

**10. *Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die  
Bewegungen des reinen Aethers;  
von H. v. Helmholtz.***

(Aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie der Wissensch.  
vom 6. Juli 1893, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

---

In Maxwell's Theorie der Electrodynamik wird dem Aether, der als Träger der electricen und magnetischen Kräfte gilt, Beweglichkeit zugeschrieben; und es werden auch Werthe für die Richtung und Intensität der Bewegungskräfte angegeben, die auf ihn wirken. Diese Annahme führt in keine Schwierigkeit, solange wir uns den Aether als durchdrungen von ponderabler Substanz vorstellen, die sich mit ihm bewegt. Aus den vorliegenden physikalischen Erfahrungen können wir schliessen, dass in der That solche Einmischungen, seien sie continuirlich oder discontinuירlich vertheilt, in allen Substanzen vorkommen, die entweder leitend oder lichtbrechend gegen das Vacuum sind, oder Werthe der dielectricen und magnetischen Constanten haben, die von denen des Vacuum abweichen. Den ponderablen Theilen dieser Medien wird auch Beharrungsvermögen zukommen, und so weit wir uns diese Theile continuירlich vertheilt und fest anhaftend am Aether vorstellen dürfen, würden dieselben unter dem Einfluss endlicher ponderomotorischer Kräfte auch nur endliche Beschleunigungen empfangen, und würden wir nach den Bewegungen der wägbaren Theile, soweit diese beobachtbar oder durch die Theorie zu bestimmen sind, auch die damit übereinstimmenden Bewegungen des Aethers erschliessen können. Die Beobachtungen über die durch Bewegung der wägbaren Körper inducirten electromotorischen Kräfte sind bisher in guter Uebereinstimmung mit Maxwell's Theorie gewesen.

Anders liegt die Sache für die von wägbaren Körpern freien, nur mit Aether gefüllten Räume, als welche uns der Weltraum, bez. die Molecularinterstitien der schweren Körper entgegentreten.

In diesen Fällen tritt die Frage auf, ob reiner Aether ganz frei von allem Beharrungsvermögen bestehen und den Maxwell'schen Gleichungen genügen kann, und welche Bewegungen er in solchem Falle ausführen müsste. Damit hängt eng die Frage zusammen, ob er den sich durch ihn hinbewegenden wägbaren Körpern ausweichen muss, oder sie durchdringt, dabei entweder ganz in Ruhe bleibend, oder sich zum Theil mit ihnen bewegend, zum Theil ausweichend, nach der Vorstellung von Fresnel.

Ich will heute nur das Hauptergebniss meiner letzten Untersuchung dieser Fragen der Akademie vorlegen, welche unter der Voraussetzung geführt ist, dass der reine Aether in mechanischer Beziehung die Eigenschaften einer reibungslosen, incompressiblen Flüssigkeit habe, dabei aber ganz ohne Beharrungsvermögen sei. Danach würden die von Maxwell aufgestellten und von Hertz durch explicite Einführung der Geschwindigkeitscomponenten vervollständigten Gesetze in der That geeignet sein, vollständigen Aufschluss über die Gesetze der im Aether auftretenden Veränderungen und Bewegungen zu geben, und zwar so, dass die Zusammenfassung der Gesetze der Electrodynamik unter das Princip der kleinsten Wirkung, welches ich unter dem 12. Mai 1892 der Akademie vorgelegt habe, ein in sich vollständiges System von Wirkungen und Gegenwirkungen darstellt, und keiner weiteren Ergänzung bedarf, als der Einführung der Hypothese der Incompressibilität. Diese kann einfach dadurch gewonnen werden, dass man der dort als *electrokinetisches Potential* bezeichneten Grösse  $\Phi$  noch ein, eine willkürliche Function der Coordinaten  $S$  als Factor enthaltendes Integral hinzugefügt, nämlich

$$\iiint S \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] . dx . dy . dz ,$$

welches für jede Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit, bei der überall und immer

$$(1) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

bleibt, den Werth von  $\Phi$  nicht ändert.

