

# Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici

(Memoria del prof. ENRICO BETTI, a Pisa.)

---

**I**n questa Memoria dimostro un teorema che, nella teorica delle forze elastiche dei corpi solidi, tiene il luogo che il teorema di GREEN ha nella teorica delle forze che agiscono secondo la legge di NEWTON, e quanto alle applicazioni mi limito a dedurre formule analoghe a quella di GREEN per le funzioni potenziali, per esprimere il coefficiente di condensazione e le componenti della rotazione di un elemento qualunque di un corpo solido elastico, omogeneo ed isotropo deformato per l'azione di forze date arbitrariamente. Altre applicazioni si troveranno nella Teorica della elasticità che si pubblica nel *Nuovo Cimento*.

Sia  $S$  lo spazio occupato da un corpo solido elastico omogeneo e  $\sigma$  la superficie che ne forma il contorno;  $\rho$  la sua densità;  $X, Y, Z$  le componenti, secondo tre assi ortogonali  $x, y, z$ , delle forze che agiscono in tutti i punti del corpo;  $L, M, N$  le componenti delle forze che agiscono alla superficie  $\sigma$ . Siano  $u, v, w$  le componenti degli spostamenti che i punti del corpo hanno ricevuto quando il corpo si è deformato, in guisa che le forze elastiche sviluppate fanno equilibrio alle forze date. Denotiamo con  $P$  il potenziale di queste forze elastiche in un elemento del corpo. Se poniamo:

$$\frac{du}{dx} = a, \quad \frac{dv}{dy} = b, \quad \frac{dw}{dz} = c$$

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 2f, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 2g, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 2h$$

il potenziale  $P$  sarà una funzione omogenea di secondo grado delle sei quantità  $a, b, c, f, g, h$ , con i coefficienti costanti se il corpo è omogeneo. Affinchè il corpo solido sia in equilibrio è necessario e sufficiente che in tutto lo spazio  $S$  siano soddisfatte le equazioni a derivate parziali di 2° ordine

$$\left. \begin{aligned} \rho X &= \frac{d}{dx} \frac{dP}{da} + \frac{d}{dy} \frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dz} \frac{dP}{2dg} \\ \rho Y &= \frac{d}{dx} \frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dy} \frac{dP}{db} + \frac{d}{dz} \frac{dP}{2df} \\ \rho Z &= \frac{d}{dx} \frac{dP}{2dg} + \frac{d}{dy} \frac{dP}{2df} + \frac{d}{dz} \frac{dP}{dc} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

e sopra tutta la superficie  $\sigma$  le equazioni a derivate parziali di 1° ordine

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{dP}{da} \alpha + \frac{dP}{2dh} \beta + \frac{dP}{2dg} \gamma \\ M &= \frac{dP}{2dh} \alpha + \frac{dP}{db} \beta + \frac{dP}{2df} \gamma \\ N &= \frac{dP}{2dg} \alpha + \frac{dP}{2df} \beta + \frac{dP}{dc} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  denotano i coseni degli angoli che la normale alla superficie  $\sigma$ , diretta verso l'interno dello spazio  $S$ , fa colle direzioni positive degli assi delle  $x, y$  e  $z$ .

Siano dati due sistemi di forze  $X, Y, Z, L, M, N$  applicate allo stesso corpo solido elastico, e distinguiamo con un apice le forze del 1° sistema e le componenti degli spostamenti che loro fanno equilibrio, e con due apici le forze e gli spostamenti del 2° sistema. Moltiplichiamo rispettivamente le tre equazioni (1) nelle quali tutte le quantità sono distinte con un apice per  $u'' dS, v'' dS, w'' dS$ , sommiamo e integriamo a tutto lo spazio  $S$ . Effettuando la nota integrazione per parti nel secondo membro e ponendo mente all'equazioni (2), avremo

$$\left. \begin{aligned} \rho \int_S (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') dS &= - \int_{\sigma} (L' u'' + M' v'' + N' w'') d\sigma \\ &- \int_S \left( \frac{dP'}{da'} \alpha'' + \frac{dP'}{db'} \beta'' + \frac{dP'}{dc'} \gamma'' + \frac{dP'}{df'} f'' + \frac{dP'}{dg'} g'' + \frac{dP'}{dh'} h'' \right) dS. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Applicando lo stesso processo all'equazioni (1) con due apici, si trova

