

### III. Ueber die Benutzung der Ausdehnung der Drähte durch elektrische Ströme zur Messung der letztern; von W. Hankel.

---

Da gespannte Metalldrähte, wenn sie von elektrischen Strömen durchflossen werden, eine Ausdehnung erleiden, und zwar nicht nur in Folge der eingetretenen Erwärmung, sondern auch, wie Wertheim (Pogg. Ann. Erg. Bd. 2. S. 114) gefunden hat, in Folge einer Verringerung ihrer Elasticität, so versuchte ich es, auf diese Ausdehnung ein Instrument zu gründen, welches eine genaue Messung der elektrischen Ströme gestattete. Ich wurde schon vor längerer Zeit zu dieser Idee geführt durch das Bedürfnis, ein Instrument zu besitzen, das sich auch zur genauen Messung solcher Ströme eignet, welche in jedem Augenblicke eine Aenderung in ihrer Richtung erleiden.

Ich erlaube mir, diejenige Einrichtung, welche in jeder Beziehung meinen Erwartungen entsprochen hat, im Folgenden kurz zu beschreiben und einige Versuche zur Nachweisung der Genauigkeit der Angaben mitzutheilen.

*AB* (Fig. 7, Taf. III.) ist ein kleiner Wagebalken, der mit seiner stählernen gut geschliffenen Schneide auf der Unterlage *C* ruht und bei *D* und *E*, in gleicher Entfernung von *C*, noch zwei andere aufwärts gerichtete ähnliche Schneiden zum Ueberhängen der beiden Bügel *DG* und *EH* besitzt. Diese Bügel greifen, wie bei einer gewöhnlichen Wage, auf beiden Seiten über die aus dem Balken horizontal hervorstehenden Schneiden. Der Wagebalken trägt ferner bei *F* einen von Oertling geschliffenen vollkommenen Planspiegel, der senkrecht gegen den Balken gestellt ist, und besitzt bei *B* eine Spitze, welche, wie der Zeiger einer Wage, sich vor dem von dem Stäbchen *RZ* getragenen Elfenbeinstreifen *QbZ* auf- und abwärts bewegen kann. Steht die Spitze *B* dem auf dem Elfenbeinstreifen gezogenen Striche *b* gegenüber, so ist dies ein Zeichen, daß der Wagebalken

nahe horizontal, also der Spiegel bei *F* vertikal steht. Die vorspringenden Messingtheile *Q* und *Z* dienen, um den Wagebalken vor dem Umschlagen zu schützen, wenn durch irgend einen Zufall eine Zerreiſung der nachher zu erwähnenden Drähte eintreten sollte; zugleich gewähren sie bei der Aufstellung des Apparates Bequemlichkeit. Das auf dem schraubenförmigen Theile *BB'* des Wagebalkens befindliche Gewicht *P'* dient, um das Gewicht des Spiegels auszugleichen, und das auf einer Schraube bewegliche Gewicht *P''* erlaubt den Schwerpunkt des Balkens dem Punkte *C* möglichst nahe zu bringen.

An den Bügel *DG* wird mittelst eines Drahtes *GP* das Gewicht *P* gehängt, welches den mit dem andern Bügel *EH* verbundenen Draht *MN* zu spannen bestimmt ist. Die Drähte *GP* und *MN* gehen durch zwei Oeffnungen *W* und *X* im Fusse des Instrumentes hindurch. Die Befestigung des Drahtes *MN* bei *H* geschieht so, daß derselbe mittelst einer kleinen Druckschraube in der Hülse *J* festgehalten wird; diese Hülse *J* wird dann mit einem Ohr an den Bügel *EH* bei *H* angehängt. Der durch die Oeffnung *X* hinabgehende Draht wird weiter unten in einer Oeffnung *J'* der Schraube *O* durch eine kleine Druckschraube festgehalten. Die in dem Stabe *UT* befindliche Schraube *O* läßt sich durch die Umdrehung der Schraubenmutter *S* sehr fein auf- und abwärts bewegen, ohne daß sie sich dabei drehet. Ist der Draht *MN* bei *J* und *J'* eingeklemmt, und durch das Gewicht *P* gespannt, so läßt es sich, wenn man die Länge des Drahtes vor dem Einspannen einigermaßen nach der Entfernung der beiden Punkte *J* und *J'* abgemessen hat, durch die Umdrehung der Schraube *S* leicht dahin bringen, daß die Spitze *B* der Marke *b* gerade gegenüber steht.

