

# RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ

PAR MICHAEL ROBERTS.

J'ai publié dans quelques Mémoires insérés dans le « *Quarterly Journal of Mathematics* » un examen des propriétés principales des fonctions fondamentales des différences des racines d'une équation du cinquième degré, quand ces fonctions sont exprimées par les coefficients de l'équation. Dans l'article actuel je me propose de les considérer sous un autre rapport, savoir, quand on les regarde comme dépendant immédiatement des racines elles-mêmes. Ces deux manières de les envisager sont nécessaires pour avoir une connaissance parfaite du sujet dont il s'agit, et nous conduisent aux résultats qu'il serait pénible de trouver par d'autres moyens.

Si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sont les racines de l'équation

$$a_0 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

on sait qu'on a

$$\begin{aligned} a_0^2 \{ (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 \} &= 24(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2), \\ a_0^3 \{ (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) \} \times \{ (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\gamma - \beta) \} \times \{ (\alpha - \beta)(\delta - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\delta - \beta) \} \\ &= -432(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3). \end{aligned}$$

Je vais maintenant chercher des résultats semblables pour l'équation du cinquième degré

$$a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0$$

et d'abord je rappellerai le tableau suivant de fonctions des différences des racines de cette équation, qui se trouve dans mes anciens Mémoires,

$$H = a_1^2 - a_0 a_2, \quad I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \quad J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,$$

$$K = 4(a_0 a_4 - 4(a_1 a_3 + 3a_2^2)(a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2) - (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3))$$

$$L = a_0^2(a_4^2 - a_3 a_5) + 3a_0 a_1(a_2 a_5 - a_3 a_4) + 4a_0 a_2(a_3^2 - a_2 a_4) + 2a_1^2(a_3^2 - a_1 a_5) + 5a_1^2 a_2 a_4 + 3a_2^4 - 8a_1 a_2^2 a_3,$$

$$R = 12a_1^2 a_2 a_3 a_5 + 15a_1^2 a_2 a_4 a_3^2 - 10a_1^2 a_3^2 a_4 + 20a_1 a_2 a_3^3 - 8a_0 a_1 a_3^2 a_5 - 30a_1 a_2^2 a_3 a_4$$

$$+ 2a_0 a_1 a_3 a_4^2 - 6a_1 a_2^3 a_5 - 10a_2^3 a_3^2 + 2a_0 a_2^2 a_3 a_5 + 15a_2^4 a_4 - 14a_0 a_2^3 a_4^2 - 6a_1^3 a_4 a_5$$

$$+ 4a_0 a_1 a_2 a_4 a_5 + 22a_0 a_2 a_3^2 a_4 + 2a_0^2 a_3 a_4 a_5 - a_0^2 a_4^3 + a_0 a_1^2 a_5^2 - a_0^2 a_2 a_5^2 - 9a_0 a_3^4,$$

$$T = (a_0 a_2 a_5 - a_0 a_3 a_4 - a_1^2 a_5 + a_1 a_3^2 + a_1 a_2 a_4 - a_2^2 a_3)^2$$

$$- 3(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3)(a_0 a_3 a_5 - a_0 a_4^2 - a_1 a_2 a_5 + a_1 a_3 a_4 + a_2^2 a_4 - a_2 a_3^2).$$

Toutes ces fonctions sont liées par les équations suivantes

$$a_0 R = I^3 - 9J^2 - 2IL - HK, \quad a_0 T = RH + (3L - I^2)J$$

$$L^2 = 4HT + K(HI + a_0 J) + I(12J^2 + 2IL - I^3).$$

Si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  sont les racines de l'équation dont il s'agit, posons

$$I_1 = (\beta - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\beta - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\beta - \epsilon)^2(\gamma - \delta)^2$$

$$I_2 = (\alpha - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\alpha - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\alpha - \epsilon)^2(\gamma - \delta)^2$$

$$I_3 = (\alpha - \beta)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \epsilon)^2 + (\alpha - \epsilon)^2(\beta - \delta)^2$$

$$I_4 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \epsilon)^2 + (\alpha - \epsilon)^2(\beta - \gamma)^2$$

$$I_5 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2$$

et l'on trouve facilement la relation suivante

$$a_0^2(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = 200I \quad (1)$$

Posons encore

$$J_1 = \{(\beta - \delta)(\gamma - \epsilon) + (\beta - \epsilon)(\gamma - \delta)\} \times \{(\beta - \gamma)(\delta - \epsilon) + (\beta - \epsilon)(\delta - \gamma)\} \times \{(\beta - \gamma)(\epsilon - \delta) + (\beta - \delta)(\epsilon - \gamma)\}$$

$$J_2 = \{(\alpha - \delta)(\gamma - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\gamma - \delta)\} \times \{(\alpha - \gamma)(\delta - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\delta - \gamma)\} \times \{(\alpha - \gamma)(\epsilon - \delta) + (\alpha - \delta)(\epsilon - \gamma)\}$$

$$J_3 = \{(\alpha - \delta)(\beta - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\beta - \delta)\} \times \{(\alpha - \beta)(\delta - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\delta - \beta)\} \times \{(\alpha - \beta)(\epsilon - \delta) + (\alpha - \delta)(\epsilon - \beta)\}$$

$$J_4 = \{(\alpha - \gamma)(\beta - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\beta - \gamma)\} \times \{(\alpha - \beta)(\gamma - \epsilon) + (\alpha - \epsilon)(\gamma - \beta)\} \times \{(\alpha - \beta)(\epsilon - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\epsilon - \beta)\}$$

$$J_5 = \{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)\} \times \{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)\} \times \{(\alpha - \beta)(\delta - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\delta - \beta)\}$$

et l'on a

$$a_0^3(J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) = -6000J \quad (2)$$

