \right]^2, \mu^2 - \frac{1}{5} A(\mu, \lambda^2)^2 + \\ + \frac{4}{7} A_{\lambda\lambda}(i, \mu)^2 - \frac{6}{7} A_{\lambda\mu}(i, \lambda)^2 \\ + \frac{4}{7} [(i, \lambda)^2, \lambda]^2 \cdot \mu - \frac{6}{7} [(i, \lambda)^2, \mu]^2 \cdot \lambda,$$

e colla permutazione circolare di  $\lambda, \mu, \nu$  si hanno le altre formole che ci occorrono.

Da questa si ricava:

$$(H, \lambda^2 \mu)^6 = L_{112} l + M_{112} m + N_{112} n + L'_{112} \lambda + M'_{112} \mu + N'_{112} \nu,$$

dove:

$$L_{112} = -\frac{1}{6} R N_{11}$$

$$M_{112} = 0$$

$$N_{112} = 0$$

$$L'_{112} = \frac{2}{3} A L_{11} + \frac{1}{3} B M_{11} - \frac{1}{3} C N_{11} + \frac{1}{3} A u N_{11} - \frac{1}{5} A A_{\mu\lambda} \\ + \frac{4}{7} A_{\lambda\lambda} - \frac{2}{7} C A_{\mu\nu}$$

$$M'_{112} = \frac{1}{3} B L_{11} + \frac{1}{18} A B M_{11} + \frac{1}{18} B^2 N_{11} - \frac{1}{6} A_{11} M_{11} + \frac{1}{15} A A_{\lambda\lambda} \\ + \frac{4}{21} C A_{\lambda\lambda}$$

$$N'_{112} = \frac{2}{3} C N_{11} + \frac{1}{9} A C M_{11} - \frac{1}{18} B C N_{11} + \frac{1}{3} A L_{11} + \frac{1}{6} B^2 M_{11} \\ + \frac{1}{3} A_{11} N_{11} + \frac{2}{7} B A_{\lambda\lambda} - \frac{2}{7} C A_{\lambda\mu}$$

$$(H, \mu^2 \nu)^6 = L_{223} l + M_{223} m + N_{223} n + L'_{223} \lambda + M'_{223} \mu + N'_{223} \nu,$$

dove:

$$L_{223} = 0$$

$$M_{223} = 0$$

$$N_{223} = 0$$

$$L'_{223} = 2 L_{22} + \frac{1}{3} A M_{22} + \frac{1}{3} B N_{22} - \frac{6}{7} A_{\mu\nu}$$

$$M'_{223} = \frac{2}{3} A L_{22} + \frac{1}{3} B M_{22} - \frac{1}{3} C N_{22} - \frac{1}{5} A A_{\mu\nu} - \frac{2}{7} A_{\mu\mu}$$

$$N'_{223} = \frac{1}{3} B L_{22} + \frac{1}{18} A B M_{22} + \frac{1}{18} B^2 N_{22} - \frac{1}{6} A_{11} M_{22} \\ - \frac{1}{3} A_{11} N_{22} + \frac{1}{15} A A_{\mu\mu} - \frac{1}{7} B A_{\mu\nu} + \frac{4}{7} A_{\lambda\mu}$$

$$(H, \nu^2 \lambda)^6 = L_{331} l + M_{331} m + N_{331} n + L'_{331} \lambda + M'_{331} \mu + N'_{331} \nu,$$

dove:

$$L_{331} = -\frac{1}{2} R M_{33}$$

$$M_{331} = -\frac{1}{6} R N_{33}$$

$$N_{331} = 0$$

$$L'_{331} = -\frac{2}{3} B L_{33} - \frac{1}{9} A B M_{33} - \frac{1}{9} B^2 N_{33} - \frac{1}{6} A_{11} M_{33} \\ + \frac{1}{15} A A_{\nu\nu} + \frac{4}{7} A_{\mu\nu}$$

$$M'_{331} = \frac{2}{3} C L_{33} + \frac{1}{9} A C M_{33} + \frac{1}{9} B C N_{33} + \frac{1}{3} A_{mm} N_{33} \\ - \frac{6}{7} A_{\nu\lambda}$$

$$N'_{331} = \frac{2}{9} A C L_{33} + \frac{1}{9} B C M_{33} - \frac{1}{9} C^2 N_{33} + \frac{1}{3} A_{mn} N_{33} \\ - \frac{1}{5} A A_{\lambda\nu} + \frac{4}{21} C A_{\nu\nu} - \frac{6}{7} A_{\lambda\mu}.$$

§ 17. Determinazione del primo termine di  $F_4$ .