An das obere Ende des Drahtes *M* ist ein Kupferdraht *K* angelöthet, und so gebogen, daß er mit seinem amalgamirten Ende in ein kleines auf dem Fusse *W'R* stehendes mit Quecksilber angefülltes Gefäß *L* eintaucht. An dem untern Ende des ausgespannten Drahtes *N* ist gleichfalls ein Kupferdraht *K'* angelöthet. Beide Drähte *K* und *K'* die-

nen, um den elektrischen Strom durch den Draht  $MN$  zu führen; das Quecksilbernäpfchen  $L$  wird mit den einen und der Draht  $K'$  mit den andern Polen einer Batterie in Verbindung gesetzt. Durch den elektrischen Strom verlängert sich dann der Draht  $MN$ , und das Gewicht  $P$  zieht die linke Seite des Spiegel nieder. Der Draht  $K$  hebt sich dabei ein wenig, bleibt aber immer noch mit dem Quecksilber in Berührung, weil die Bewegungen des Wagebalkens nur sehr gering sind. Um nun diese Aenderungen in der Stellung des Wagebalkens mit Genauigkeit zu messen, ist der Spiegel  $F$  angebracht, der ebenso wie bei dem Magnetometer dient, um eine in größerer Entfernung vertikal gestellte Scale  $AK$  (Fig. 8, Taf. III) mittelst des Fernrohrs  $LA$  zu beobachten. Mittelst der Schraube  $S$  stellt man vor dem Anfange der Versuche den Wagebalken so, daß der mit der Axe des Fernrohrs in einer Höhe liegende Theilstrich  $A$  (Fig. 8) gerade auf dem horizontalen Faden des Fernrohrs erscheint.

Die ganze in Fig. 7 in halber Gröfse abgebildete Vorrichtung habe ich einfach an der hölzernen Bekleidung einer Thür  $A'B'$  befestigt. Der messingene Fuß  $W'R$  des obern Theiles ist mit vier Schrauben auf dem Holzstücke  $V'R''$  und dieses wieder durch zwei starke Schrauben  $S', S''$  an der erwähnten hölzernen Bekleidung der Thür befestigt. Auf ähnliche Weise ist auch der untere Theil  $OSTU$  mittelst seines Fußes  $YU'$  durch vier Schrauben mit dem Holzstück  $Y'Z'Z''$ , und dadurch mittelst der beiden Schrauben  $S''', S''''$  mit der hölzernen Bekleidung der Thür verbunden. Man wählt den Ort des untern Theiles so, daß die Schraube  $O$  sich vertikal unter dem Punkte  $E$  befindet und der ausgespannte Draht  $MN$  senkrecht gegen den Hebelarm  $CE$  wirkt.

Bei den ersten Versuchen, welche ich mit diesem Instrumente anstellte, wehte ein sehr heftiger Wind, der auch durch die Spalten der Thür hindurchdrang und in dem in der Nähe befindlichen Drahte Temperaturveränderungen erzeugt, die wenn gleich unbedeutend, sich doch bei der

der Beobachtung der Scale im Fernrohre noch bemerklich machten. Vergrößert wurden übrigens damals diese Veränderungen durch die starke Ungleichheit zwischen der Temperatur der äußern Luft und der Luft in dem Zimmer; jene war nämlich weit unter dem Gefrierpunkt des Wassers, während die letztere künstlich durch die Heizung des Zimmers erhöht war. Um nun auch unter solchen Verhältnissen gute Beobachtungen machen zu können, umgab ich den Draht *MN* mit einer pappenen Auszugsröhre (von ungefähr 1 bis  $1\frac{1}{2}$  Zoll Weite) eines alten langen Fernrohrs, das mir gerade zur Hand lag. Die untere Oeffnung des Rohres verstopfte ich neben dem Drahte lose durch ein wenig lockere Baumwolle. Das pappene Rohr reicht von *N* bis unter das Holzstück *VR'R''*. Auf diese Weise konnte die Bewegung und Stellung des Drahtes ohne Hinderniss geschehen, und die vorher bemerkten Schwankungen des Wagebalkens in Folge augenblicklicher Temperaturwechsel hörten gänzlich auf. Ich habe auch später diese Bedeckung des Drahtes gelassen, da sie keine weitere Unbequemlichkeit erzeugte; in einem nicht geheizten, gegen Zugwind gut schützten Zimmer wird eine solche Umhüllung des Drahtes nicht nöthig seyn.

