NUOVA DIMOSTRAZIONE DI TALUNI TEOREMI RELATIVI ALLE FUNZIONI SFERICHE CONTENUTI IN UNA NOTA DEL PROF. PACI (*).

Da una lettera del prof. **Pizzetti** al prof. **Paci**.

Adunanza del 13 novembre 1898.

. . . .

Mi permetto di darle qui un'altra dimostrazione delle sue ultime formole a pag. 138 (**).

La nota formola

$$\int_{-1}^{1} x^s X_m \, dx = 0 \qquad (s < m)$$

(*) « *Esposizione di due nuovi metodi per determinare l'espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale* » (Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. VII, 2° sem. 1898, pp. 131-138).

(**)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2\nu-2}\theta \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \\ &\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta \cos^{2\nu-2}\varphi \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0, \\ &\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \nu < n$$

può scriversi

$$(1) \qquad \int_0^{\pi} \cos^s \omega \, P_m (\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . \, d\omega = 0.$$

Di qui si deducono le altre

$$(2) \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2r} \omega . \, P_{2n} (\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . \, d\omega = 0 \qquad (r < n)$$

$$(3) \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2s} \omega . \operatorname{sen}^{2r} \omega . \, P_{2n} (\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . \, d\omega = 0. \qquad (r + s < n)$$

Per verificare queste due basta sostituire a $\operatorname{sen}^{2s} \omega$ la sua espressione per $\cos \omega$ e poi tener conto della (1).

Finalmente si ha anche, per s dispari,

$$(4) \qquad \int_0^{\pi} \cos^s \omega . \, P_{2n} (\cos \omega) . \operatorname{sen}^h \omega . \, d\omega = 0$$

poichè l'integrale da 0 a $\frac{1}{2}\pi$ è eguale e di segno contrario all'integrale da $\frac{1}{2}\pi$ a π.

Queste cose premesse, per dimostrare le sue formole non c'è che da fare un cambiamento di variabili negli integrali. Invece di assumere per asse polare la intersezione dei piani θ e θ' si assuma la intersezione dei piani θ' e ω. Allora, chiamando γ l'angolo fra gli archi θ' ed ω, l'elemento d'area della superficie sferica verrà espresso da

$$d\sigma' = \operatorname{sen} \omega . \, d\omega . \, d\gamma .$$

Assumendo per comodità l'arco θ come origine degli angoli φ, dal triangolo $(\theta \theta' \omega)$ si ottiene

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \omega + \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \omega \cos \gamma$$

$$\operatorname{sen} \theta \cos \varphi = \operatorname{sen} \theta' \cos \omega - \cos \theta' \operatorname{sen} \omega \cos \gamma$$

$$\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \gamma .$$

Sostituendo nei primi membri delle sue formole e sviluppando le potenze, si vede subito che gli integrali si esprimono come somma di tanti termini i quali (astrazion fatta dai fattori $\cos^h \theta'$, $\operatorname{sen}^k \theta'$ che possono portarsi fuori del segno integrale) sono di una delle forme

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \cos^{2r} \omega . \operatorname{sen}^{2s} \omega . P_{2n}(\cos \omega) . \operatorname{sen} \omega . \cos^{2t} \gamma . d\omega\, d\gamma \qquad (r+s) < n$$

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \cos^{2r+1} \omega . \operatorname{sen}^h \omega\, P_{2n}(\cos \omega) . \cos^k \gamma\, d\omega\, d\gamma,$$

i quali si decompongono subito nel prodotto di due integrali semplici, e sono nulli in virtù di una delle formole (1), (2), (3), (4).

Questa dimostrazione è più diretta, ma molto meno elegante della sua.

Genova, 29 ottobre 1898.

P. Pizzetti.