

ÜBER DAS CARATHÉODORY'SCHE PROBLEM, POTENZREIHEN MIT POSITIVEM REELLEN TEIL BETREFFEND.

Von **Ernst Fischer** (Brünn).

Adunanza dell'11 giugno 1911.

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen, die zu verschiedener Zeit entstanden sind. In die Zeit zwischen beiden fallen die wichtigen Untersuchungen von TOEPLITZ ¹⁾, durch welche der zweite Teil erst veranlasst und ermöglicht worden ist.

I. TEIL.

EINLEITUNG.

CARATHÉODORY hat ²⁾ die Frage behandelt:

« Für welche Wertsysteme der $2n$ reellen Variablen

$$(I) \quad a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$$

« gibt es eine Potenzreihe $Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ der komplexen Variablen $z = \rho e^{i\vartheta}$ (ρ und ϑ reell, $\rho \geq 0$), welche mit dem Wertsystem (I) in dem Zusammenhange

$$c_1 = a_1 - i b_1, \quad c_2 = a_2 - i b_2, \quad \dots, \quad c_n = a_n - i b_n$$

« steht und die Eigenschaft besitzt, für $|\zeta| < 1$ zu konvergieren und einen positiven reellen Teil $\Re(Z) > 0$, also

$$1 + \rho(a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta) + \dots + \rho^n(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) + \dots > 0 \quad (\text{für } 0 \leq \rho < 1)$$

« zu haben? »

¹⁾ Vorgetragen in der Sitzung der mathematischen Gesellschaft in Göttingen vom 28. Juni 1910. Eine Mitteilung darüber ist in diesen Rendiconti erschienen {TOEPLITZ, *Über die FOURIER'sche Entwicklung positiver Funktionen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII (2. Semester 1911), S. 191-192]}.

²⁾ CARATHÉODORY, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen* [Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), S. 95-115].

Die Menge aller solchen Wertsysteme (1) bezeichnen wir mit CARATHÉODORY als die Menge \mathfrak{R}_n .

Zur Beantwortung der gestellten Frage gibt CARATHÉODORY für \mathfrak{R}_n die folgende Parameterdarstellung:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_k = 2\lambda_1 \cos k \vartheta_1 + \dots + 2\lambda_n \cos k \vartheta_n \\ b_k = 2\lambda_1 \sin k \vartheta_1 + \dots + 2\lambda_n \sin k \vartheta_n \\ -\pi < \vartheta_1 \leq +\pi, \dots, -\pi < \vartheta_n \leq +\pi \\ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq 1. \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Er beweist ferner, dass das Wertsystem (1) Innenpunkt oder Grenzpunkt der Menge \mathfrak{R}_n ist, je nachdem die Grösse

$$\lambda = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n$$

> 0 oder $= 0$ ist, und dass es in dem letzteren Falle $\lambda = 0$ nur eine einzige zugehörige Potenzreihe Z gibt, nämlich diese:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2\lambda_1 e^{-ki\vartheta_1} + \dots + 2\lambda_n e^{-ki\vartheta_n}) \chi^k \\ = \lambda + \lambda_1 \frac{e^{i\vartheta_1} + \chi}{e^{i\vartheta_1} - \chi} + \dots + \lambda_n \frac{e^{i\vartheta_n} + \chi}{e^{i\vartheta_n} - \chi} \end{array} \right. \quad (|\chi| < 1).$$

Man wird nun wünschen, die Menge \mathfrak{R}_n auch ohne Vermittlung von Parametern durch Ungleichungen zwischen den Grössen a_1, \dots, b_n selbst festlegen zu können. Hiezu führt eine Bemerkung von STIELTJES.

Man kennt die Ueberlegungen, durch die HERMITE das STURM'sche Problem auf die Betrachtung quadratischer Formen zurückgeführt hat ³⁾. In diesem Gedankenkreise fortschreitend betrachtet STIELTJES ⁴⁾ die quadratische Form

$$\chi = \sum_{p,q=0}^n b_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n , deren Coefficienten aus einer etwa im Intervalle

³⁾ HERMITE: *Remarques sur le théorème de M. STURM* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. XXXVI (1. Semester 1853), S. 294-297]; *Extrait d'une lettre de Mr. CH. HERMITE de Paris à Mr. BORCHARDT de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LII (1856), S. 39-51]; *Œuvres de CHARLES HERMITE* (Paris, Gauthier-Villars), Bd. I (1905), S. 284-287, 397-414. — Vgl. auch: NETTO, *Vorlesungen über Algebra* (Leipzig, Teubner), Bd. I (1896), 20^{te} Vorlesung.

⁴⁾ STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1^{ère} série, tome VIII (1894), pp. J 1 - J 122; tome IX (1895), pp. A 5 - A 47]; E. COSSERAT, *Notice sur les travaux scientifiques de THOMAS-JEAN STIELTJES* [ibid., 1^{ère} série, tome IX (1895), pp. [3]-[64]]; *Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), Bd. I. Vgl. z. B. S. 336 und fgde, und S. 423.

$0 \leq x \leq 1$ stetigen Funktion $b(x)$ nach dem Gesetze

$$h_v = \int_0^1 x^v b(x) dx \quad (v = 0, 1, \dots, 2n)$$

gebildet sind. Wird nun vorausgesetzt, dass in diesem Intervalle stets

$$b(x) > 0$$

sei, so muss nach STIELTJES die Form χ eine positive ⁵⁾ Form sein; in der Tat hat man

$$\chi = \int_0^1 (u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n)^2 b(x) dx.$$

Eine ähnliche Bemerkung nun habe ich zur Grundlage einer erneuten Behandlung des CARATHÉODORY'schen Problems genommen und bin zu folgendem Resultat gelangt.