Da Neusilber unter den in Drahtform vorhandenen Metallen dem elektrischen Strom den größten Widerstand entgegensetzt, so spannte ich zunächst einen Neusilberdraht *MN* zwischen den beiden Schrauben *J* und *J'* aus. Der dünnste Neusilberdraht, den ich besaß, hatte einen Durchmesser von  $0,4575^{\text{mm}}$ , und wurde, da er durch frühere anderweitige Versuche etwas verbogen war, zuvor durch eine Vorrichtung, wie sie die Nadler zur Geradrichtung ihrer Drähte gebrauchen, hindurchgezogen. Die Länge des ausgespannten Drahtes betrug  $1611^{\text{mm}}$ , und das spannende Gewicht  $564^{\text{gm}}$ .

Um den Beweis zu führen, daß das eben beschriebene Instrument zur genauen Messung elektrischer Ströme in der That brauchbar ist, theile ich hier die zuletzt mit demselben gemachte Versuchsreihe ausführlich mit. Es wurde dabei der Strom zweier Grove'schen Platinelemente durch

den Neusilberdraht  $MN$  geleitet; der Strom hatte aber ausser diesem Neusilberdraht noch andere Drähte zu durchlaufen. Vor dem Eintritt des Stromes in den Neusilberdraht war aber auf einem aus Kupfer bestehenden Theile eines der Zuleitungsdrähte eine Nebenschließung angebracht, die einen Theil des Stroms zu einer nach der von Poggen-dorff angegebenen Einrichtung construirten Sinusboussole leitete, um hier einen Ausschlag der Magnetnadel zu bewirken. Es wurden dann die Ausschläge des Wagebalkens  $AB$  auf der Scale  $AK$  (Fig. 8) mittelst des Fernrohrs und die Stellung der Sinusboussole entweder bei Gegenwart zweier Beobachter gleichzeitig oder bald nach einander (wenn ich allein die Versuche anstellte) abgelesen. Vor und nach jedem einzelnen Versuche wurde genau der Stand, wie er ohne elektrischen Strom war, sowohl der Magnetnadel als auch des Wagebalkens beobachtet. In der gleichfolgenden Mittheilung wechseln also stets Angaben der Ausschläge bei vorhandenem elektrischen Strome mit Angaben der ursprünglichen Ruhelagen ohne Strom ab. In denselben wurden beide Instrumente von mir allein beobachtet, und auch alle sonstigen Veränderungen von mir allein besorgt. Es konnten deshalb die Versuche nicht schneller auf einander folgen, als es die bemerkte Zeit angiebt, zumal da ich bei der Beobachtung des Standes des Wagebalkens eine günstige Zeit abwarten mußte. Durch die Erschütterungen, welche das ganze ziemlich leicht gebaute Haus durch das Gehen eines Menschen selbst in entfernteren Zimmern erlitt, gerieth nämlich auch der Spiegel in kleine Schwankungen; es gab aber meistens innerhalb einiger Minuten doch mehrere Sekunden, in welchen derselbe, wenn nicht ganz, doch ziemlich ruhig stand; vorbeifahrende Wagen setzten die Nadel der Sinusboussole und den Spiegel in heftige Schwankungen. Des Abends nach 10 Uhr war der Spiegel vollkommen ruhig; ich versuchte deshalb einmal um diese Zeit eine Beobachtungsreihe auszuführen, erhielt jedoch auch diesmal, freilich aus einem ganz andern Grunde, kein Resultat. Es war nämlich der Stand der Magnetnadel der Sinusboussole fortwährend so veränderlich,

dafs sie ihre Stellung (ohne Strom) in kurzer Zeit um mehr als 7 Minuten änderte, wahrscheinlich in Folge eines Nordlichtes, denn die ganze Erscheinung war genau dieselbe, nur schwächer als diejenige am 17. December, wo ich ebenfalls am Abend von 6 Uhr an Messungen mit der Sinusboussole machte und auf das Daseyn eines Nordlichtes zuerst durch die starken Aenderungen des Standes der Magnetonadel aufmerksam wurde. Ich zog es also vor, die Messungen doch am Tage und lieber in etwas längeren Zwischenzeiten auszuführen, was um so eher anging, da die Kette, wie man sieht, ziemlich constant war. Um dieser constanten Wirkung sicher zu seyn, wurden auch zwei Elemente angewendet; zur Schwächung ihrer Kraft bedurfte es aber auch eines gröfseren Widerstandes.

Die erste der folgenden horizontalen Reihen enthält also die ursprüngliche Stellung beider Vorrichtungen ohne Strom, die zweite die Stellung mit Strom, die dritte wieder ohne Strom u. s. f.