Partageons maintenant les racines  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  en cinq groupes contenant chacun

quatre racines distinctes; en ne considérant que le groupe  $(\beta, \gamma, \delta, \epsilon)$  formons avec ces racines et la racine qui reste  $(\alpha)$  un terme  $(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2$  : il est clair que six tels termes existent, dont la somme en désignant par  $N_1$  on peut écrire

$$N_1 = (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\alpha - \beta)^2(\alpha - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\alpha - \beta)^2(\alpha - \epsilon)^2(\gamma - \delta)^2 \\ + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \epsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \epsilon)^2(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\alpha - \epsilon)^2(\beta - \gamma)^2.$$

En traitant successivement d'une manière semblable les autres groupes, on peut former les fonctions  $N_2, N_3, N_4, N_5$ , qui en vertu de la loi de leur formation deviennent

$$N_2 = (\beta - \alpha)^2(\beta - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\beta - \alpha)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\beta - \alpha)^2(\beta - \epsilon)^2(\gamma - \delta)^2 \\ + (\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\alpha - \epsilon)^2 + (\beta - \gamma)^2(\beta - \epsilon)^2(\alpha - \delta)^2 + (\beta - \delta)^2(\beta - \epsilon)^2(\alpha - \gamma)^2$$

$$N_3 = (\gamma - \alpha)^2(\gamma - \beta)^2(\delta - \epsilon)^2 + (\gamma - \alpha)^2(\gamma - \delta)^2(\beta - \epsilon)^2 + (\gamma - \alpha)^2(\gamma - \epsilon)^2(\beta - \delta)^2 \\ + (\gamma - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \epsilon)^2 + (\gamma - \beta)^2(\gamma - \epsilon)^2(\alpha - \delta)^2 + (\gamma - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2(\alpha - \beta)^2$$

$$N_4 = (\delta - \alpha)^2(\delta - \beta)^2(\gamma - \epsilon)^2 + (\delta - \alpha)^2(\delta - \gamma)^2(\beta - \epsilon)^2 + (\delta - \alpha)^2(\delta - \epsilon)^2(\beta - \gamma)^2 \\ + (\delta - \beta)^2(\delta - \gamma)^2(\alpha - \epsilon)^2 + (\delta - \beta)^2(\delta - \epsilon)^2(\alpha - \gamma)^2 + (\delta - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^2(\alpha - \beta)^2$$

$$N_5 = (\epsilon - \alpha)^2(\epsilon - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\epsilon - \alpha)^2(\epsilon - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 + (\epsilon - \alpha)^2(\epsilon - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 \\ + (\epsilon - \beta)^2(\epsilon - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2 + (\epsilon - \beta)^2(\epsilon - \delta)^2(\alpha - \gamma)^2 + (\epsilon - \gamma)^2(\epsilon - \delta)^2(\alpha - \beta)^2.$$

Les quantités  $N_1, N_2, \&c.$  sont requises pour déterminer la manière dont la fonction  $R$  s'exprime par les racines  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ . Cette fonction est unique : c'est-à-dire c'est la seule fonction, des différences des racines qui est du cinquième degré par rapport aux coefficients, et du douzième degré par rapport aux racines : tandis que le nombre des fonctions des différences des racines, du sixième degré par rapport aux coefficients et du douzième degré par rapport aux racines est indéfini. Ces dernières sont toutes représentées par la formule

$$\theta HK + \varphi IL + \psi I^3 + \chi J^2,$$

$\theta, \varphi, \psi, \chi$  étant des facteurs numériques quelconques. Or trouve donc

$$\alpha_0^5(J_1 N_1 + J_2 N_2 + J_3 N_3 + J_4 N_4 + J_5 N_5) = -2 \times 10^5 R.$$

$R$  est l'origine du covariant lineaire et si nous désignons par  $Rx + R'y$  ce covariant, on a

$$\alpha_0^5(\alpha J_1 N_1 + \beta J_2 N_2 + \gamma J_3 N_3 + \delta J_4 N_4 + \varepsilon J_5 N_5) = 2 \times 10^5 R'.$$

Si  $\alpha = \beta$ , on trouve

$$\alpha_0^5(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - \varepsilon)^2 \{ (\alpha - \gamma)^4(\delta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^4(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^4(\gamma - \varepsilon)^2 - (\gamma - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2 \} = -20000R.$$

Si  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = \delta$  alors

$$\alpha_0^5(\alpha - \gamma)^8(\gamma - \varepsilon)^2(\alpha - \varepsilon)^2 = -10000R, \quad \alpha_0^5\varepsilon(\alpha - \gamma)^8(\gamma - \varepsilon)^2(\alpha - \varepsilon)^2 = 10000R',$$

en sorte que si l'équation donnée a deux racines doubles, la racine simple ( $\varepsilon$ ) a pour valeur  $-\frac{R'}{R}$ .