Ich bilde die quadratische Form von $n + 1$ Variablen u_0, u_1, \dots, u_n :

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 \cdot (1 + a_1 \cos z + b_1 \sin z + \dots + a_n \cos n z + b_n \sin n z) dz$$

worin zur Abkürzung

$$S = u_0 \left(\cos \frac{z}{2} \right)^n + u_1 \left(\cos \frac{z}{2} \right)^{n-1} \sin \frac{z}{2} + \dots + u_n \left(\sin \frac{z}{2} \right)^n$$

gesetzt ist. Dann sind die Wertsysteme der Menge \mathfrak{R}_n dadurch charakterisiert, dass diese Form φ eine nichtnegative ist. Die Innenpunkte der Menge \mathfrak{R}_n aber sind dadurch charakterisiert, dass die Form φ eine positive ist.

Als Beispiel diene der Fall $n = 1$; hier ist

$$S^2 = \left(u_0 \cos \frac{z}{2} + u_1 \sin \frac{z}{2} \right)^2 = u_0^2 \frac{1 + \cos z}{2} + 2 u_0 u_1 \frac{\sin z}{2} + u_1^2 \frac{1 - \cos z}{2}$$

$$\varphi = \left(1 + \frac{a_1}{2} \right) u_0^2 + b_1 u_0 u_1 + \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) u_1^2$$

und die Bedingung für das Nichtnegativsein von φ lautet:

$$a_1^2 + b_1^2 \leq 4$$

was auch durch $|a_1 - i b_1| \leq 2$ ausgedrückt werden kann.

Der nachstehend mitgeteilte Beweis meines Resultats trägt elementaren Charakter. Und da sich das CARATHÉODORY'sche Resultat gleichzeitig mit ergibt, so ist auch dieses nunmehr elementar begründet, während es von CARATHÉODORY selbst durch eine zwar ungemein interessante, aber nichts weniger als elementare Deduktion zutage gefördert wurde.

⁵⁾ Eine quadratische Form heisst *nicht negativ*, wenn sie für reelle Werte der Variablen stets ≥ 0 ist; sie heisst *positiv*, wenn sie für reelle Werte der Variablen, das einzige Wertsystem $(0, 0, \dots, 0)$ ausgenommen, stets > 0 ist (d. i. wenn sie nichtnegativ ist und eine von 0 verschiedene Determinante hat).

§ 1.

Das Nichtnegativsein der Form φ als notwendige Bedingung für ein Wertsystem von \mathfrak{R}_n .

Indem ich zur Abkürzung wieder

$$S = \sum_{p=0}^n u_p \left(\cos \frac{z}{2} \right)^{n-p} \left(\sin \frac{z}{2} \right)^p$$

setze, bilde ich zunächst aus einer beliebigen im Intervall $-\pi \leq z \leq +\pi$ stetigen Funktion $g(z)$ den Ausdruck

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 g(z) dz.$$

Er ist eine quadratische Form von u_0, u_1, \dots, u_n , deren Koeffizienten von der Wahl der Funktion $g(z)$ abhängige Konstante sind. Genauer hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 g(z) dz &= \sum_{p,q=0}^n \varepsilon_{p+q} v_p u_q \\ \varepsilon_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\cos \frac{z}{2} \right)^{2n-\nu} \left(\sin \frac{z}{2} \right)^\nu g(z) dz \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n). \end{aligned}$$

Nun kann man aber setzen

$$(5) \quad \left(\cos \frac{z}{2} \right)^{2n-\nu} \left(\sin \frac{z}{2} \right)^\nu = \sigma_{\nu_0} + \sum_{k=1}^n [\sigma_{\nu_k} \cos k z + \tau_{\nu_k} \sin k z]$$

wobei die σ und τ rationale Zahlen sind, die von n und ihren beiden Indices abhängen. Daraus folgt, dass die ε_ν schon durch die ersten $2n + 1$ FOURIERKoeffizienten von $g(z)$ allein bestimmt sind; denn wenn diese mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) dz &= \alpha_0, & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k z g(z) dz &= \alpha_k \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k z g(z) dz &= \beta_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

bezeichnet werden, hat man

$$\varepsilon_\nu = 2 \sigma_{\nu_0} \alpha_0 + \sum_{k=1}^n [\sigma_{\nu_k} \alpha_k + \tau_{\nu_k} \beta_k] \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n).$$

Natürlich sind auch umgekehrt $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_n$ durch $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}$ bestimmt; denn die aus den σ und τ gebildete Determinante ist von 0 verschieden, da die $2n + 1$ Funktionen, welche für $\nu = 0, 1, \dots, 2n$ die linke Seite von (5) bilden, linearunabhängig sind.

Nach diesen Vorbereitungen ziehe ich nun ein Wertsystem (1) der Menge \mathfrak{R}_n in Betracht. Es gibt dann nach dem Begriff von \mathfrak{R}_n wenigstens eine zugehörige Potenzreihe Z , und die eben dargelegte Eigenschaft der Ausdrücke (4) ergibt, für einen

festen der Bedingung $0 \leq \rho < 1$ genügenden Wert φ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 \Re(Z) d\varpi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \rho^k [a_k \cos k\varpi + b_k \sin k\varpi] \right) d\varpi.$$

Da hierin $\Re(Z) > 0$ ist, so ist die linke Seite eine positive Form, folglich auch die rechte; sie ist aber ein Polynom in ρ , und wir erhalten daher für $\rho = 1$ den

SATZ. — Für jedes Wertsystem der Menge \mathfrak{R}_n ist die Form

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k\varpi + b_k \sin k\varpi] \right) d\varpi$$

eine nichtnegative.

Dabei ist nach Obigem:

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

wenn man

$$(6) \quad e_\nu = 2\sigma_{\nu 0} + \sum_{k=1}^n [\sigma_{\nu k} a_k + \tau_{\nu k} b_k] \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n)$$

setzt und darin die σ und τ durch (5) definiert.

§ 2.

Die Möglichkeit der Carathéodory'schen Parameterdarstellung (2) als hinreichende Bedingung für ein Wertsystem von \mathfrak{R}_n .