Wir werden im reinen Aether keine electrischen oder magnetischen Dichtigkeiten  $\sigma$  und  $\tau$  haben können, und haben

also für die nur Aether enthaltenden Theile des Raumes in den Bezeichnungen meiner citirten Abhandlung zu setzen:

$$(1a) \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0$$

$$(1b) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0.$$

Die electrischen Momente  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  werden in allen Theilen des Aetherraumes die constante Beziehung zu den Kraftcomponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  haben:

$$(1c) \quad X = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{X}, \quad Y = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{Y}, \quad Z = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{Z}.$$

Ebenso die magnetischen Momente

$$(1d) \quad L = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{L}, \quad M = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{M}, \quad N = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{N}.$$

Indem wir die in der citirten Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen der dielectrischen und magnetischen Constanten

$$\epsilon = \mu = 4\pi$$

setzen, halten wir uns in Uebereinstimmung mit der dort und mit der von Hertz gebrauchten Bezeichnung.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche auf das Innere der Aethervolumina wirken, sind für die Volumeneinheit berechnet:

1. von electrischen Spannungen herrührend:

$$\mathfrak{H}_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X^2 - Y^2 - Z^2] + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [XY] + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [XZ]$$

oder, wenn wir unter Berücksichtigung von (1) die Differentiationen ausführen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_e = \frac{1}{4\pi} \left[ Y \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ Z \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right] \\ T_e = \frac{1}{4\pi} \left[ X \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ Z \left( \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \right] \\ Z_e = \frac{1}{4\pi} \left[ X \left( \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ Y \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \right] \end{array} \right.$$

In ganz gleicher Weise sind die ponderomotorischen Kräfte  $\mathfrak{H}_m$  etc. magnetischen Ursprungs aus den Componenten der magnetischen Kräfte zusammenzusetzen. Die Summe beider

$$(2a) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_m, \quad T = T_e + T_m, \quad Z = Z_e + Z_m$$

bildet den gesammten Betrag der ponderomotorischen Kraftcomponenten. Dabei ist zu bemerken, dass die in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen ( $\partial Y/\partial z - \partial Z/\partial y$ ) etc. und ( $\partial M/\partial z - \partial N/\partial y$ ) etc. solchen Componenten der Kräfte entsprechen, die sich nicht auf ein Potential zurückführen lassen, sondern in sich selbst zurücklaufende Kraftlinien hervorgerufen. Wir können sie kurz als *cyklische Kräfte* bezeichnen.

Diese selben Grössen ergeben sich aus den Gleichungen (4f) meines citirten Aufsatzes:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = -4\pi A \cdot \frac{dL}{dt} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = -4\pi A \cdot \frac{dM}{dt} \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -4\pi A \cdot \frac{dN}{dt} \end{cases}$$

$$(3a) \quad \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = -4\pi A \cdot \frac{dX}{dt} \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4\pi A \cdot \frac{dY}{dt} \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = -4\pi A \cdot \frac{dZ}{dt} \end{cases}$$

worin die mit der Bezeichnung  $d/dt$  versehenen Differentialquotienten sich auf die Aenderung beziehen, die in einem sich fortbewegenden Volumenelemente des Aethers in der Zeit  $dt$  eintreten, nämlich

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [X\beta - Y\alpha] + \frac{\partial}{\partial z} [X\gamma - Z\alpha] \\ \frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Y\alpha - X\beta] + \frac{\partial}{\partial z} [Y\gamma - Z\beta] \\ \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Z\alpha - X\gamma] + \frac{\partial}{\partial y} [Z\beta - Y\gamma] \end{cases}$$

$$(4a) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [L\beta - \alpha M] + \frac{\partial}{\partial z} [L\gamma - N\alpha] \\ \frac{dM}{dt} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [M\alpha - L\beta] + \frac{\partial}{\partial z} [M\gamma - N\beta] \\ \frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [N\alpha - L\gamma] + \frac{\partial}{\partial y} [N\beta - M\gamma] \end{cases}$$

Die Gleichungen (2a) ergaben nunmehr

$$(5) \quad \begin{cases} \Xi = A \left\{ Z \cdot \frac{dM}{dt} - Y \cdot \frac{dN}{dt} + M \cdot \frac{dZ}{dt} - N \cdot \frac{dY}{dt} \right\} \\ T = A \left\{ X \cdot \frac{dN}{dt} - Z \cdot \frac{dL}{dt} + N \cdot \frac{dX}{dt} - L \cdot \frac{dZ}{dt} \right\} \\ Z = A \left\{ Y \cdot \frac{dL}{dt} - X \cdot \frac{dM}{dt} + L \cdot \frac{dY}{dt} - M \cdot \frac{dX}{dt} \right\} \end{cases}$$