Quant à la fonction L je trouve la formule suivante

$$1000(I^2 - 3L) = \alpha_0^4 \times \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2 \\ &+ (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \varepsilon)^2(\gamma - \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2 \\ &+ (\beta - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2 + (\beta - \delta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \varepsilon)^2(\gamma - \varepsilon)^2 \\ &+ (\beta - \varepsilon)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\gamma - \delta)^2(\alpha - \beta)^2(\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \varepsilon)^2 \\ &+ (\gamma - \varepsilon)^2(\alpha - \beta)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \delta)^2 + (\delta - \varepsilon)^2(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 \end{aligned} \right.$$

Si  $Ix^2 + 2I'xy + I''y^2$  est le covariant dont l'origine est la fonction I, on sait qu'on a

$$K = 4(I''^2 - I'^2)$$

K étant l'invariant du quatrième degré par rapport aux coefficients. Mais, en ayant égard à l'équation (1) on trouve

$$\begin{aligned} 200I' &= \alpha_0^2(\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3 + \delta I_4 + \varepsilon I_5) \\ 200I'' &= -\alpha_0^2(\alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3 + \delta^2 I_4 + \varepsilon^2 I_5) \end{aligned} \quad (3)$$

en sorte qu'on a

$$10^4 K = \alpha_0^4 \times \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - \beta)^2 I_1 I_2 + (\alpha - \gamma)^2 I_1 I_3 + (\alpha - \delta)^2 I_1 I_4 + (\alpha - \varepsilon)^2 I_1 I_5 + (\beta - \gamma)^2 I_2 I_3 \\ &+ (\beta - \delta)^2 I_2 I_4 + (\beta - \varepsilon)^2 I_2 I_5 + (\gamma - \delta)^2 I_3 I_4 + (\gamma - \varepsilon)^2 I_3 I_5 + (\delta - \varepsilon)^2 I_4 I_5 \end{aligned} \right.$$

d'où, en exécutant les multiplications indiquées on tire

$$10^4 K = \alpha_0^4(5P + 3Q)$$

ou

$$P =$$

$$\begin{aligned} &(\alpha - \beta)^2(\beta - \delta)^2(\delta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\varepsilon - \delta)^2(\delta - \alpha)^2 \\ &+ (\alpha - \beta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2(\beta - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2 \\ &+ (\alpha - \gamma)^2(\gamma - \beta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \delta)^2(\delta - \alpha)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\varepsilon - \beta)^2(\beta - \delta)^2(\delta - \alpha)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \beta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2 \\ &+ (\alpha - \delta)^2(\delta - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\gamma - \beta)^2(\beta - \delta)^2(\delta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2 + (\alpha - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \beta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\varepsilon - \alpha)^2, \end{aligned}$$

Q =

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2(\delta - \epsilon)^4 + (\alpha - \beta)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^4 \\ & + (\alpha - \beta)^2(\alpha - \epsilon)^2(\beta - \epsilon)^2(\gamma - \delta)^4 + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \epsilon)^2(\gamma - \epsilon)^2(\beta - \delta)^4 \\ & + (\alpha - \delta)^2(\alpha - \epsilon)^2(\delta - \epsilon)^2(\beta - \gamma)^4 + (\beta - \gamma)^2(\beta - \epsilon)^2(\gamma - \epsilon)^2(\alpha - \delta)^4 \\ & + (\beta - \delta)^2(\beta - \epsilon)^2(\delta - \epsilon)^2(\alpha - \gamma)^4 + (\gamma - \delta)^2(\gamma - \epsilon)^2(\delta - \epsilon)^2(\alpha - \beta)^4 \\ & + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\gamma - \delta)^2(\beta - \epsilon)^4 + (\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \epsilon)^4. \end{aligned}$$

Le théorie des invariants des formes binaires du cinquième degré nous fait voir que les quantités P et Q sont identiques, ce qui peut se démontrer aussi en nous appuyant sur la seule théorie des formes du quatrième degré : pour cela nous poserons  $\alpha - \beta = l$ ,  $\alpha - \gamma = m$ ,  $\alpha - \delta = n$ ,  $\alpha - \epsilon = p$  : l'expression P peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} & l^2 m^2 (n - p)^2 \{ (l - n)^2 (m - p)^2 + (l - p)^2 (m - n)^2 \} + \{ l^2 n^2 (m - p)^2 \{ (l - m)^2 (n - p)^2 + (l - p)^2 (m - n)^2 \} \\ & + l^2 p^2 (m - n)^2 \{ (l - m)^2 (n - p)^2 + (l - n)^2 (m - p)^2 \} + m^2 n^2 (l - p)^2 \{ (l - m)^2 (n - p)^2 + (l - n)^2 (m - p)^2 \} \\ & + m^2 p^2 (l - n)^2 \{ (l - p)^2 (m - n)^2 + (l - m)^2 (n - p)^2 \} + n^2 p^2 (l - m)^2 \{ (l - n)^2 (m - p)^2 + (l - p)^2 (m - n)^2 \} \end{aligned}$$

ou, en mettant  $F = (l - n)^2 (m - p)^2 + (l - p)^2 (m - n)^2 + (l - m)^2 (n - p)^2$ ,

$$\begin{aligned} F \{ l^2 m^2 (n - p)^2 + l^2 n^2 (m - p)^2 + l^2 p^2 (m - n)^2 + m^2 n^2 (l - p)^2 + m^2 p^2 (l - n)^2 + n^2 p^2 (l - m)^2 \} \\ - l^2 m^2 (l - m)^2 (n - p)^4 - l^2 n^2 (l - n)^2 (m - p)^4 - l^2 p^2 (l - p)^2 (m - n)^4 \\ - m^2 n^2 (m - n)^2 (l - p)^4 - m^2 p^2 (m - p)^2 (l - n)^4 - n^2 p^2 (n - p)^2 (l - m)^4, \end{aligned}$$