Beobachtungen der Sinusboussole.	Beobachtungen der Scale im Spiegel.	Zeit.
359° 8'	192,2	2 <sup>h</sup> 56'
345 40	548,5	3 0
359 8	192,5	3 4½
345 41	549,0	3 9
359 9	193,0	3 15
348 13	436,3	3 19
359 9	193,3	3 23
348 16	435,0	3 27
359 11	193,4	3 31
351 15	324,7	3 36
359 12	193,2	3 40
351 17	324,0	3 44
359 11	193,2	3 48
353 29	263,0	3 53
359 11	193,2	3 57
353 30	262,5	4 1
359 12	193,2	4 6
355 36	221,5	4 10
359 12	192,7	4 14
355 36	221,2	4 18
359 13	192,5	4 22
		14 *

Aus vorstehenden Versuchsreihen ergeben sich die einander entsprechenden beobachteten Werthe der Ausschläge beider Instrumente durch den Strom mittelst Subtraction des arithmetischen Mittels aus je zwei auf einander folgenden beobachteten Werthen ohne Strom von dem beobachteten Werthe bei vorhandenem Strome. Man erhält als entsprechende Ausschläge:

Winkel, um welche die Sinusboussole gedreht wurde.	Scalentheile, um welche der Wagebalken seine Lage änderte.
13° 28'	356,2
13° 27½'	356,2
10° 56'	243,2
10° 54'	242,7
7° 56½'	131,4
7° 54½'	130,8
5° 42'	69,8
5° 41½'	69,3
3° 36'	28,6
3° 36½'	28,6

Da je zwei Beobachtungen nahe gleich sind, so kann man aus ihnen wohl das arithmetische Mittel ohne erheblichen Fehler nehmen, und erhält also die folgenden fünf zusammengehörigen Werthe:

Winkel, um welche die Sinusboussole gedreht wurde.	Scalentheile, um welche der Wagebalken seine Lage änderte.
13° 27¾'	356,2
10° 55'	242,9
7° 55½'	131,1
5° 41¾'	69,5
3° 36½'	28,6

Die Vergleichung der vorstehenden Werthe mit einander hat keine Schwierigkeit. Es sey Fig. 8, Taf. III  $DN$  der ausgespannte Neusilberdraht, durch welchen der elektrische Strom hindurchgeht; in Folge des letztern möge er sich verlängern zu  $ND'$ . Bei der Länge des Drahtes (sie betrug 1611<sup>mm</sup>.) kann man dann ohne Fehler  $MD'$  für die Verlängerung desselben ansehen. Es sey ferner  $C$  der Drehpunkt des Wagebalkens  $BD$ , und  $E$  und  $D$  die Verbin-

dungspunkte desselben mit dem Gewichte  $P$  und dem Drahte  $EC = CD = c$ . Wird der Winkel  $DCD'$ , um welchen sich der Wagebalken durch die Verlängerung  $D'M$  des Drahtes bewegt,  $= \varphi$  gesetzt, so ist diese Verlängerung  $MD' = CD' \sin \varphi = CD \sin \varphi = c \sin \varphi$ . Diese Verlängerungen dienen nun als Maafs für den elektrischen Strom, welcher sie erzeugt, und es ist die Aufgabe, sie mit Genauigkeit zu messen.

Befände sich der Spiegel  $F$  in der Drehungsaxe  $C$  des Wagebalkens anstatt in  $F$ , so würde bei der Drehung des Wagebalkens um den Winkel  $\varphi$  der Punkt  $H'$  in dem Fernrohre erscheinen, d. h. derjenige Punkt, für welchen der Winkel  $G'CH' =$  dem Winkel  $ACG'$  wäre; denn die Richtung des Wagebalkens  $B''D'$  steht senkrecht auf der Spiegelfläche, und ihre Verlängerung  $B''G'$  würde folglich das Einfallslloth darstellen. Da aber der Spiegel sich um  $CB = b$  von der Axe  $C$  entfernt befindet, so erscheint bei dem Ausschlage des Wagebalkens um den Winkel  $\varphi$  nicht der Punkt  $H'$ , sondern der Punkt  $H$  im Fernrohr, der so gelegen ist, daß die Linie  $GB$ , welche parallel mit  $G'C$  gezogen ist, das Einfallslloth für die Strahlen  $HB'$  und  $AB'$  bildet, oder daß der Winkel  $AB'G = GB'H$  ist. Die Ausschläge des Instrumentes werden also durch die excentrische Aufstellung des Spiegels verkleinert, und man muß, um aus dem beobachteten Scalentheile  $H$  denjenigen  $H'$ , wie er ohne die Excentricität des Spiegels beobachtet worden wäre, zu berechnen, zu der Länge  $AH$  noch die Länge  $HH'$  hinzufügen. Da die Linie  $HB'$  parallel ist mit  $H'C$ ,

so verhält sich  $HH' : B'C = AH : AB'$ ; oder  $HH' : \frac{b}{\cos \varphi} = AH : a - \frac{b}{\cos \varphi}$ , wenn  $a$  die Entfernung  $AC$  der Scale von der Drehaxe  $C$  bezeichnet.  $B'C$  ergibt sich aus dem