$$\left. \begin{aligned} \rho \int_S (X'' u' + Y'' v' + Z'' w') dS &= - \int_{\sigma} (L'' u' + M'' v' + N'' w') d\sigma \\ &- \int_S \left( \frac{dP''}{da''} \alpha' + \frac{dP''}{db''} \beta' + \frac{dP''}{dc''} \gamma' + \frac{dP''}{df''} f' + \frac{dP''}{dg''} g' + \frac{dP''}{dh''} h' \right) dS. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ora essendo  $P'$  e  $P''$  le funzioni che si ottengono sostituendo, nella funzione omogenea di 2° grado  $P$ , alle  $a, b, c, f, g, h$  una volta le stesse lettere con un apice e l'altra con due, sarà

$$\frac{dP'}{da'} a'' + \frac{dP'}{db'} a'' + \dots = \frac{dP''}{da''} a' + \frac{dP''}{db''} b' + \dots$$

quindi sottraendo la equazione (4) dalla (3) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\tau} (L' u'' + M' v'' + N' w'') d\sigma + \rho \int_S (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') dS \\ = \int_{\tau} (L'' u' + M'' v' + N'' w') d\sigma + \rho \int_S (X'' u' + Y'' v' + Z'' w') dS. \end{aligned}$$

Onde il seguente teorema:

Se, in un corpo solido elastico omogeneo, due sistemi di spostamenti fanno rispettivamente equilibrio a due sistemi di forze, la somma dei prodotti delle componenti delle forze del primo sistema per le corrispondenti componenti degli spostamenti degli stessi punti nel secondo sistema è uguale alla somma dei prodotti delle componenti delle forze del secondo sistema per le componenti degli spostamenti nei medesimi punti del primo sistema.

In questo teorema è supposto che le componenti degli spostamenti nei due sistemi siano funzioni finite continue e a un sol valore insieme colle loro derivate prime in tutto lo spazio  $S$ .

Se il corpo è isotropo il potenziale  $P$  ha la forma:

$$P = -\lambda(a + b + c)^2 - \mu(a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2)$$

e le equazioni (1) divengono

$$\left. \begin{aligned} (2\lambda + \mu) \frac{d\Theta}{dx} + \mu \Delta^2 u + \rho X &= 0 \\ (2\lambda + \mu) \frac{d\Theta}{dy} + \mu \Delta^2 v + \rho Y &= 0 \\ (2\lambda + \mu) \frac{d\Theta}{dz} + \mu \Delta^2 w + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e le equazioni (2)

$$\left. \begin{aligned} L + 2\left(\lambda\Theta + \mu\frac{du}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\beta + \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma &= 0 \\ M + \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\alpha + 2\left(\lambda\Theta + \mu\frac{dv}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\gamma &= 0 \\ N + \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\beta + 2\left(\lambda\Theta + \mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dove

$$\Theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

e

$$\Delta^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Se prendiamo

$$u'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi, \quad v'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta, \quad w'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta$$

dove  $r$  denota la distanza di un punto qualunque di coordinate  $(x, y, z)$  da un punto di coordinate  $(x', y', z')$  dello spazio  $S$  occupato dal corpo, poichè

$$\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$$

avremo

$$\Theta'' = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

$$\Delta^2 u'' = \Delta^2 \xi, \quad \Delta^2 v'' = \Delta^2 \eta, \quad \Delta^2 w'' = \Delta^2 \zeta;$$

quindi se le tre funzioni  $\xi, \eta, \zeta$  sono finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate, e soddisfano alle tre equazioni (5), nelle quali  $X=Y=Z=0$  in tutto lo spazio  $S$ , anche le tre funzioni  $u'', v'', w''$  soddisferanno nello stesso spazio a queste equazioni, e saranno finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate in tutto lo spazio  $S'$ , che si ottiene togliendo da  $S$  uno spazio  $s$  piccolo quanto si vuole che contenga il punto  $(x', y', z')$ , nel quale la funzione  $\frac{1}{r}$  e le sue derivate divengono infinite. Quindi abbiamo, nella parte di corpo solido che occupa lo spazio  $S'$ ,

il sistema delle forze  $(X', Y', Z')$  che agiscono sopra ciascun punto di  $S'$ , delle forze  $(L', M', N')$  che agiscono sopra la parte  $\sigma$  del contorno di questo spazio, e delle tensioni  $(L'_1, M'_1, N'_1)$  che agiscono sopra l'altra parte  $\sigma'$  del contorno, essendo  $\sigma'$  la superficie che separa lo spazio  $S$  dallo spazio  $s$ , e il sistema degli spostamenti  $(u', v', w')$  che fanno equilibrio a queste forze. Abbiamo inoltre il sistema di forze che risultano dalle tensioni  $(L'', M'', N'')$  ed  $(L''_1, M''_1, N''_1)$  prodotte rispettivamente alle superficie  $\sigma$  e  $\sigma'$  dagli spostamenti  $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, \frac{d\frac{1}{r}}{dy}, \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)$ , e di quelle che risultano dalle tensioni  $(L^0, M^0, N^0)$  ed  $(L^0_1, M^0_1, N^0_1)$  prodotte dagli spostamenti  $(\xi, \eta, \zeta)$ , e il sistema degli spostamenti  $(u'', v'', w'')$  che fanno equilibrio a questo sistema di forze. Quindi possiamo applicare il teorema precedente, ed osservando che lo spazio  $s$  si può prendersi infinitesimo, e perciò