Maintenant si  $l, m, n, p$  sont les racines de l'équation

$$A_0 t^4 + 4A_1 t^3 + 6A_2 t^2 + 4A_3 t + A_4 = 0$$

on a

$$A_0^2 F = 24(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2)$$

et puisqu'on a

$$A_0^2 \{ (l - m)^2 + (l - n)^2 + (l - p)^2 + (m - n)^2 + (m - p)^2 + (n - p)^2 \} = 48(A_1^2 - A_0 A_2)$$

on tire

$$A_0^2 \{ l^2 m^2 (n - p)^2 + l^2 n^2 (m - p)^2 + l^2 p^2 (m - n)^2 + m^2 n^2 (l - p)^2 + m^2 p^2 (l - n)^2 + n^2 p^2 (l - m)^2 \} = 48(A_3^2 - A_2 A_4).$$

On a aussi

$$A_0^4 \sum (l - m)^2 (n - p)^4 =$$

$$96 \{ 4(A_1^2 - A_0 A_2)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) - 3A_0(A_0 A_2 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \}$$

d'où

$$A_0^4 \sum l^2 m^2 (l - m)^2 (n - p)^4 =$$

$$96 \{ 4(A_3^2 - A_2 A_4)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) - 3A_4(A_0 A_2 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \}$$

d'où finalement

$$A_0^4 P = 96 \{ 8(A_3^2 - A_2 A_4)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) + 3A_4(A_0 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \}.$$

Maintenant quand on exprime Q par les quantités  $l, m, n, p$  on trouve

$$Q = l^2 m^2 (l-m)^2 (n-p)^4 + l^2 n^2 (l-n)^2 (m-p)^4 + l^2 p^2 (l-p)^2 (m-n)^4 + m^2 n^2 (m-n)^2 (l-p)^4 \\ + m^2 p^2 (m-p)^2 (l-n)^4 + n^2 p^2 (n-p)^2 (l-m)^4 + l^4 (m-n)^2 (m-p)^2 (n-p)^2 \\ + m^4 (l-n)^2 (l-p)^2 (n-p)^2 + n^4 (l-m)^2 (l-p)^2 (m-p)^2 + p^4 (l-m)^2 (l-n)^2 (m-n)^2;$$

et puisqu'on a

$$A_0^4 \sum (l-m)^2 (l-n)^2 (m-n)^2 = 192 \{ (2A_1^2 - A_0 A_2)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) + 3A_0(A_0 A_2 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \}$$

on déduit

$$A_0^4 \sum p^4 (l-m)^2 (l-n)^2 (m-n)^2 = 192 \{ 2(A_3^2 - A_2 A_4)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) + 3A_4(A_0 A_2 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \}$$

d'où vient

$$A_0^4 Q = 96 \{ 8(A_3^2 - A_2 A_4)(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2) + 3A_4(A_0 A_2 A_4 + 2A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 - A_2^3) \},$$

expression identique avec celle déjà trouvée pour P. On a donc

$$a_0^4 P = a_0^4 Q = 1250 K.$$

Si  $Jx^3 + 3J'x^2\gamma + 3J''x\gamma^2 + J'''\gamma^3$  est le covariant dont l'origine est la fonction J, nous trouvons en vertu de l'équation (2)

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} 6000J' = \alpha_0^3(\alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta J_4 + \epsilon J_5) \\ 6000J'' = -\alpha_0^3(\alpha^2 J_1 + \beta^2 J_2 + \gamma^2 J_3 + \delta^2 J_4 + \epsilon^2 J_5) \\ 6000J''' = \alpha_0^3(\alpha^3 J_1 + \beta^3 J_2 + \gamma^3 J_3 + \delta^3 J_4 + \epsilon^3 J_5) \end{array} \right.$$

Si  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = \delta$  ce covariant devient

$$\alpha_0^3(\alpha - \gamma)^3 \{ (\gamma - \epsilon)^3(x - \alpha\gamma)^3 - (\alpha - \epsilon)^3(x - \gamma\gamma)^3 \},$$

et a pour une de ses racines la racine simple ( $\epsilon$ ) de l'équation donnée.

Pour exprimer l'octinvariant  $\Omega$  en fonction des racines, il faut se rappeler la formule connue

$$\Omega = 18 \{ I(J'J''' - J''^2) + I'(J'J'' - JJ''') + I''(JJ'' - J'^2) \}$$

d'où nous trouvons, en substituant pour  $I, I', I'', J, J', J'', J'''$  leurs valeurs données par les équations (1), (2), (3), (4)