Dreiecke  $B'B''C$  als  $\frac{b}{\cos \varphi}$ . Es ist also  $HH' = \frac{AH \cdot b}{\cos \varphi \left\{ a - \frac{b}{\cos \varphi} \right\}}$

Da nun in vorstehenden Versuchen der Winkel  $\varphi$  sehr klein, und die ganze Correction überhaupt wegen der Größe



von  $a$  im Verhältniß zu  $b$  nur unbedeutend ist, so wird man  $\cos \varphi = 1$  setzen können, und erhält dann  $IIH = \frac{AH \cdot b}{a - b}$ . Die Scale  $AK$  war eine solche, wie sie zu den Magnetometerbeobachtungen gebraucht werden, also in Millimeter getheilt. Der Abstand der Scale von der Drehaxe des Spiegels, also  $AC$  oder  $a$  war  $= 4325,6$  Millimeter, und der Abstand des Spiegels von Drehaxe  $BC$  oder  $b$  betrug  $21,2$  Millimeter.  $\frac{b}{a - b}$  ist also  $0,0049$  oder kürzer  $0,005$ . Mit dieser Zahl muß die Anzahl der beobachteten Scalentheile multiplicirt und das so erhaltene Product zu der Anzahl der beobachteten Scalentheile addirt werden, um den Werth von  $AH'$  zu erhalten;  $AH' = AH + \frac{AH \cdot b}{a - b}$  oder  $AH' = AH \left\{ 1 + \frac{b}{a - b} \right\}$  oder  $= \frac{AH \cdot a}{a - b}$ . Die Correctionen betragen demnach für  $356,2$  Scalentheile  $1,8$  Scalentheil; für  $242,9$  Scth.  $1,2$  Scth.; für  $131,1$  Scth.  $0,6$  Scth.; für  $69,5$  Scth.  $0,3$  Scth.; für  $28,6$  Scth.  $0,1$  Scth.

Die auf diese Weise corrigirten Werthe von  $AH'$  sind aber nicht die Tangenten von  $\varphi$ , sondern die Tangenten von  $2\varphi$ ; es müßten deshalb aus den Tangenten des doppelten Winkels erst die Tangenten des einfachen Winkels hergeleitet werden. In den vorstehenden Fällen ist eine solche Rechnung aber überflüssig; denn da die Ausschlagwinkel so gering sind, so wachsen die Tangenten der doppelten Winkel proportional den Tangenten der einfachen Winkel, und man kann diese Werthe von  $AH'$  gleich so ansehen, als gehörten sie nicht zu einem Kreise, dessen Radius  $a$ , sondern  $2a$  ist.

In jedem Falle läßt sich, wenn es gewünscht wird, der Winkel  $\varphi$  finden, um welchen der Wagebalken gedreht worden ist, wenn der Ausschlag auf der Scale  $AH$  beträgt; ist dann  $\varphi$  bekannt, so kann die Verlängerung des Drahtes  $c \sin \varphi$  sofort berechnet werden. In dem vorliegenden Falle sind aber einmal, wie schon erwähnt, die Ausschlags-

winkel sehr klein, und zweitens kommt es nicht auf eine absolute Messung dieser Verlängerungen an; es genügt die Kenntniß von Gröſsen, welche mit diesen Verlängerungen proportional sind. Bei den vorliegenden Messungen, wo der größte Ausschlagswinkel wenig über  $2^\circ$  beträgt, kann man ohne erheblichen Fehler die Tangenten und Sinus mit einander verwechseln; man darf also die abgelesenen Scalentheile den Verlängerungen des Drahtes sogleich proportional setzen. Diese Verlängerungen, oder die ihnen proportionalen Scalentheile sollen nun, wie schon angeführt, zur Messung der elektrischen Ströme dienen.