$$\int_{\sigma'} (L^0_1 u' + M^0_1 v' + N^0_1 w') d\sigma' = 0,$$

$$\int_{\sigma'} (L'_1 \xi + M'_1 \eta + N'_1 \zeta) d\sigma' = 0,$$

e che

$$X'' = Y'' = Z'' = 0,$$

si ottiene

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + M' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + N' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] d\sigma \\ & + \int_{\sigma'} \left( L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma' \\ & + \rho \int_S \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + Y' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + Z' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] dS = \\ & = \int_{\sigma} [(L'' + L^0)u' + (M'' + M^0)v' + (N'' + N^0)w'] d\sigma \\ & + \int_{\sigma'} (L''_1 u' + M''_1 v' + N''_1 w') d\sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ora sostituendo i valori di  $L'_1, M'_1, N'_1$  tratti dalle (6), ed osservando che se prendiamo per  $\sigma'$  una sfera col centro nel punto  $(x' y' z')$  abbiamo sopra  $\sigma$

$$\alpha = \frac{dx}{dr}, \quad \beta = \frac{dy}{dr}, \quad \gamma = \frac{dz}{dr}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma'} \left( L'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + M'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + N'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right) d\sigma' \\ &= - \int_{\sigma'} \left[ 2\lambda \Theta' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dr} + 2\mu \left( \frac{du'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + \frac{dv'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + \frac{dw'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right) \right] d\sigma' \end{aligned}$$

e sostituendo per  $L_1'', M_1'', N_1''$  i valori dati dalle equazioni (6) quando in esse si ponga

$$u = \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx}, \quad v = \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy}, \quad w = \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz},$$

si ottiene

$$\int_{\sigma'} (L_1'' u' + M_1'' v' + N_1'' w') d\sigma' = - 2\mu \int_{\sigma'} \left( u' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + v' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + w' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right) d\sigma'.$$

Onde:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma'} \left( L'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + M'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + N'_1 \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} (L_1'' u' + M_1'' v' + N_1'' w') d\sigma' = \\ &= - 2\lambda \int_{\sigma'} \Theta' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dr} d\sigma' - 2\mu \int_{\sigma'} \left( \frac{du'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} - u' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} \right) d\sigma' \\ & - 2\mu \int_{\sigma'} \left( \frac{dv'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} - v' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} \right) d\sigma' - 2\mu \int_{\sigma'} \left( \frac{dw'}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} - w' \frac{d}{dr} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right) d\sigma' \\ &= 8\pi(\lambda + \mu) \Theta \end{aligned}$$

denotando con  $\Theta$  il valore di  $\Theta'$  nel punto  $x', y', z'$ .

Sostituendo nella equazione (7) si ottiene

$$\begin{aligned} 8\pi(\lambda + \mu)\Theta = & - \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + M' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + N' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] d\sigma \\ & + \int_{\sigma} [(L'' + L^0)u' + (M'' + M^0)v' + (N'' + N^0)w'] d\sigma \\ & - \int_{s'} \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + Y' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + Z' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] dS'. \end{aligned}$$

Essendo la sfera  $s$  infinitesima e  $\xi, \eta, \zeta, X', Y', Z'$  funzioni sempre finite sarà:

$$\int_s (X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta) ds = 0;$$

abbiamo inoltre, denotando con  $\varepsilon$  il raggio della sfera infinitesima  $s$ , e con  $\varpi$  la superficie della sfera di raggio uguale all'unità,

$$\int_s \left( X' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + Y' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + Z' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) ds = - \int_0^s \int_{\varpi} (X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma) dr d\varpi$$

che è infinitesimo dell'ordine di  $\varepsilon$ . Dunque l'integrale triplo, invece di estenderlo allo spazio  $S'$  si può estendere allo spazio  $S'$  più lo spazio  $s$ , ossia allo spazio  $S$ .