Den Inhalt dieses § nehme ich unverändert aus der CARATHÉODORY'SCHEN Arbeit herüber. Sei ein Wertsystem (1) vorgelegt, welches sich in die Gestalt (2) bringen lässt. Dann betrachten wir die Potenzreihe (3); ihr reeller Teil ist (für $0 \leq \rho < 1$):

$$\lambda + \lambda_1 \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varpi_1 - \varpi) + \rho^2} + \dots + \lambda_n \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varpi_n - \varpi) + \rho^2},$$

mithin > 0 . Damit ist bewiesen, dass das betrachtete Wertsystem (1) der Menge \mathfrak{R}_n angehört.

§ 3.

Die Möglichkeit der Carathéodory'schen Parameterdarstellung (2) als Folge des Nichtnegativseins der Form φ .

Wir beginnen mit dem bekannten und in verschiedenen Gebieten der Mathematik verwendeten Satze:

HILFSSATZ I. — Es seien $e_0, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}$ gegebene $2n + 2$ reelle Grössen von der Beschaffenheit, dass die aus den ersten $2n + 1$ von ihnen gebildete quadratische Form

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, \dots, u_n eine positive ist. Dann kann man setzen:

$$(7) \quad e_\nu = \rho_0 \xi_0^\nu + \dots + \rho_n \xi_n^\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n)$$

u.zw. (abgesehen von der Numerierung der Paare ρ_j, ξ_j) nur auf eine Weise. Dabei werden die ξ_j reell und verschieden, die ρ_j reell und > 0 .

Ich will für diesen Satz, wiewohl er bekannt ist, einen besonders durchsichtigen Beweis angeben. Wir betrachten neben φ noch die Form

$$\varphi_1 = \sum_{p,q=0}^n e_{1+p+q} u_p u_q$$

wie das, wenn auch zu andern Zwecken, STIELTJES wiederholt getan hat ⁶⁾. Da φ und φ_1 reelle Koeffizienten haben und φ positiv ist, so gibt es nach der Theorie der quadratischen Formen eine simultane Quadratdarstellung.

$$\varphi = \sum_{j=0}^n (m_{j_0} u_0 + \dots + m_{j_n} u_n)^2,$$

$$\varphi_1 = \sum_{j=0}^n \xi_j (m_{j_0} u_0 + \dots + m_{j_n} u_n)^2,$$

worin die m und ξ gewisse von den u unabhängige Grössen bedeuten. Nun entnimmt man, falls $n > 0$ ist, aus der Darstellung für φ :

$$e_{p+(q+1)} = m_{0p} m_{0q+1} + \dots + m_{np} m_{nq+1} \quad \left(\begin{matrix} p = 0, \dots, n-1, n \\ q = 0, \dots, n-1 \end{matrix} \right),$$

dagegen aus der Darstellung für φ_1 :

$$e_{1+p+q} = \xi_0 m_{0p} m_{0q} + \dots + \xi_n m_{np} m_{nq},$$

mithin ist

$$m_{0p} (m_{0q+1} - \xi_0 m_{0q}) + \dots + m_{np} (m_{nq+1} - \xi_n m_{nq}) = 0;$$

da aber die aus den m gebildete Determinante nicht verschwinden kann, weil φ als positive Form den Rang $n + 1$ besitzt, so folgt

$$m_{j,q+1} - \xi_j m_{j,q} = 0 \quad \text{und daher} \quad m_{j,q} = \xi_j^q m_{j_0},$$

was nun auch für den Fall $n = 0$ stimmt. Setzt man also noch

$$m_{j_0}^2 = \rho_j$$

so erhält man:

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi = \sum_{j=0}^n \rho_j (u_0 + \xi_j u_1 + \dots + \xi_j^n u_n)^2, \\ \varphi_1 = \sum_{j=0}^n \rho_j \xi_j (u_0 + \xi_j u_1 + \dots + \xi_j^n u_n)^2, \end{cases}$$

eine einfache Zusammenfassung des gewünschten Gleichungssystems (7).—Nun sei umgekehrt eine Darstellung (7) vorgelegt. Dann gilt (8), und da φ als positive Form den Rang $n + 1$ besitzt, müssen die ξ_j untereinander verschieden und die ρ_j von 0 verschieden sein. Ferner sind $t = \xi_0, \dots, \xi_n$ die Nullstellen der Determinante der Form $\varphi_1 - t\varphi$, also völlig bestimmt und bekanntlich reell. Endlich zeigt die erste der beiden

⁶⁾ Vgl. auch z. B. NETTO, loc. cit. ³⁾, Bd. I, § 234.

Gleichungen (8), dass auch die ρ_j völlig bestimmt, reell und > 0 sind, weil φ eine positive Form ist.

HILFSSATZ II.—Es seien e_0, e_1, \dots, e_{2n} gegebene $2n+1$ reelle Grössen ($n > 0$) von der Art, dass die quadratische Form

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n eine *nichtnegative* ist; dann kann man setzen:

$$(9) \quad \begin{cases} e_\nu = \sum_{j=0}^N \rho_j \xi_j^\nu \\ e_{2n} = \sum_{j=0}^N \rho_j \xi_j^{2n} + \mu \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

mit der Bedingung, dass die Gliederzahl $N+1$ der über j erstreckten Summe kleiner als die Variablenzahl $n+1$ sein soll, aber sehr wohl auch $= 0$ sein darf ⁷⁾; diese Darstellung (9) ist, wenn man sie im Falle $N+1 > 0$ so normiert, dass die ξ_j untereinander verschieden und die ρ_j von 0 verschieden sind, nur auf eine Weise möglich, und es werden dabei die ξ_j reell, die ρ_j reell und > 0 , μ reell und ≥ 0 .