Werden die vorstehend erwähnten Correctionen an den beobachteten Scalentheilen angebracht, so sind die zusammengehörigen Werthe, zwischen welchen eine Beziehung gesucht werden soll:

Sinusboussole.	Scalentheile.
$13^\circ 27\frac{3}{4}'$	358,0
$10^\circ 55'$	244,1
$7^\circ 55\frac{1}{2}'$	131,7
$5^\circ 41\frac{1}{2}'$	69,8
$3^\circ 36\frac{1}{4}'$	28,7

Es mag für jetzt dahin gestellt bleiben, ob die Verlängerung des Drahtes durch den elektrischen Strom nur in Folge der erzeugten Wärme entstanden sey, oder auch noch in Folge einer Verringerung der Elasticität. In beiden Fällen ist diese Ausdehnung von der Richtung des Stromes, ob er den Draht von oben nach unten oder von unten nach oben durchdringt, unabhängig. Wenn man also die Scalentheile als Functionen der Stromintensität betrachtet, so dürfen letztere nur mit geraden Potenzen in diesen Functionen erscheinen, um unabhängig von der Richtung zu werden. Lenz hat auch schon in diesen Annalen Bd. 61, S. 18 nachgewiesen, daß die Erwärmung der Drähte zunimmt genau mit dem Quadrat der Stromstärke. Bedeutet also  $n$  die Anzahl der beobachteten Scalentheile, und  $x$  die Stromstärke, so ist hiernach  $n = ax^2$ , wo  $a$  eine nach den verschiedenen Umständen zu bestimmende Constante ist. Da aber bei den oben mitgetheilten Versuchen der Draht

einen Theil der Wärme nach aufsen ausstrahlt, so wird  $n$  nicht mit  $x^2$  proportional gehen, sondern mit  $x^2$  verringert um eine bestimmte von  $x^2$  abhängige Gröfse, also mit  $x^2 [1 - bx^2]$ , so dafs  $n = ax^2 [1 - bx^2]$ . Es wird sich sogleich zeigen, dafs diese Formel wirklich die zwischen  $n$  und  $x$  vorhandenen Beziehungen mit hinreichender Genauigkeit darstellt.

Bei einer ganz andern Anordnung <sup>1)</sup> des obigen Apparates waren z. B. folgende Werthe an der Sinusboussole und im Spiegel beobachtet.

Sinusboussole.	Scalentheile.
10° 51'	76,04
8° 48'	51,57
6° 54'	32,62
4° 59'	17,39
3° 9'	7,09

Die Scalentheile sind hier schon wegen der Excentricität corrigirt. Jeder Versuch ist das Mittel aus vier einander sehr nahe stehenden. Bei der Sinusboussole wächst der Strom bekanntlich mit dem Sinus der Drehungen des Instrumentes. Es ist also die Stromstärke  $x$  in diesem Falle proportional mit dem  $\sin y$ , wenn  $y$  den vorstehenden Drehungswinkel bedeutet. Die obige Formel wird also  $n = a \sin^2 y [1 - b \sin^2 y]$ . Werden die Constanten  $a$  und  $b$  dieser Formel aus den zuletzt angegebenen Werthen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so ergiebt sich  $a = 2336$  und  $b = 2,3127$ . Es ist also  $n = 2336 \sin^2 y [1 - 2,3127 \sin^2 y]$ . Werden die zuletzt angeführten Werthe von  $y$  in diese Formel eingesetzt, und  $n$  für diese verschiedenen Stromstärken berechnet, so erhält man

Beobachtet.	Berechnet.	Differenz.
76,04	75,99	+ 0,05
51,57	51,69	- 0,12

- 1) Andere Scale, andere Entfernung derselben. Die Scalentheile betragen etwas mehr als 2<sup>mm</sup>, der Abstand der Scale vom Spiegel betrug nur 2587<sup>mm</sup>. Das zu diesen Versuchen angewandte Fernrohr vergrößerte ungefähr 10 Mal, während das zu den oben mitgetheilten Versuchen angewandte 24 Mal vergrößerte. Ich theile gerade diese Versuchsreihe hier noch mit, weil sie in einem gleichmäfsig geheizten Zimmer angestellt wurde.

Beobachtet.	Berechnet.	Differenz.
32,62	32,60	+0,02
17,39	17,32	+0,07
7,09	6,98	+0,11

Man sieht, daß die Rechnung die beobachteten Werthe genau genug wiedergiebt. Der Ueberschrift dieser Mittheilung zufolge soll aber jetzt nicht  $n$  aus  $x$ , sondern umgekehrt  $x$  aus  $n$  berechnet werden; es muß also die biquadratische Gleichung  $n = ax^2 - abx^4$  in Bezug auf  $x$  aufgelöst werden. Setzt man  $x^2 = z$ , so wird sie  $n = az - abz^2$ ,

also nur quadratisch; man erhält  $z = \frac{a}{2b} - \frac{a}{2b} \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2} n}$  und

$$x = \sqrt{z} = \sqrt{\frac{a}{2b} - \frac{a}{2b} \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2} n}}, \text{ oder wenn man } \frac{a}{2b} =$$

$$A \text{ und } \frac{4b}{a^2} = B \text{ setzt, } x = \sqrt{A - A \sqrt{1 - Bn}} = \sqrt{A(1 - \sqrt{1 - Bn})}$$