$$2^{10} \times 5^8 \Omega =$$

$$a_0^8 \left\{ \begin{aligned} & (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_1 J_2 J_3 + (\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)^2 I_1 J_2 J_4 + (\alpha-\beta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_1 J_2 J_5 \\ & + (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_1 J_3 J_4 + (\alpha-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_1 J_3 J_5 + (\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_1 J_4 J_5 \\ & + (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_2 J_1 J_3 + (\beta-\alpha)(\beta-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_2 J_1 J_4 + (\beta-\alpha)(\beta-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_2 J_1 J_5 \\ & + (\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_2 J_3 J_4 + (\beta-\gamma)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_2 J_3 J_5 + (\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_2 J_4 J_5 \\ & + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_3 J_1 J_2 + (\gamma-\alpha)(\gamma-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_3 J_1 J_4 + (\gamma-\alpha)(\gamma-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_3 J_1 J_5 \\ & + (\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\beta-\delta)^2 I_3 J_2 J_4 + (\gamma-\beta)(\gamma-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_3 J_2 J_5 + (\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_3 J_4 J_5 \\ & + (\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_4 J_1 J_2 + (\delta-\alpha)(\delta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_4 J_1 J_3 + (\delta-\alpha)(\delta-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_4 J_1 J_5 \\ & + (\delta-\beta)(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_4 J_2 J_3 + (\delta-\beta)(\delta-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_4 J_2 J_5 + (\delta-\gamma)(\delta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_4 J_3 J_5 \\ & + (\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_5 J_1 J_2 + (\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_5 J_1 J_3 + (\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_5 J_1 J_4 \\ & + (\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_5 J_2 J_3 + (\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\delta)(\beta-\delta)^2 I_5 J_2 J_4 + (\varepsilon-\gamma)(\varepsilon-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_5 J_3 J_4 \end{aligned} \right.$$

Pour chercher l'expression de la fonction T par les racines  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ , j'observe qu'on a, d'après ce que j'ai fait voir dans le *Quarterly Journal*

$$T = 9(J'^2 - JJ'').$$

ce qui donne, en substituant pour J, J', J'' leurs valeurs données par le système (4)

$$4 \times 10^6 T = -a_0^6 \left\{ \begin{aligned} & (\alpha-\beta)^2 J_1 J_2 + (\alpha-\gamma)^2 J_1 J_3 + (\alpha-\delta)^2 J_1 J_4 + (\alpha-\varepsilon)^2 J_1 J_5 + (\beta-\gamma)^2 J_2 J_3 \\ & + (\beta-\delta)^2 J_2 J_4 + (\beta-\varepsilon)^2 J_2 J_5 + (\gamma-\delta)^2 J_3 J_4 + (\gamma-\varepsilon)^2 J_3 J_5 + (\delta-\varepsilon)^2 J_4 J_5 \end{aligned} \right.$$

et si  $Tx^2 + T'x\gamma + T''\gamma^2$  est le covariant dont l'origine est T nous tirons

$$4 \times 10^6 T' = a_0^6 \left\{ \begin{aligned} & (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 J_1 J_2 + (\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)^2 J_1 J_3 + (\alpha+\delta)(\alpha-\delta)^2 J_1 J_4 + (\alpha+\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 J_1 J_5 + (\beta+\gamma)(\beta-\gamma)^2 J_2 J_3 \\ & + (\beta+\delta)(\beta-\delta)^2 J_2 J_4 + (\beta+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 J_2 J_5 + (\gamma+\delta)(\gamma-\delta)^2 J_3 J_4 + (\gamma+\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 J_3 J_5 + (\delta+\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 J_4 J_5, \end{aligned} \right.$$

$$4 \times 10^6 T'' = -a_0^6 \left\{ \begin{aligned} & \alpha\beta(\alpha-\beta)^2 J_1 J_2 + \alpha\gamma(\alpha-\gamma)^2 J_1 J_3 + \alpha\delta(\alpha-\delta)^2 J_1 J_4 + \alpha\varepsilon(\alpha-\varepsilon)^2 J_1 J_5 + \beta\gamma(\beta-\gamma)^2 J_2 J_3 \\ & + \beta\delta(\beta-\delta)^2 J_2 J_4 + \beta\varepsilon(\beta-\varepsilon)^2 J_2 J_5 + \gamma\delta(\gamma-\delta)^2 J_3 J_4 + \gamma\varepsilon(\gamma-\varepsilon)^2 J_3 J_5 + \delta\varepsilon(\delta-\varepsilon)^2 J_4 J_5 \end{aligned} \right.$$

L'invariant du douzième degré par rapport aux coefficients étant  $T'^2 - 4TT''$  nous tirons pour cet invariant l'expression suivante au moyen des différences des racines