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, dass e_0 von 0 verschieden ist. In diesem Falle bilden wir die Abschnittsdeterminanten

$$E_0 = e_0, \quad E_1 = \begin{vmatrix} e_0 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix}, \quad E_2 = \begin{vmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Die letzte E_n lassen wir ausser Betracht; unter den übrigen

$$E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$$

sei E_N die letzte nichtverschwindende. Indem wir statt φ ausführlicher $\varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)$ schreiben, bilden wir nun die Form

$$\varphi(u_0, \dots, u_N, 0, \dots, 0) = \sum_{p,q=0}^N e_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, \dots, u_N ; sie ist eine *positive* Form dieser Variablen, da sie einerseits nach der über φ gemachten Voraussetzung nichtnegativ, andererseits von nichtverschwindender Determinante E_N ist. Daher können wir nach Hilfssatz I setzen:

$$e_\nu = \sum_{j=0}^N \rho_j \xi_j^\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2N+1),$$

worin die ξ_j reell und verschieden, die ρ_j reell und > 0 sind.

Wir definieren nun reelle Grössen $e'_0, e'_1, \dots, e'_{2n}$, indem wir setzen:

$$(10) \quad e_\nu = \sum_{j=0}^N \rho_j \xi_j^\nu + e'_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n),$$

⁷⁾ In diesem Falle ist (9) zu lesen als:

$$\begin{aligned} e_\nu &= 0 \\ e_{2n} &= \mu. \end{aligned} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

sodass

$$(11) \quad e'_0 = 0, \dots, e'_{2N+1} = 0$$

ist, und gehen darauf aus zu zeigen, dass für alle $\nu < 2n$ die Beziehung $e'_\nu = 0$ und ausserdem $e'_{2\nu} \geq 0$ gilt. Zu dem Ende bilden wir aus (10) für einen beliebigen Index $s < n$ die Identität

$$(12) \quad \varphi(u_0, \dots, u_{s+1}, 0, \dots, 0) = \rho_0 U_0^2 + \dots + \rho_N U_N^2 + \sum_{p,q=0}^{s+1} e'_{p+q} u_p u_q,$$

worin U_j die Linearform

$$U_j = u_0 + u_1 \xi_j + \dots + u_{s+1} \xi_j^{s+1}$$

bedeutet.

In dieser Identität (12) nehmen wir 1.) zunächst $s = N$. Wegen (11) ist dann

$$(13) \quad \sum_{p,q=0}^{s+1} e'_{p+q} u_p u_q = e'_{2N+2} u_{N+1}^2,$$

und da man U_0, \dots, U_N, u_{N+1} als unabhängige Variable ansehen kann, so kann aus dem Umstande, dass $\varphi(u_0, \dots, u_{s+1}, 0, \dots, 0)$ eine nichtnegative Form ist, dieselbe Eigenschaft für die Form (13) gefolgert werden; also ist $e'_{2N+2} \geq 0$.

Ist aber hierbei $N+1$ noch $< n$, so muss e'_{2N+2} sogar $= 0$ sein; denn die für $s=N$ gebildete Form (12) hat in diesem Falle wegen $E_{N+1} = 0$ nur den Rang $N+1$, sodass (13) verschwinden muss. Nimmt man in der Identität (12) nun 2.) $s = N+1$, so wird

$$(14) \quad \sum_{p,q=0}^{s+1} e'_{p+q} u_p u_q = 2e'_{2N+3} u_{N+1} u_{N+2} + e'_{2N+4} u_{N+2}^2$$

und da man $U_0, \dots, U_N, u_{N+1}, u_{N+2}$ als unabhängige Variable ansehen kann, so kann aus dem Umstande, dass $\varphi(u_0, \dots, u_{s+1}, 0, \dots, 0)$ eine nichtnegative Form ist, dieselbe Eigenschaft für die Form (14) gefolgert werden; es ist also $e'_{2N+3} = 0, e'_{2N+4} \geq 0$. •

Ist nun $N+2$ noch $< n$, so betrachte ich in der Identität (12) noch 3.) einen Index $s \geq N+2$ und nehme an, dass bereits die Richtigkeit von

$$e'_0 = 0, \dots, e'_{2s-1} = 0, \quad e'_{2s} \geq 0$$

erwiesen sei. Dann ist

$$(15) \quad \sum_{p,q=0}^{s+1} e'_{p+q} u_p u_q = \sum_{p,q=s-1}^{s+1} e'_{p+q} u_p u_q,$$

und da man $U_0, \dots, U_N, u_{N+1}, \dots, u_{s-1}, u_s, u_{s+1}$ als unabhängige Variable ansehen kann, so kann aus dem Umstande, dass $\varphi(u_0, \dots, u_{s+1}, 0, \dots, 0)$ eine nichtnegative Form ist, dieselbe Eigenschaft für die Form (15) gefolgert werden. Diese hat aber, als Form von u_{s-1}, u_s, u_{s+1} betrachtet, die Matrix

$$\begin{matrix} 0, & 0, & e'_{2s} \\ 0, & e'_{2s}, & e'_{2s+1} \\ e'_{2s}, & e'_{2s+1}, & e'_{2s+2} \end{matrix}$$

und man erkennt daher zunächst, dass $e'_{2s} = 0$ sein muss, da einerseits $e'_{2s} \geq 0$ ist,

andererseits die Determinante $-e'_{2s}$ dieser Matrix ≥ 0 sein soll; sodann weiter, dass $e'_{2s+1} = 0$, $e'_{2s+2} \geq 0$ sein muss.

So ist also bewiesen, dass

$$e'_0 = 0, \dots, e'_{2n-1} = 0, e'_{2n} \geq 0$$

ist, also, wenn noch

$$e'_{2n} = \mu$$

gesetzt wird, eine Darstellung (9) mit dem aus den Abschnittsdeterminanten definierten Werte von N und den behaupteten Eigenschaften der Grössen ξ_j , ρ_j , μ gewonnen.