$= \sqrt{A} \sqrt{1 - \sqrt{1 - Bn}}$ . Für die oben in aller Vollständigkeit mitgetheilte Versuchsreihe waren für diese Constanten  $A$  und  $B$  schon von einer andern Seite her die Näherungswerthe  $A = 0,31160$  und  $B = 0,00081606$  bekannt. Um nun mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate die nöthigen Correctionen  $\Delta A$  und  $\Delta B$  für die vorstehenden Werthe zu finden entwickle man den Ausdruck  $x =$

$\sqrt{A + \Delta A} \sqrt{1 - \sqrt{1 - (B + \Delta B)n}}$  nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von  $\Delta A$  und  $\Delta B$ , und behalte nur die ersten Potenzen bei; man erhält dann

$$x - \sqrt{A} \sqrt{1 - \sqrt{1 - Bn}} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - Bn}}}{2\sqrt{A}} \Delta A + \frac{\sqrt{A} \cdot n}{4\sqrt{1 - \sqrt{1 - Bn}} \sqrt{1 - Bn}} \Delta B.$$

Berechnet man nun mit Hülfe der zusammengehörigen Werthe von  $x$  und  $n$ , und den vorstehend angegebenen Näherungswerthen von  $A$  und  $B$  die obige Gleichung, so erhält man die fünf Gleichungen, in welchen statt der Zahlen ihre Logarithmen hingeschrieben sind.

$$0,47712 - 5 = 0,53248 - 1. \Delta A + 2,19335. \Delta B.$$

$$-0,01734 - 4 = 0,44305 - 1. \Delta A + 2,08967. \Delta B.$$

1) Das positive Zeichen vor der Wurzel ist nicht zu gebrauchen.

$$\begin{aligned}
&0,67799 - 4 = 0,30346 - 1. \Delta A + 1,93773. \Delta B. \\
&- 0,04672 - 4 = 0,16264 - 1. \Delta A + 1,79084. \Delta B. \\
&- 0,79439 - 4 = 0,96814 - 2. \Delta A + 1,59180. \Delta B.
\end{aligned}$$

Bestimmt man aus diesen fünf Gleichungen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von  $\Delta A$  und  $\Delta B$ , so erhält man  $\Delta A = -0,0020952$  und  $\Delta B = 0,0000046458$ . Es wird also der wahrscheinlichste Werth von  $A = 0,34160 - 0,0020952$  und von  $B = 0,00081606 + 0,0000046458$ , oder  $A = 0,33950$ , und  $B = 0,00082069$ , oder  $\log. A = 0,53081 - 1$ ,  $\log. \sqrt{A} = 0,76542 - 1 = \log. 0,58267$ , und  $\log. B = 0,91418 - 4$ . Es wird also

$$x = 0,58267 \sqrt{1 - \sqrt{1 - 0,00082069 \cdot n}}.$$

Werden nach dieser Formel die Werthe von  $x$  aus den zugehörigen Werthen von  $n$  berechnet, und, da  $x = \sin y$ , der Winkel gesucht, dessen Sinus  $= x$  ist, so erhält man:

Beobachtete Drehungen der Sinusboussole.	Berechnete nach vorstehender Formel.	Differenz.
13° 27 $\frac{1}{4}$ '	13° 27 $\frac{1}{4}$ '	0'
10° 55'	10° 55 $\frac{1}{2}$ '	- $\frac{1}{2}$ '
7° 55 $\frac{1}{4}$ '	7° 54'	+ 1 $\frac{1}{2}$ '
5° 41 $\frac{1}{4}$ '	5° 42 $\frac{1}{4}$ '	- $\frac{1}{4}$ '
3° 36 $\frac{1}{4}$ '	3° 38'	- 1 $\frac{1}{4}$ '

Es giebt also die vorstehende Formel die gemessenen Werthe mit aller wünschenswerthen Genauigkeit wieder. In Betreff der letztern sey noch bemerkt, daß der Nonius der Sinusboussole 2' anzeigt, daß man aber bei Uebung und bei Abwesenheit aller fremdartigen Störungen noch 1' recht gut schätzen kann, wie solches auch aus den obigen Beobachtungen hervorgeht. Daß dieser Werth von 1' als Fehler hier überschritten wird, hat seinen Grund einmal in zufälligen Störungen (Erschütterungen durch Wagen u. s. w.), welche die Sinusboussole selbst trafen, und zweitens darin, daß bei dieser letzten Rechnung die Beobachtungen der Scalentheile als völlig genau angenommen wurde, eine Voraussetzung, die bei den Störungen, welche, wie schon erwähnt, den Wagebalken und Spiegel in noch höherem Maasse als die Sinusboussole trafen, nicht gerechtfertigt ist. Hätte man eine weitläufige Rechnung vornehmen wollen,

um die Fehler auf jedes Instrument zu vertheilen, so hätten sich die Werthe noch genauer darstellen lassen. Es möchte aber das Mitgetheilte vollkommen zum Beweise der Brauchbarkeit des beschriebenen Instrumentes genügen.