$$\alpha_8^{12} \left\{ \begin{aligned} & (\alpha-\beta)^6 J_1^2 J_2^2 + (\alpha-\gamma)^6 J_1^2 J_3^2 + (\alpha-\delta)^6 J_1^2 J_4^2 + (\alpha-\varepsilon)^6 J_1^2 J_5^2 + (\beta-\gamma)^6 J_2^2 J_3^2 + (\beta-\delta)^6 J_2^2 J_4^2 \\ & + (\beta-\varepsilon)^6 J_2^2 J_5^2 + (\gamma-\delta)^6 J_3^2 J_4^2 + (\gamma-\varepsilon)^6 J_3^2 J_5^2 + (\delta-\varepsilon)^6 J_4^2 J_5^2 - 5 J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 \\ & - 2(\alpha-\beta)^3 (\alpha-\gamma)^3 J_1^2 J_2 J_3 - 2(\alpha-\beta)^3 (\alpha-\delta)^3 J_1^2 J_2 J_4 - 2(\alpha-\beta)^3 (\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_2 J_5 \\ & - 2(\alpha-\gamma)^3 (\alpha-\delta)^3 J_1^2 J_3 J_4 - 2(\alpha-\gamma)^3 (\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_3 J_5 - 2(\alpha-\delta)^3 (\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_4 J_5 \\ & - 2(\beta-\alpha)^3 (\beta-\gamma)^3 J_2^2 J_1 J_3 - 2(\beta-\alpha)^3 (\beta-\delta)^3 J_2^2 J_1 J_4 - 2(\beta-\alpha)^3 (\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_1 J_5 \\ & - 2(\beta-\gamma)^3 (\beta-\delta)^3 J_2^2 J_3 J_4 - 2(\beta-\gamma)^3 (\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_3 J_5 - 2(\beta-\delta)^3 (\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_4 J_5 \\ & - 2(\gamma-\alpha)^3 (\gamma-\beta)^3 J_3^2 J_1 J_2 - 2(\gamma-\alpha)^3 (\gamma-\delta)^3 J_3^2 J_1 J_4 - 2(\gamma-\alpha)^3 (\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_1 J_5 \\ & - 2(\gamma-\beta)^3 (\gamma-\delta)^3 J_3^2 J_2 J_4 - 2(\gamma-\beta)^3 (\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_2 J_5 - 2(\gamma-\delta)^3 (\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_4 J_5 \\ & - 2(\delta-\alpha)^3 (\delta-\beta)^3 J_4^2 J_1 J_2 - 2(\delta-\alpha)^3 (\delta-\gamma)^3 J_4^2 J_1 J_3 - 2(\delta-\alpha)^3 (\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_1 J_5 \\ & - 2(\delta-\beta)^3 (\delta-\gamma)^3 J_4^2 J_2 J_3 - 2(\delta-\beta)^3 (\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_2 J_5 - 2(\delta-\gamma)^3 (\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_3 J_5 \\ & - 2(\varepsilon-\alpha)^3 (\varepsilon-\beta)^3 J_5^2 J_1 J_2 - 2(\varepsilon-\alpha)^3 (\varepsilon-\gamma)^3 J_5^2 J_1 J_3 - 2(\varepsilon-\alpha)^3 (\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_1 J_4 \\ & - 2(\varepsilon-\beta)^3 (\varepsilon-\gamma)^3 J_5^2 J_2 J_3 - 2(\varepsilon-\beta)^3 (\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_2 J_4 - 2(\varepsilon-\gamma)^3 (\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_3 J_4 \end{aligned} \right\}$$

Dans un cahier recent du Journal de Borchardt M. Hermite vient d'exprimer son invariant du 18<sup>e</sup> degre par les différences des racines  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . Je vais maintenant faire voir comment on peut arriver à un tel résultat. Je pose, pour abrégé,

$$\begin{aligned} \sum J_i &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5, & \sum \alpha J_i &= \alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta J_4 + \varepsilon J_5 \\ \sum \alpha^2 J_i &= \alpha^2 J_1 + \beta^2 J_2 + \gamma^2 J_3 + \delta^2 J_4 + \varepsilon^2 J_5, & \sum \alpha^3 J_i &= \alpha^3 J_1 + \beta^3 J_2 + \gamma^3 J_3 + \delta^3 J_4 + \varepsilon^3 J_5 \\ \sum J_i N_i &= J_1 N_1 + J_2 N_2 + J_3 N_3 + J_4 N_4 + J_5 N_5, \\ \sum \alpha J_i N_i &= \alpha J_1 N_1 + \beta J_2 N_2 + \gamma J_3 N_3 + \delta J_4 N_4 + \varepsilon J_5 N_5. \end{aligned}$$

D'après ce que j'ai démontré dans le *Quarterly Journal* savoir que l'invariant dont il s'agit ( $\Gamma$ ) est l'éliminant du covariant dont l'origine est la fonction  $J$  et du covariant lineaire, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{48 \times 10^{18}} \{ J'' R^3 - 3 J'' R^2 R' + 3 J' R R'^2 - J R'^3 \} = \\ \alpha_0^{18} \{ & \sum J_i (\sum \alpha J_i N_i)^3 - 3 \sum \alpha J_i (\sum \alpha J_i N_i)^2 \sum J_i N_i + 3 \sum \alpha^2 J_i \sum \alpha J_i N_i (\sum J_i N_i)^2 - \sum \alpha^3 J_i (\sum J_i N_i)^3 \} \\ &= \alpha_0^{18} \left\{ \begin{aligned} & (\sum \alpha J_i N_i)^2 \{ \sum J_i \sum \alpha J_i N_i - \sum \alpha J_i \sum J_i N_i \} \\ & - 2 \sum J_i N_i \sum \alpha J_i N_i \{ \sum \alpha J_i \sum \alpha J_i N_i - \sum \alpha^2 J_i \sum J_i N_i \} \\ & + (\sum J_i N_i)^2 \{ \sum \alpha^2 J_i \sum \alpha J_i N_i - \sum \alpha^3 J_i \sum J_i N_i \} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