Wenn wir für die mit  $d/dt$  bezeichneten Differentialquotienten ihre in (4) und (4a) angegebenen Werthe setzen und zur Abkürzung die Bezeichnungen einführen:

$$(5a) \quad \mathfrak{P} = Z \cdot M - Y \cdot N, \quad \mathfrak{Q} = X \cdot N - Z \cdot L, \quad \mathfrak{R} = Y \cdot L - X \cdot M,$$

so ist zu bemerken, dass die Grössen  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  den Componenten der Geschwindigkeiten proportional sind, mit der die electromagnetische Energie durch den Raum des ruhenden Aethers strömt. Wenn der Aether leer ist und ruht und also die  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  sind, reduciren sich die Werthe der ponderomotorischen Kräfte aus den Gleichungen (5) auf die einfacheren Werthe

$$\Xi = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \quad T = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t}, \quad Z = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t}.$$

Also nur, wenn die Electricitätsvertheilung von der Art ist, dass sie im ruhenden Aether ein Strömen der Energie hervorbringen würde, und zwar nur während der Strom der Energie in der Zeit steigt oder nachlässt, sind ponderomotorische Kräfte im Aether vorhanden, die durch die Incompressibilität desselben nicht aufgehoben werden können und den Aether selbst in Bewegung setzen müssen. Bekanntlich ziehen die Phasen der electromagnetischen Spannungen dabei mit Lichtgeschwindigkeit fort. Da der Regel nach die  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  Grössen zweiten Grades und bei regelmässigen Lichtoscillationen verschwindend klein sind, übrigens auch nur eine halb so lange Schwingungsdauer haben, als die electricischen und magnetischen Momente, so sind im allgemeinen die Kräfte, die daraus entspringen, verschwindend kleine Grössen zweiter Ordnung.

Dass die electricischen Gleichgewichtszustände, wenn sie einmal vorübergehend gestört worden sind, sich ausserordentlich schnell immer wieder herstellen, indem diejenigen Theile der

Wellen, welche Werthen der Grössen  $\partial\mathfrak{P}/\partial t$ ,  $\partial\mathfrak{Q}/\partial t$ ,  $\partial\mathfrak{R}/\partial t$ , die von Null verschieden sind, entsprechen, mit ungeheurer Geschwindigkeit in den unendlichen Raum hinauslaufen oder durch Leiter absorbiert werden, ist schon in früheren Arbeiten verschiedener Physiker hervorgehoben worden.

In frei beweglichem, reinem Aether dagegen würden electriche und magnetische Vertheilungen, die cyklische Kräfte ergeben und deshalb durch den Druck nicht im Gleichgewicht gehalten werden können, augenblicklich strömende Bewegungen des Aethers hervorrufen müssen, die jeden Grad von Geschwindigkeit erreichen und sich soweit steigern können, bis die durch die Bewegung erzeugten inducirten electricen und magnetischen Kräfte die ponderomotorische Kraft vernichten nach dem allgemeinen Gesetze, dass eine durch electromagnetische Kräfte erzeugte Bewegung immer eine die Bewegung hemmende Induction bewirkt.

Wir wollen also demnächst untersuchen, ob solche Bewegungen des reinen Aethers in jedem Falle gefunden werden können, welche die durch die Incompressibilität des Aethers nicht zu äquilibrirenden ponderomotorischen Kräfte aufheben müssen.

Durch den Druck einer incompressibeln Flüssigkeit können nur solche Kräfte aufgehoben werden, deren Componenten die Form haben

$$(5a) \quad \Xi_p = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \Upsilon_p = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z_p = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

In die Function  $P$  tritt zunächst ein der Druck, welcher der electromagnetischen Energie aller den Aether durchziehenden electromotorischen Kräfte proportional ist

$$(5b) \quad P_0 = \frac{1}{8\pi} \left\{ (X^2 + Y^2 + Z^2) + (L^2 + M^2 + N^2) \right\},$$

ferner noch ein von der Bewegung abhängiger Theil

$$(5c) \quad P = P_0 + A[\alpha \cdot \mathfrak{P} + \beta \cdot \mathfrak{Q} + \gamma \cdot \mathfrak{R}] + S.$$

Da das hierin vorkommende  $S$  zunächst als willkürliche Function der Coordinaten und der Zeit aufzufassen ist, kann auch das  $P$  als eine solche angesehen werden.