Man hat also, um aus den Angaben dieses Instrumentes die Intensitäten der elektrischen Ströme herzuleiten, eigentlich nur zwei Beobachtungen nöthig, um mittelst derselben die Constanten  $A$  und  $B$  zu bestimmen. Was die Schnelligkeit der Angaben des Instrumentes betrifft, so erreicht es bei der Schließung der Kette nicht augenblicklich seinen höchsten Stand; es rückt anfangs sehr rasch, nachher aber langsamer vor. Viel mehr Zeit gebraucht es namentlich bei nicht zu starken Strömen auch nicht, als man nöthig hat, um die Nadel der Sinusboussole zu beruhigen, und die Messung an dieser zu vollenden. Gewöhnlich fand ich den Spiegel bei den vorher mitgetheilten Versuchsreihen schon auf seinem höchsten Stande angekommen, wenn ich nach Vollendung der Messung mit der Sinusboussole zum Fernrohr trat. Die Abkühlung oder die Rückkehr des Spiegels nach der Aufhebung des Stromes geschieht anfangs rasch, zuletzt aber langsamer, und ist je nach der Stärke der vorhanden gewesenen Ströme nach 1, 2 bis 3 Minuten vollendet. Die Empfindlichkeit des Instrumentes bei Aenderungen der Stromintensität ist um so größer, da die Ausschläge nahe mit dem Quadrat der Stromintensität proportional gehen. Die Scale bewegt sich nie so rasch, daß man nicht die Scalentheile am horizontalen Faden jeder Zeit bestimmen könnte, und man kann mit diesem Instrumente auch Ströme messen, deren Intensitäten auf- und abschwanken, bei denen es unendlich schwer hält, z. B. an der Sinusboussole nur einen ungefähren Mittelwerth zu erhalten. Ein Vortheil ist es gewiß auch, daß das Instrument gleich gut alle elektrischen Ströme mißt, gleichgültig ob sie ihre Richtung unverändert beibehalten, oder in beliebig kleinen oder großen Intervallen dieselbe unausgesetzt ändern. Ja selbst die Entladung einer mit der Reibungselektricität geladenen Flaschenbatterie läßt sich ohne Einschaltung eines nassen Fa-

dens oder dergleichen Hindernisse messen, indem man die durch den Entladungsschlag bewirkte Veränderung des Spiegels recht gut ablesen kann, bevor er wieder zurückzukehren beginnt. In dieser letztern Beziehung (mit Reibungselektricität) habe ich indess bis jetzt nur einige vorläufige Versuche gemacht. Um ohne Mühe sofort aus den Angaben dieses Instrumentes die Stärke der elektrischen Ströme zu erhalten, wird man sich ein für alle Mal eine Hülftafel berechnen.

Es leuchtet wohl auch ohne weitere Erläuterungen ein, daß die beschriebene Vorrichtung auch umgekehrt dienen kann, um eine Reihe von Fragen über den Einfluß des elektrischen Stromes auf die verschiedenen Leiter, und selbst aus der Wärmelehre zu beantworten, da die Genauigkeit der Angaben durch das Vorhergehende hinreichend festgestellt ist. Ein weiteres Eingehen hierauf, oder was zum Theil damit gleichbedeutend ist, auf die Bedeutung der Constanten der obigen Gleichungen behalte ich einer späteren Mittheilung vor; die gegenwärtige hatte nach ihrer Ueberschrift nur den Zweck, die Tauglichkeit dieses Instrumentes zur Messung elektrischer Ströme nachzuweisen.

#### IV. *Die elektromotorische Kraft ist der elektroskopischen Spannung an den Polen der geöffneten Kette proportional; von R. Kohlrausch.*

##### § 1.

Die Richtigkeit der in der Ueberschrift aufgestellten Behauptung ist gewiß von den meisten Physikern stillschweigend angenommen worden, obschon eine directe Bestätigung derselben wegen der Unvollkommenheit der Meßwerkzeuge nicht versucht werden konnte. Mit dem Dellmannschen Elektrometer und dem im vorigen Aufsätze angegebenen Condensator <sup>1)</sup> ist man nun im Stande, die Nachwei-

1) Siehe S. 88 dieses Bandes.