En sorte qu'on trouve après quelques reductions faciles



$$\frac{1}{a_0^{18}} \Gamma =$$

$$\begin{aligned} & (\alpha-\beta)J_1J_2 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \beta \sum J_1N_1)^2N_1 - (\sum \alpha J_1N_1 - \alpha \sum J_1N_1)^2N_2 \} \\ & + (\alpha-\gamma)J_1J_3 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \gamma \sum J_1N_1)^2N_1 - (\sum \alpha J_1N_1 - \alpha \sum J_1N_1)^2N_3 \} \\ & + (\alpha-\delta)J_1J_4 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \delta \sum J_1N_1)^2N_1 - (\sum \alpha J_1N_1 - \alpha \sum J_1N_1)^2N_4 \} \\ & + (\alpha-\varepsilon)J_1J_5 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \varepsilon \sum J_1N_1)^2N_1 - (\sum \alpha J_1N_1 - \alpha \sum J_1N_1)^2N_5 \} \\ & + (\beta-\gamma)J_2J_3 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \gamma \sum J_1N_1)^2N_2 - (\sum \alpha J_1N_1 - \beta \sum J_1N_1)^2N_3 \} \\ & + (\beta-\delta)J_2J_4 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \delta \sum J_1N_1)^2N_2 - (\sum \alpha J_1N_1 - \beta \sum J_1N_1)^2N_4 \} \\ & + (\beta-\varepsilon)J_2J_5 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \varepsilon \sum J_1N_1)^2N_2 - (\sum \alpha J_1N_1 - \beta \sum J_1N_1)^2N_5 \} \\ & + (\gamma-\delta)J_3J_4 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \delta \sum J_1N_1)^2N_3 - (\sum \alpha J_1N_1 - \gamma \sum J_1N_1)^2N_4 \} \\ & + (\gamma-\varepsilon)J_3J_5 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \varepsilon \sum J_1N_1)^2N_3 - (\sum \alpha J_1N_1 - \gamma \sum J_1N_1)^2N_5 \} \\ & + (\delta-\varepsilon)J_4J_5 \{ (\sum \alpha J_1N_1 - \varepsilon \sum J_1N_1)^2N_4 - (\sum \alpha J_1N_1 - \delta \sum J_1N_1)^2N_5 \} \end{aligned}$$

Si l'équation donnée a deux racines doubles, savoir  $\alpha$  et  $\gamma$ , on a

$$\begin{aligned} & a_0^2 \{ 2(\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2 + (\gamma - \varepsilon)^2 \} = 50H \\ & a_0^2 (\alpha - \gamma)^2 \{ (\alpha - \gamma)^2 + 2(\alpha - \varepsilon)^2 + 2(\gamma - \varepsilon)^2 \} = 100 I \\ & a_0^3 (\alpha - \gamma)^4 \{ (\alpha - \varepsilon)^2 + (\gamma - \varepsilon)^2 \} = -1000 J \\ & a_0^4 (\alpha - \gamma)^4 (\alpha - \varepsilon)^2 (\gamma - \varepsilon)^2 = 250 (I^2 - 3L) \\ & a_0^4 (\alpha - \gamma)^6 (\alpha - \varepsilon)^2 (\gamma - \varepsilon)^2 = \frac{625}{2} K \\ & a_0^6 (\alpha - \gamma)^8 (\alpha - \varepsilon)^2 (\gamma - \varepsilon)^2 \{ (\alpha - \varepsilon)^2 + (\gamma - \varepsilon)^2 - 2(\alpha - \gamma)^2 \} = 5 \times 10^5 T \end{aligned}$$

Maintenant, en posant  $\alpha - \gamma = \sqrt{p}$ ,  $\varepsilon - \alpha = \sqrt{q}$ ,  $\gamma - \varepsilon = \sqrt{r}$  on déduit en employant les valeurs que je viens d'écrire pour H, I, J, L

$$50HJ + a_0 (3I^2 + L) = \frac{a_0^5 P^2}{3000} \{ p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr \},$$

expression qui s'anéantit en vertu de la relation

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0.$$

Comme a été déjà remarqué par M. Cayley. L'équation de Moivre, savoir

$$x^5 + 5fx^3 + 5f^2x + g = 0$$

satisfait à la condition

$$50HJ + a_0 (3I^2 + L) = 0$$

en sorte que si cette équation a une racine double, elle en a en même temps deux.

Pour trouver la relation qui subsiste entre  $H$ ,  $I$ ,  $J$  pour deux racines doubles, posons  $q + r = s$  et en éliminant les quantités  $p$  et  $s$  entre les équations

$$a_0^2 (2p + s) = 50H, \quad a_0^2 (p^2 + 2ps) = 100I, \quad a_0^3 p^2 s = -1000J$$

on a pour la relation cherchée

$$a_0 (5HI + 9a_0 J)^2 - 4(25H^2 - a_0^2 I) (a_0 I^2 + 15HJ) = 0.$$

Cette dernière a lieu, aussi pour l'équation de Moivre.

Je me propose maintenant de former l'équation dont les racines sont les quantités  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ . Si l'équation donnée a deux racines doubles, cette équation devient

$$\{t^2 - 2p(q + r)t + 4p^2qr\}^2 \{t - 2p^2\} = 0$$

en prenant  $t$  pour l'inconnue.

