

XII. Zur Theorie der Flüssigkeitsreibung; von O. Tumlirz.

Bezeichnen u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens in den Richtungen x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystems und setzen wir:

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\zeta,$$

so bedeuten ξ, η, ζ , wie Hr. H. v. Helmholtz gezeigt hat¹⁾, nichts anderes, als die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich ein Flüssigkeitselement um drei durch seinen Schwerpunkt gehende, zu x, y, z parallele Axen dreht. Hr. Stefan hat zuerst von diesen Winkelgeschwindigkeiten in der Theorie der Flüssigkeitsreibung Gebrauch gemacht²⁾ und in Bezug auf incompressible Flüssigkeiten für die Componenten der durch die Reibung hervorgerufenen und das Massenelement $\rho \, dx \, dy \, dz$ angreifenden Kraft die Ausdrücke:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz, \quad 2\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz, \\ 2\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) dx \, dy \, dz \end{array} \right.$$

aufgestellt. Wie man sieht, ist der Einfluss der inneren Reibung in einer tropfbaren Flüssigkeit durch die in derselben stattfindenden Rotationen der einzelnen Flüssigkeitselemente vollständig bestimmt.

Wird eine tropfbare, ursprünglich in Ruhe befindliche Flüssigkeit durch die Wirkung gewisser Kräfte (Massen-, bezw. Oberflächenkräfte) in Bewegung versetzt und hat die Flüssigkeit keine Reibung, dann sind die Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ überall gleich Null und es besteht für diese Bewegung ein Geschwindigkeitspotential. Existirt aber eine Reibung, dann treten überall die Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ auf, während ein Theil der von jenen Kräften geleisteten Arbeit als Arbeit verschwindet und in Wärme um-

1) H. v. Helmholtz, Crelle's Journ. 55. p. 25—55. 1858.

2) Stefan, Wien. Ber. 46. p. 8, 495. 1862.

gesetzt wird. Es entsteht nun die Frage, ob diese in Wärme umgesetzte Arbeit, wir wollen sie die Reibungsarbeit nennen, zu den Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ in einer einfachen Beziehung steht.

Das Massenelement $\rho \, dx \, dy \, dz$ erfährt während der Zeit dt in der Richtung der x, y, z die Verschiebungen:

$$dx = u \, dt, \quad dy = v \, dt, \quad dz = w \, dt.$$

Entsprechend den Ausdrücken (2) ist also die Arbeit der auf dieses Massenelement wirkenden Reibungskraft während der Zeit dt gleich:

$$2\mu \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) v + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) w \right] dx \, dy \, dz \, dt.$$

Bilden wir diesen Ausdruck für alle Elemente der in Betracht kommenden Flüssigkeit, so erhalten wir für die in der Zeit dt in dieser Flüssigkeit geleistete Reibungsarbeit:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dL = 2\mu \, dt \iiint & \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) v \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) w \right] dx \, dy \, dz. \end{aligned} \right.$$

Da die Grössen u, v, w und ξ, η, ζ in der ganzen Flüssigkeit bei allen in Betracht kommenden Bewegungen sammt ihren Derivirten endlich und stetig sind, so können wir das Integral in der Gl. (3) durch partielle Integration auf die Form:

$$(3_a) \quad \left\{ \begin{aligned} dL = 2\mu \, dt \left\{ \iint \left[(w\eta - v\zeta) \cos(nx) + (u\zeta - w\xi) \cos(ny) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + (v\xi - u\eta) \cos(nz) \right] d\omega + \iiint \left[\xi \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \zeta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx \, dy \, dz \right\} \end{aligned} \right.$$

bringen, wobei $d\omega$ ein Element der Begrenzung und n die in demselben nach aussen gezogene Normale bedeuten. Das Doppelintegral ist über die ganze Begrenzung, das dreifache Integral über den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum zu erstrecken.

Von der Flüssigkeit wollen wir annehmen, dass sie ins Unendliche reicht und im Endlichen durch feste und in Ruhe befindliche Wände begrenzt ist. Da wir in der Un-

endlichkeit die Grössen u , v , w und ξ , η , ζ immer als unendlich klein von zweiter, bezw. dritter Ordnung ansehen können, so wird das Doppelintegral bloß über die im Endlichen gelegenen Begrenzungsflächen zu erstrecken sein.

Die Gleichung (3_a) kann auf eine weit einfachere Form gebracht werden. Setzen wir nämlich:

$$u = V \cos(Vx), \quad v = V \cos(Vy), \quad w = V \cos(Vz), \\ \xi = \sigma \cos(\sigma x), \quad \eta = \sigma \cos(\sigma y), \quad \zeta = \sigma \cos(\sigma z),$$

$$\begin{vmatrix} \cos(nx) & \cos(\sigma x) & \cos(Vx) \\ \cos(ny) & \cos(\sigma y) & \cos(Vy) \\ \cos(nz) & \cos(\sigma z) & \cos(Vz) \end{vmatrix} = \Delta$$

und nehmen wir Rücksicht auf die Gleichungen (1), so erhalten wir:

$$(4) \quad dL = 2\mu dt \iiint V \sigma \Delta d\omega - 4\mu dt \iiint \sigma^2 dx dy dz.$$

Noch einfacher wird der Ausdruck, wenn die Flüssigkeit die festen Wände, welche sie begrenzen, benetzt. Denn dann ist in allen Punkten der Begrenzung $V=0$ und somit:

$$(4_a) \quad dL = -4\mu dt \iiint \sigma^2 dx dy dz.$$

Der Ausdruck rechts ist, wie man sieht, negativ, also dem Wesen nach eine Arbeit, bei welcher der Angriffspunkt der Kraft in einer zu dieser Kraft entgegengesetzten Richtung verschoben wird.

Der Satz von der lebendigen Kraft erhält durch die Gleichung (4_a) einen sehr merkwürdigen Ausdruck. Nennen wir die Arbeit, welche die die Flüssigkeitsbewegung hervorruhenden Massen- und Oberflächenkräfte während der Zeit dt leisten, dW , dann ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint V^2 \rho dx dy dz \right) dt = dW + dL, \quad \text{also:}$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint V^2 \rho dx dy dz \right) dt + 4\mu \left(\iiint \sigma^2 dx dy dz \right) dt = dW.$$

Hierin bedeuten, wir wollen das nochmals hervorheben, V die lineare und σ die Winkelgeschwindigkeit des Massenelementes $\rho dx dy dz$.

Ist die Bewegung stationär, dann ist die Reibungsarbeit oder die Reibungswärme eine lineare Function der Zeit.

Prag, 1. März 1890.