Für den andern Fall $e_0 = 0$ benützen wir die Identität

$$\varphi(u_0, \dots, u_{s+1}, 0, \dots, 0) = \sum_{p,q=0}^{s+1} e_{p+q} u_p u_q.$$

Wir nehmen in ihr 1.) zunächst $s = 0$ und schliessen, dass

$$2e_1 u_0 u_1 + e_2 u_1^2$$

eine nichtnegative Form, also

$$e_1 = 0, e_2 \geq 0$$

sein muss. Ist nun $n > 1$, so betrachten wir noch 2.) einen Index $s \geq 1$ und nehmen an, dass die Richtigkeit von

$$e_0 = 0, \dots, e_{2s-1} = 0, e_{2s} \geq 0$$

bereits erwiesen sei. Dann schliessen wir, ganz ähnlich wie oben, dass $e_{2s} = 0$, $e_{2s+1} = 0$, $e_{2s+2} \geq 0$ sein muss. Es ist also im Falle $e_0 = 0$ stets

$$e_0 = 0, \dots, e_{2n-1} = 0, e_{2n} \geq 0.$$

Man erhält daher eine Darstellung (9) mit $N + 1 = 0$, $\mu = e_{2n}$ ⁸⁾.

Nun muss noch gezeigt werden, dass eine Darstellung (9) mit der im Satze angegebenen Normierung nur auf eine Weise möglich ist. Aus (9) folgt:

$$(16) \quad \varphi = \sum_{j=0}^N \rho_j (u_0 + u_1 \xi_j + \dots + u_n \xi_j^n)^2 + \mu u_n^2.$$

Daher hat man zunächst

$$\varphi(u_0, \dots, u_{n-1}, 0) = \sum_{j=0}^N \rho_j (u_0 + \dots + u_{n-1} \xi_j^{n-1})^2,$$

sodass sich $N + 1$ als der Rang der linksstehenden Form bestimmt. Weiter hat man, wenn $N + 1 > 0$ ist,

$$\varphi(u_0, \dots, u_N, 0, \dots, 0) = \sum_{j=0}^N \rho_j (u_0 + \dots + u_N \xi_j^N)^2.$$

Hier steht links eine nichtnegative Form von $N + 1$ Variablen, rechts eine Form vom

⁸⁾ Man sieht, dass in beiden Fällen der Rang der Form φ übereinstimmt [vgl. (16)] mit dem Range der Form $\varphi(u^0, \dots, u_N, 0, \dots, 0, u_n)$. Dies hätte man auch aus einer allgemeinen von FROBENIUS {Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXIV (1895), S. 187-230], § 8} gegebenen Formel für die Signatur «recurrenter» Formen entnehmen und sodann zur Abkürzung des obigen Beweises verwenden können.

Range $N + 1$; wir haben es daher mit einer positiven Form von u_0, \dots, u_N zu tun, also mit der in Hilfssatz I behandelten Sachlage. Aus den Gleichungen (9) für $v = 0, 1, \dots, 2N + 1$ sind daher die ρ_j, ξ_j völlig bestimmt. Daher ist schliesslich auch μ völlig bestimmt.

HILFSSATZ III. — Es seien e_0, e_1, \dots, e_{2n} gegebene $2n + 1$ reelle Grössen ($n > 0$) von der Art, dass die quadratische Form

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n eine nichtnegative ist; dann kann man auf eine und nur eine Weise setzen:

$$(17) \quad e_v = \sum_{j=0}^R 2\lambda_j \left(\cos \frac{\varkappa_j}{2}\right)^{2n-v} \left(\sin \frac{\varkappa_j}{2}\right)^v \quad (v = 0, 1, \dots, 2n)$$

mit der Bedingung, dass 1.) die Gliederzahl $R + 1$ höchstens gleich der Variablenzahl $n + 1$ sein soll, aber sehr wohl auch $= 0$ sein darf ⁹⁾, 2.) die λ_j reell und > 0 sein sollen, 3.) die \varkappa_j reell, in den Grenzen $-\pi < \varkappa_j \leq +\pi$ gelegen und untereinander verschieden sein sollen, und im Falle $R = n$ eine von ihnen $= \pi$ sein soll ¹⁰⁾.

Beweis: In der Darstellung (9) setze man, falls $N + 1 > 0$ ist,

$$\xi_j = \operatorname{tg} \frac{\varkappa_j}{2}$$

mit reellem der Bedingung $-\pi < \varkappa_j < +\pi$ genügendem \varkappa_j . Es sind dann $\varkappa_0, \dots, \varkappa_N$ völlig bestimmt und von einander verschieden. Da ferner $\cos \frac{\varkappa_j}{2}$ von 0 verschieden ausfällt, kann man weiter setzen

$$\rho_j = 2\lambda_j \left(\cos \frac{\varkappa_j}{2}\right)^{2n}$$

wobei $\lambda_j > 0$ wird. Wenn ferner $\mu > 0$ ist, führe man noch $\varkappa_{N+1}, \lambda_{N+1}$ ein durch:

$$\varkappa_{N+1} = \pi, \quad 2\lambda_{N+1} = \mu.$$

Durch diese Substitutionen geht (9) über in (17) mit

$$R = N, \quad \text{falls } \mu = 0$$

$$R = N + 1, \quad \text{falls } \mu > 0.$$

Es gibt also eine den angegebenen Bedingungen genügende Darstellung (17)

Umgekehrt gewinnt man aus jeder solchen durch die umgekehrten Substitutionen eine Darstellung (9); nach Hilfssatz 2 gibt es aber nur eine einzige Darstellung (9)

⁹⁾ In diesem Falle ist (17) zu lesen als:

$$e_v = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, 2n).$$

¹⁰⁾ Auch im Falle $R < n$ kann eine der Grössen \varkappa_j den Wert π erhalten, doch bedarf es dazu keiner besondern Forderung; im Falle $R = n$ hingegen ist eine besondere Forderung deshalb nötig, weil es ausser der Darstellung (9) noch die Darstellung (7) (mit willkürlichem e_{2n+1}) gibt. Für das Folgende kommt übrigens der Fall $R = n$ nicht in Betracht.

und daher, da die λ_j, ϑ_j durch die ρ_j, ξ_j, μ und die geforderten Beschränkungen völlig festgelegt sind, auch nur eine einzige Darstellung (17).