Resta ora semplicemente a determinare il primo termine di  $F_4$  cioè (vedi § 4):

$$[\sum (\lambda H)^2 X_i]^4. \quad (1)$$

I varii coefficienti delle potenze delle  $X$ , come appare da questa formola sono spinte di 8.<sup>o</sup> ordine di  $H$  sopra prodotti di 4.<sup>o</sup> grado delle quadratiche  $\lambda, \mu, \nu$ .

Tali spinte le possiamo calcolare facilmente per mezzo dei risultati del paragrafo precedente.

Indicando simbolicamente con  $S_X^4$  la espressione (1), abbiamo per i coefficienti simbolici  $S$  i seguenti valori:

$$\begin{aligned} S_1^4 &= -R L_{111} + L'_{111} A_{\lambda\lambda} + M'_{111} A_{\lambda\mu} + N'_{111} A_{\lambda\nu} \\ S_2^4 &= L'_{222} A_{\lambda\mu} + M'_{222} A_{\mu\mu} + N'_{222} A_{\mu\nu} \\ S_3^4 &= L'_{333} A_{\lambda\nu} + M'_{333} A_{\mu\nu} + N'_{333} A_{\nu\nu} \\ S_1^3 S_2 &= -R M_{111} + L'_{111} A_{\lambda\mu} + M'_{111} A_{\mu\mu} + N'_{111} A_{\mu\nu} \\ S_2^3 S_3 &= L'_{222} A_{\lambda\nu} + M'_{222} A_{\mu\nu} + N'_{222} A_{\nu\nu} \\ S_3^3 S_1 &= L'_{333} A_{\lambda\lambda} + M'_{333} A_{\lambda\mu} + N'_{333} A_{\lambda\nu} \\ S_1 S_2^3 &= -R L_{222} + L'_{222} A_{\lambda\lambda} + M'_{222} A_{\lambda\mu} + N'_{222} A_{\lambda\nu} \\ S_2 S_3^3 &= L'_{333} A_{\lambda\mu} + M'_{333} A_{\mu\mu} + N'_{333} A_{\mu\nu} \\ S_3 S_1^3 &= L'_{111} A_{\lambda\nu} + M'_{111} A_{\mu\nu} + N'_{111} A_{\nu\nu} \\ S_1^2 S_2^2 &= L'_{112} A_{\lambda\mu} + M'_{112} A_{\mu\mu} + N'_{112} A_{\mu\nu} \\ S_2^2 S_3^2 &= L'_{223} A_{\lambda\nu} + M'_{223} A_{\mu\nu} + N'_{223} A_{\nu\nu} \\ S_3^2 S_1^2 &= -R L_{331} + L'_{331} A_{\lambda\lambda} + M'_{331} A_{\lambda\mu} + N'_{331} A_{\lambda\nu} \\ S_1^2 S_2 S_3 &= L'_{112} A_{\lambda\nu} + M'_{112} A_{\mu\nu} + N'_{112} A_{\nu\nu} \\ S_2^2 S_3 S_1 &= L'_{223} A_{\lambda\lambda} + M'_{223} A_{\mu\lambda} + N'_{223} A_{\nu\lambda} \\ S_3^2 S_1 S_2 &= -R M_{331} + L'_{331} A_{\lambda\mu} + M'_{331} A_{\mu\mu} + N'_{331} A_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Napoli,  $\frac{\text{Marzo}}{\text{Giugno}}$  1890.

---