Wenn man diese Bezeichnungen benutzt, so würden die Gleichungen (5a) folgende Bedingungen ergeben:

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial P}{\partial x} + A \left[ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \beta \left( \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} \right) - \gamma \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \right) \right] \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial y} + A \left[ \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} + \gamma \left( \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} \right) - \alpha \left( \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} \right) \right] \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial z} + A \left[ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + \alpha \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \right) - \beta \left( \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} \right) \right] \end{cases}$$

Dies ist das System von Differentialgleichungen, welches neben der Gleichung der Incompressibilität

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

erfüllt werden müsste, um die cyklisch wirkenden Kräfte im reinen Aether ganz aufzuheben. Es sind dies vier Gleichungen mit vier Unbekannten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $P$ , wenn wir die Vertheilung der electrischen und magnetischen Kräfte, die ja meist durch äussere Ursachen bestimmt sind, als gegeben betrachten.

Man kann aus den drei Gleichungen (6) die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  eliminiren, indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} \right), \quad \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \right) \text{ und } \left( \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} \right)$$

multiplicirt und addirt. Dies gibt:

$$(6a) \quad \begin{cases} 0 = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial y} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} \right) \\ \quad \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Dies ist eine Gleichung, aus der  $P$  gefunden werden kann, wenn die  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{R}$  als Functionen der  $x, y, z, t$  gegeben sind, nur wird in dem allgemeinen Integral für  $P$  eine willkürliche Function stehen bleiben. Ist z. B. der Werth von  $P$  für die Punkte einer Ebene  $x = C$  und für jede Zeit  $t$  angenommen, wodurch auch die  $\partial P / \partial y$  und  $\partial P / \partial z$  gegeben sind, so ergibt Gleichung (8a) den Werth von  $\partial P / \partial x$ , sodass dadurch der Werth von  $P$  auch für  $(x + dx)$  gefunden werden kann und so fortschreitend.

Dann ergeben je zwei von den Gleichungen (6), nachdem der Gang von  $P$  bestimmt ist, je zwei der Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  als Function der dritten, woraus sich die Richtung der Stromlinien ergibt, und da aus der Gleichung (1) folgt, dass in jedem Stromfaden das Product aus der resultirenden Geschwindigkeit mit dem Querschnitt des Fadens constant ist, so sind die gesammten Stromcomponenten vollständig bestimmt, wenn die Grössen ihrer Resultante in allen Punkten der Anfangsebene  $x = \text{Const.}$  gegeben sind.

Dies ergibt noch eine zweite willkürlich zu wählende Function, die in dem allgemeinen Integral vorkommt.

Das vollständige Integral der Gleichungen (6) ist, da diese Gleichungen nach  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $P$  linear sind, bekanntlich zusammenzusetzen aus irgend einem einzelnen Integral jenes Gleichungssystems und dem allgemeinen Integral derselben Gleichungen, welches sie ergeben, nachdem man darin

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = 0$$

gesetzt hat. Unter dieser Bedingung folgt:

$$\alpha \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

d. h. die Stromlinien verlaufen unter der letztgenannten Annahme längs der Flächen  $P = \text{Const.}$

Ferner sagt die entsprechend reducirte Gleichung (6a) dann aus, dass auch die Linien, deren Elemente sich verhalten wie

$$dx : dy : dz = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} \right) : \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \right) : \left( \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)$$

längs derselben Flächen  $P = \text{Const.}$  verlaufen.

Die obigen Betrachtungen zeigen, dass in das allgemeine Integral zwei in Flächen und nach der Zeit willkürliche Functionen eintreten, nämlich  $P$  und  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ . Sollte der Aether an der Grenze den ponderablen Körpern unverrückbar anhaften, so müssten es drei sein, nämlich  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Der Aether wird also unter Umständen an der Grenzfläche gleiten müssen. Indem man solche Gleitungen als einen sehr jähren Uebergang zwischen verschiedenen Werthen tangentialer Geschwindig-



keiten betrachtet, werden in der Grenzschicht noch dem entsprechende electriche und magnetische Kräfte entstehen können mit entsprechend jähren Unterschieden der tangentialen Componenten dieser Kräfte.

Eine Reihe von Beispielen, die das Verhalten des Aethers in der Umgebung electricch und magnetisch polarisirter Körper, wie es aus diesen Gleichungen folgt, erkennen lassen, behalte ich mir vor, in späteren Aufsätzen zu geben.

---