ZUSATZ. — Sind umgekehrt λ_j, ϑ_j ($j=0, \dots, R$) reelle Grössen, $0 \leq R+1 \leq n+1$, $\lambda_j > 0$, $-\pi < \vartheta_j \leq +\pi$ und $\vartheta_0, \dots, \vartheta_R$ von einander verschieden, so definieren die Formeln (17) solche reelle Grössen e_ν , dass φ eine nichtnegative Form vom Range $R+1$ ist.

Es wird eben :

$$\varphi = \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j S_j^2,$$

worin S_j den Wert bedeutet, den die in § 1 erklärte Linearform S der Variablen u_0, \dots, u_n für $\vartheta = \vartheta_j$ annimmt.

HILFSSATZ IV. — Es seien e_0, e_1, \dots, e_{2n} gegebene $2n+1$ Grössen ($n > 0$) von der Art, dass die quadratische Form

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n eine nichtnegative ist; dann kann man auf eine und nur eine Weise setzen:

$$(18) \quad e_\nu = 2 \lambda \sigma_{\nu 0} + \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \left(\cos \frac{\vartheta_j}{2} \right)^{2n-\nu} \left(\sin \frac{\vartheta_j}{2} \right)^\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n)$$

worin $\sigma_{\nu 0}$ die in § 1 erklärte Bedeutung hat, mit der Bedingung, dass 1.) λ reell und ≥ 0 sein soll, 2.) die Gliederzahl $R+1$ der über j erstreckten Summe kleiner als $n+1$ sein soll, aber sehr wohl auch $= 0$ sein darf ¹¹⁾, 3.) die λ_j reell und > 0 sein sollen, 4.) die ϑ_j reell, in den Grenzen $-\pi < \vartheta_j \leq +\pi$ gelegen und verschieden sein sollen.

Beweis: Nach (6) ist

$$2 \sum_{p,q=0}^n \sigma_{p+q,0} u_p u_q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 d\vartheta.$$

Daher ist (18) gleichbedeutend mit:

$$(19) \quad \varphi = \lambda \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 d\vartheta + \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j S_j^2,$$

und mit Rücksicht auf Hilfssatz III kommt es also lediglich auf den Nachweis dafür an, dass sich $\lambda \geq 0$ auf eine und nur eine Weise so bestimmen lässt, dass

$$(20) \quad \varphi - \lambda \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 d\vartheta$$

eine nichtnegative Form von verschwindender Determinante wird. Dies erhellt aber unmittelbar aus dem Umstande, dass φ eine nichtnegative und $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 d\vartheta$ eine positive Form ist: man hat für λ die kleinste Nullstelle der Determinante der Form (20) zu nehmen.

¹¹⁾ In diesem Falle ist (18) zu lesen als :

$$e_\nu = 2 \lambda \sigma_{\nu 0} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n).$$

SATZ. — Es seien $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ gegebene $2n$ reelle Grössen von der Art, dass die quadratische Form

$$(21) \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k z + b_k \sin k z] \right) dz,$$

worin S die in § 1 erklärte Bedeutung hat, eine *nichtnegative* ist; dann kann man auf eine und nur eine Weise setzen:

$$(22) \quad \begin{cases} a_k = \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \cos k z_j \\ b_k = \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \sin k z_j \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mit der Bedingung, dass 1.) die Gliederzahl $R+1 \leq n$ sein soll, aber sehr wohl auch $= 0$ sein darf ¹²⁾, 2.) die λ_j reell und den Beschränkungen

$$\lambda_j > 0, \quad \sum_{j=0}^R \lambda_j \leq 1$$

unterworfen, 3.) die z_j reell, in den Grenzen $-\pi < z_j \leq +\pi$ gelegen und verschieden sein sollen. (CARATHÉODORY'SCHE Parameterdarstellung).

Beweis: Die quadratische Form φ nimmt unter Einführung der durch (6) definierten Grössen e_ν die Gestalt

$$\varphi = \sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p u_q$$

an. Wir wenden auf sie Hilfssatz IV an und erhalten die Darstellung (18). Auf diese wenden wir links die Gleichung (6), rechts die Gleichung (5) an und erhalten:

$$\begin{aligned} & 2 \sigma_{\nu_0} + \sum_{k=1}^n [\sigma_{\nu_k} a_k + \tau_{\nu_k} b_k] \\ &= \left(2 \lambda + \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \right) \sigma_{\nu_0} + \sum_{k=1}^n \left[\sigma_{\nu_k} \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \cos k z_j + \tau_{\nu_k} \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \sin k z_j \right], \end{aligned}$$

somit, da die aus den σ und τ gebildete Determinante nicht verschwindet,

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda + \sum_{j=0}^R \lambda_j; \\ a_k &= \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \cos k z_j, \\ b_k &= \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \sin k z_j. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda \geq 0$ ist also

$$\sum_{j=0}^R \lambda_j \leq 1$$

¹²⁾ In diesem Falle ist (22) zu lesen als:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= 0 \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

mithin ist eine Darstellung (22) gewonnen. — Umgekehrt führt jede Darstellung (22) auf eine Darstellung (18), woraus erhellt, dass es nur eine einzige Darstellung (22) gibt.

ZUSATZ. — Es seien umgekehrt λ_j, ϖ_j ($j=0, \dots, R$) reelle Grössen, $0 \leq R+1 \leq n$, $\lambda_j > 0$, $-\pi < \varpi_j \leq +\pi$ und $\varpi_0, \dots, \varpi_R$ von einander verschieden. Wir definieren durch (22), (21) die quadratische Form φ der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n . Führt man nun die Abkürzung

$$\lambda = 1 - \sum_{j=0}^R \lambda_j$$

ein, so gilt (19). Daher ist φ

eine *positive* Form, wenn $\lambda > 0$, d. i. $\sum_{j=0}^R \lambda_j < 1$ ist;

eine *nichtnegative* Form von *verschwindender Determinante*, wenn $\lambda = 0$, d. i. $\sum \lambda_j = 1$ ist;

keine *nichtnegative* Form, wenn $\lambda < 0$, d. i. $\sum_{j=0}^R \lambda_j > 1$ ist.