On a  $a_0^4 \sum I_1 I_2 = \theta I^2 + \varphi L$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  étant des facteurs numériques qu'on peut trouver en calculant les valeurs de la fonction symétrique  $\sum I_1 I_2$  et des quantités  $I$  et  $L$  pour les équations suivantes

$$(5) \quad (x^2 - 2\sqrt{2}x + 3)^2 x = 0, \quad (x^2 - 1)^2 x = 0$$

dont chacune a deux racines doubles : et on parvient de cette manière à la formule

$$a_0^4 \sum I_1 I_2 = 2 \times 10^2 (7I^2 - L)$$

Pareillement on a

$$a_0^6 \sum I_1 I_2 I_3 = \theta HK + \varphi IL + \psi I^3 + \chi J^2,$$

$\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  étant des facteurs numériques dont on peut trouver les valeurs en calculant les valeurs de la fonction symétrique  $\sum I_1 I_2 I_3$  et des quantités  $H$ ,  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  pour les équations

$$(6) \quad (x^2 - 2x + 2)^2 x = 0, \quad x^5 - x = 0.$$

On a de cette manière deux relations entre  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , qui jointes, à celles que donnent les équations (5) déjà employées pour trouver  $\sum I_1 I_2$  acheveront de déterminer ces quantités. Par ce procédé nous passons à la suivante

$$a_0^6 \sum I_1 I_2 I_3 = 4 \times 10^4 \{3HK + IL + 7I^3 + 2J^2\}.$$

Pour trouver  $\sum I_1 I_2 I_3 I_4$ , j'observe que cette fonction s'annule si l'équation donnée a une racine triple : on a donc

$$a_0^8 \sum I_1 I_2 I_3 I_4 = \theta HT + K(\varphi HI + \psi a_0 J) + I \{ \chi (I^3 - 27J^2) + \tau (IL - 9J^2) \}.$$

On peut déterminer les facteurs numériques qui se trouvent dans cette formule au

moyen des valeurs que prennent la fonction symétrique  $\sum I_1 I_2 I_3 I_4$  et les quantités H, I, J, K, L, T pour les équations (5) et (6) qu'on peut joindre aux valeurs des mêmes quantités pour l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)x = 0.$$

On a ainsi cinq relations entre  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\tau$ , à l'aide des quelles nous tirons

$$a_0^8 \sum I_1 I_2 I_3 I_4 = 4 \times 10^6 \{ HT + K(HI - a_0 J) + I(IL - 9J^2) \}.$$

Pour trouver la valeur du produit  $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$  j'observe que l'expression  $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 - 2P^2$  s'annule si  $\alpha = \beta$  : cette quantité est par conséquent identique avec le dernier terme de l'équation aux carrés des différences à un facteur près : et l'on trouve facilement

$$I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 - 2P^2 = 24(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\gamma - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2,$$

d'où, en ayant égard à la forme connue du discriminant d'une équation du cinquième degré

$$a_0^8 I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 = 2 \times (1250K)^2 + 24 \times 3125 (K^2 - 128\Omega).$$

ce qui donne

$$a_0^8 I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 = 32 \times 10^5 (K^2 - 3\Omega).$$

Donc en prenant  $t$  pour l'inconnue de l'équation dont les racines sont  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ , cette équation s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} a_0^8 t^5 - 200 a_0^6 I t^4 + 2 \times 10^3 a_0^4 (7I^2 - L) t^3 + 4 \times 10^4 a_0^2 (3HK + IL + 7I^3 + 2J^2) t^2 \\ + 4 \times 10^6 \{ HT + K(HI - a_0 J) + I(IL - 9J^2) \} t - 32 \times 10^5 (K^2 - 3\Omega) = 0. \end{aligned}$$

Or j'ai trouvée dans un Mémoire inséré dans le *Quarterly Journal* n° 18, page 149 que si  $K^2 - 3\Omega = 0$  l'équation donnée a pour une de ses racines la quantité  $-\frac{R'}{R}$ , en sorte que si l'une quelconque des quantités  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  s'annule, alors  $-\frac{R'}{R}$  sera une des racines de l'équation donnée.

Je terminerai ce Mémoire en présentant l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + 10a_3 x^2 + 5a_4 x + a_5 = 0$$

sous une forme telle que les coefficients s'expriment au moyen des fonctions des différences des racines que je viens d'employer. En prenant  $t$  pour l'inconnue, écrivons l'équation dont il s'agit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} a_0^8 t^{10} + 100a_0^6 P_1 t^9 + 50a_0^4 P_2 t^8 + 2500a_0^2 P_3 t^7 + 125P_4 t^6 + 625P_5 t^5 + 2500P_6 t^4 \\ + 1250P_7 t^3 + 62500P_8 t^2 + 62500P_9 t + 3125P_{10} = 0 \end{aligned}$$

et nous avons

$$P_1 = -H, \quad P_2 = a_0^2 I + 75H^2, \quad P_3 = -25H^3 - 2a_0^2 HI - a_0^3 J$$

$$P_4 = 3125H^4 + 1250a_0^2 H^2 I + 800a_0^3 HJ - 16a_0^4 L - 3a_0^4 I^2$$

$$P_5 = 60a_0^2 HL - 120a_0^2 HI^2 - 2500H^3 I - 1500a_0 H^2 J - 220a_0^2 IJ - a_0^4 K$$

$$P_6 = 19a_0^2 IL - 17a_0^2 I^3 - 212a_0^2 J^2 + 7a_0^2 HK + 1000a_0 HIJ + 875H^2 I^2 - 125H^2 L$$

$$P_7 = 3a_0^2 IK + 1184HJ^2 - 48HIL - 176HI^3 - 304a_0 I^2 J - 49H^2 K + 112a_0 LJ$$

$$P_8 = K(3a_0 J - HI) + 4I(2I^3 - IL - 45J^2) - 28HT$$

$$P_9 = 48RJ + 16IT - K(L + I^2)$$

$$P_{10} = K^2 - 128\Omega.$$

Il est bon de remarquer qu'on a

$$a_0 \Omega = J(12T - IK) + R(L + I^2).$$

College de la Trinité à Dublin. le 15 Février 1865.