§ 4.

Konklusion.

Ist ein Wertsystem (1) der Menge \mathfrak{R}_n vorgelegt, so muss nach § 1 die Form (21) eine nichtnegative sein.

Ist umgekehrt für ein Wertsystem (1) die Form (21) eine nichtnegative, so besteht nach dem Satze des § 3 die CARATHÉODORY'sche Parameterdarstellung (2), und hieraus folgt nach § 2, dass das Wertsystem (1) zu \mathfrak{R}_n gehört.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen, dass die Wertsysteme von \mathfrak{R}_n durch das Nichtnegativsein der Form (21) charakterisiert sind.

Zugleich erhellt aus dem Satze des § 3 und dem beigefügten Zusatze, dass die Wertsysteme von \mathfrak{R}_n durch die CARATHÉODORY'sche Parameterdarstellung (2) charakterisiert sind.

§ 5.

Innenpunkte und Grenzpunkte von \mathfrak{R}_n .

Auch die in der Einleitung erwähnten Ergänzungssätze ergeben sich aus der Betrachtung der durch (21) definierten quadratischen Form φ der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n .

I. Ist (1) ein Wertsystem, für welches φ eine *positive* Form ist, so haben alle unendlich benachbarten Wertsysteme dieselbe Eigenschaft; es ist also in diesem Falle (1) ein *Innenpunkt* von \mathfrak{R}_n .

Ist (1) ein Wertsystem, für welches φ eine *nichtnegative* Form von *verschwindender Determinante* ist, so wird in der Darstellung (22) nach dem am Schlusse des § 3

Bemerkten $\sum_{j=0}^R \lambda_j = 1$; man kann daher durch unendlich kleine Änderung der λ_j sowohl $\sum_{j=0}^R \lambda_j < 1$ als $\sum_{j=0}^R \lambda_j > 1$ hervorbringen; unter den zu (I) unendlich benachbarten Wertsystemen gibt es daher sowohl solche, für die φ eine positive, als auch solche, für die φ keine nichtnegative Form ist; es ist also in diesem Falle (I) ein Grenzpunkt von \mathfrak{F}_n .

Mithin sind die Grenzpunkte von \mathfrak{F}_n auch charakterisiert durch:

$$\sum_{j=0}^R \lambda_j = 1.$$

II. Es sei

$$(I) \quad a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$$

ein Grenzpunkt von \mathfrak{F}_n , und es sei

$$(22) \quad \begin{cases} a_k = \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \cos k \varpi_j \\ b_k = \sum_{j=0}^R 2 \lambda_j \sin k \varpi_j \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

seine Darstellung nach dem Satze des § 3. Dann soll gezeigt werden, dass für jede zugehörige Potenzreihe (siehe Einleitung):

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - i b_k) \chi^k$$

(a_k, b_k reell) notwendig die Formeln (22) auch für $k > n$ Geltung behalten müssen, dass also nur eine einzige zugehörige Potenzreihe Z existiert.

Für die Werte

$$(23) \quad a_1, b_1, \dots, a_{n+1}, b_{n+1}$$

die ja aus der Potenzreihe Z stammen und daher ein Wertsystem von \mathfrak{F}_{n+1} bilden, gibt es eine Darstellung

$$(24) \quad \begin{cases} a_k = \sum_{j=0}^{R'} 2 \lambda'_j \cos k \varpi'_j \\ b_k = \sum_{j=0}^{R'} 2 \lambda'_j \sin k \varpi'_j \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n+1)$$

im Sinne des Satzes aus § 3; dabei ist

$$R' + 1 \leq n + 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{R'} \lambda'_j \leq 1.$$

Indem ich (24) bloss für $k = 1, 2, \dots, n$ benütze, erhalte ich für die Form (21) die Darstellung:

$$(25) \quad \varphi = \lambda' \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S^2 d\varpi + \sum_{j=0}^{R'} 2 \lambda'_j S_j^2,$$

wobei $\lambda' = 1 - \sum_{j=0}^{R'} \lambda'_j \geq 0$ und S'_j der Wert von S für $\varpi = \varpi'_j$ ist. Da nun φ eine Form von verschwindender Determinante ist, kann aus (25) geschlossen werden, dass

$\lambda' = 0$ und:

$$R' + 1 \leq n$$

sein muss. Dann kann aber (24) nicht von (22) verschieden sein. Es gilt also (22) auch für $k = n + 1$.

Da aber (1) Grenzpunkt von \mathfrak{R}_n ist, muss $\sum_{j=0}^R \lambda_j = 1$ sein, und hieraus folgt, da nun (22) auch für $k = n + 1$ gilt, dass (23) Grenzpunkt von \mathfrak{R}_{n+1} ist. Daher kann der Schluss fortgesetzt werden, und es gilt also (22) für alle k .

II. TEIL.

EINLEITUNG.

Die mitgeteilten Resultate leiden an dem Uebelstande, dass die Koeffizienten c_v der Form φ ausser von v auch noch von n abhängen, dass also φ nicht als « $n + 1$ ter Abschnitt » einer Form von unendlich vielen Variablen erscheint.

Diesem Uebelstande vermochte ich zur Zeit der Abfassung des ersten Teils dieser Arbeit nicht abzuhelfen. Nun hat seither TOEPLITZ, ohne Kenntnis des Vorstehenden, eine andere Lösung des Problems gegeben, welche den erwähnten Mangel nicht besitzt. Er bildet aus den reellen Grössen (1) die komplexen Grössen

$$c_0 = 2, \quad \begin{cases} c_k = a_k - i b_k \\ c_{-k} = a_k + i b_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und benutzt statt der reellen quadratischen Form φ die HERMITE'sche Form

$$(26) \quad \psi = \sum_{p, q=0}^n c_{p-q} v_p \bar{v}_q$$

der komplexen Variablen v_0, v_1, \dots, v_n (v_q und \bar{v}_q konjugiertkomplex), die — abgesehen von ihrem einfacheren Bildungsgesetz überhaupt — den Vorzug besitzt, Abschnitt einer Form von unendlich vielen Variablen zu sein.

Nun hat sich aber TOEPLITZ auf die ursprünglichen Resultate CARATHÉODORY's gestützt und keinen algebraischen Beweis gegeben. Es erscheint daher wünschenswert, für die TOEPLITZ'sche Form ψ Untersuchungen durchzuführen, die den im ersten Teile dieser Arbeit für die Form φ angestellten analog sind.

Statt dessen will ich den direkten Zusammenhang der Form φ mit der TOEPLITZ'schen Form ψ herstellen. Es wird sich ergeben, dass das TOEPLITZ'sche Resultat sich unmittelbar aus dem Resultat des ersten Teils dieser Arbeit folgern lässt, womit es — wenn auch auf einem Umwege — algebraisch begründet ist. Bei dieser Gelegenheit wird sich auch eine bemerkenswerte Eigenschaft der TOEPLITZ'schen Form selbst ergeben, die Bedingungen für ihr Nichtnegativsein betreffend.

§ 6.

Zusammenhang der Formen φ und ψ , und Beweis des Toeplitz'schen Resultats.

Wenn eine quadratische Form

$$\sum_{p,q=0}^n h_{p,q} u_p u_q$$

nichtnegativ ist, d. h. für reelle Werte der Variablen u_0, u_1, \dots, u_n stets reell ¹³⁾ und ≥ 0 ausfällt, dann ist auch die HERMITE'sche Form

$$\sum_{p,q=0}^n h_{p,q} u_p \bar{u}_q$$

eine nichtnegative, d. h. sie fällt stets reell und ≥ 0 aus, wenn u_0, u_1, \dots, u_n beliebige komplexe Werte und $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ die zu ihnen bzgl. konjugiertkomplexen Werte sind.

Aus diesem Grunde kann das Ergebnis des ersten Teils dieser Arbeit auch so formuliert werden :

Damit das reelle Wertsystem (1) der Menge \mathfrak{R}_n angehört, ist notwendig und hinreichend, dass die HERMITE'sche Form

$$\sum_{p,q=0}^n e_{p+q} u_p \bar{u}_q,$$

deren Koeffizienten durch (6) definiert werden, eine nichtnegative ist.

Diese HERMITE'sche Form kann aber auch als

$$(27) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S|^2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k \varkappa + b_k \sin k \varkappa] \right) d\varkappa$$

definiert werden, worin die Integrationsvariable \varkappa reell gedacht ist und S die bisherige Bedeutung

$$S = \sum_{p=0}^n u_p \left(\cos \frac{\varkappa}{2} \right)^{n-p} \left(\sin \frac{\varkappa}{2} \right)^p$$

hat.

Ich betrachte nun neben S noch den Ausdruck :

$$T = \sum_{p=0}^n v_p e^{i \left(\frac{n-p}{2} \right) \varkappa},$$

worin v_0, v_1, \dots, v_n neue Variable bedeuten. Man kann dann zwischen den Variablen u einerseits und den Variablen v andererseits eine lineare Transformation (mit kon-

¹³⁾ Also die Koeffizienten $h_{p,q}$ reell sind.

stanten, komplexen Koeffizienten) definieren durch die Forderung, dass identisch in z :

$$S = T$$

sein soll ¹⁴⁾.

Durch diese Transformation geht nun die HERMITE'sche Form (27) über in

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |T|^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k z + b_k \sin k z] \right) dz$$

d. i. in die durch (26) definierte TOEPLITZ'sche Form ψ .

Damit also das reelle Wertsystem (1) der Menge \mathfrak{R}_n angehört, ist notwendig und hinreichend, dass die TOEPLITZ'sche Form (26) eine nichtnegative ist.

§ 7.

Eine Eigenschaft der Toeplitz'schen Form ψ .

Der zu Anfang des vorigen § hervorgehobene Umstand, dass das Nichtnegativsein der HERMITE'schen Form (27) schon aus dem Nichtnegativsein derjenigen quadratischen Form φ geschlossen werden kann, in welche sie übergeht, wenn man die Variablen u_0, u_1, \dots, u_n reell nimmt, hat eine entsprechende Eigenschaft der Form ψ zur Folge.

Hiezu muss festgestellt werden, welche Wertsysteme der v vermöge der durch $S = T$ definierten Transformation den reellen Wertsystemen der u entsprechen. Da die letzteren durch das Reellsein von S charakterisiert sind, wofern man z als reelle Variable betrachtet, so sind die ersteren dadurch gekennzeichnet, dass T reell, also seinem konjugiertkomplexen Werte gleich wird. Dies gibt, wenn \bar{v}_p den konjugiertkomplexen Wert zu v_p bedeutet,

$$\sum_{p=0}^n v_p e^{\left(\frac{n}{2}-p\right)zi} = \sum_{p=0}^n \bar{v}_p e^{-\left(\frac{n}{2}-p\right)zi}$$

oder, wenn man rechts $n - p$ statt p schreibt,

$$\sum_{p=0}^n v_p e^{\left(\frac{n}{2}-p\right)zi} = \sum_{p=0}^n \bar{v}_{n-p} e^{\left(\frac{n}{2}-p\right)zi}$$

mithin

$$(28) \quad v_p = \bar{v}_{n-p} \quad (p = 0, 1, \dots, n).$$

Wenn also die TOEPLITZ'sche Form (26) für alle den Bedingungen (28) genügenden Wertsysteme ≥ 0 ausfällt, so fällt sie überhaupt für alle möglichen Wertsysteme ≥ 0 aus.

Brünn, im Mai 1911.

ERNST FISCHER.

¹⁴⁾ Für $n = 1$ z. B. wird diese Transformation:

$$\begin{aligned} u_0 - i u_1 &= 2 v_0, \\ u_0 + i u_1 &= 2 v_1. \end{aligned}$$