Se ora le funzioni  $\xi, \eta, \zeta$  si prendono in modo che sia

$$L^0 + L'' = 0$$

$$M^0 + M'' = 0$$

$$N^0 + N'' = 0$$

avremo

$$\begin{aligned} 8\pi(\lambda + \mu)\Theta = & - \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + M' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + N' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] d\sigma \\ & - \rho \int_s \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + Y' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) + Z' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] dS \end{aligned}$$

e così il coefficiente di condensazione  $\Theta$  espresso per le sole quantità date ( $L', M', N', X', Y', Z'$ ).

Le tre funzioni  $\xi, \eta, \zeta$ , che qui tengono il luogo che la funzione di GREEN ha nella espressione delle funzioni potenziali, hanno un significato fisico, come lo ha la funzione di GREEN nella elettrostatica.

Infatti:

$$L^0 = -L'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$$

$$M^0 = -M'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dy}$$

$$N^0 = -N'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

quindi il teorema:

Le funzioni  $\xi, \eta, \zeta$  esprimono le componenti degli spostamenti che prende un corpo elastico isotropo per fare equilibrio a forze applicate alla superficie soltanto, l'azione delle quali è per ogni punto di applicazione uguale in intensità e direzione a quella esercitata da un elemento magnetico situato nel punto  $(x', y', z')$ , di momento  $2\mu$ , coll'asse parallelo alla normale alla superficie nel punto di applicazione, sopra un polo magnetico situato in questo punto.

Prendiamo:

$$u'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi, \quad v'' = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta, \quad w'' = \zeta$$

dove  $r$  ha sempre lo stesso significato e  $\xi, \eta, \zeta$  sono funzioni finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate, che soddisfano in tutto lo spazio  $S$  all'equazioni (5), nelle quali:

$$X'' = Y'' = Z'' = 0.$$

Le funzioni  $u'', v'', w''$  saranno anch'esse finite, continue e a un sol valore e soddisferanno alle stesse equazioni in tutto lo spazio  $S'$  che si ottiene togliendo da  $S$  la sfera infinitesima  $s$  che ha il centro nel punto  $(x', y', z')$ .



Denotiamo con  $L'_1, M'_1, N'_1$  le componenti delle tensioni dovute agli spostamenti  $u', v', w'$  sopra la superficie sferica  $\sigma'$  contorno dello spazio  $S$ : con  $L'', M'', N''$  le componenti delle tensioni, dovute agli spostamenti  $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}, -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, 0\right)$ , sopra la superficie  $\sigma$ , e con  $L''_1, M''_1, N''_1$  le componenti delle tensioni dovute agli stessi spostamenti sopra  $\sigma'$ ; con  $L^0, M^0, N^0$  le componenti delle tensioni sopra  $\sigma$ , dovute agli spostamenti  $(\xi, \eta, \zeta)$  e con  $L^0_1, M^0_1, N^0_1$  quelle sopra  $\sigma'$  dovute ai medesimi spostamenti. Osservando che si ha

$$\int_{\sigma'} (L'_1 \xi + M'_1 \eta + N'_1 \zeta) d\sigma' = 0,$$

$$\int_{\sigma'} (L^0_1 u' + M^0_1 v' + N^0_1 w') d\sigma' = 0,$$

e che

$$X'' = Y'' = Z'' = 0$$

avremo, applicando il nostro teorema

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + M' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + N' \zeta \right] d\sigma + \int_{\sigma'} \left( L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right) d\sigma' \\ & + \rho \int_S \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + Y' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + Z' \zeta \right] dS' \\ & = \int_{\sigma} [(L'' + L^0) u' + (M'' + M^0) v' + (N'' + N^0) w'] d\sigma \\ & + \int_{\sigma'} (L''_1 u' + M''_1 v' + N''_1 w') d\sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sostituendo i valori delle componenti delle tensioni  $L', M'$  abbiamo

$$\begin{aligned} L' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} &= 2\mu \left( \frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy} \right) \\ &+ \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \left[ \left( \frac{dw'}{dy} - \frac{dv'}{dz} \right) \frac{dx}{dr} + \left( \frac{du'}{dz} - \frac{dw'}{dx} \right) \frac{dy}{dr} + \left( \frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy} \right) \frac{dz}{dr} \right] \end{aligned}$$

e sostituendo i valori delle componenti delle tensioni  $L''_1, M''_1, N''_1$ , dovute agli spostamenti  $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}, -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, 0\right)$  sopra la superficie  $\sigma'$ , si ha

$$L''_1 u' + M''_1 v' + N''_1 w' = 2\mu \left( v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) + \mu \left[ \frac{dx}{dr} \left( v' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} - w' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dz} \right) + \frac{dy}{dr} \left( w' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} - u' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \right) + \frac{dz}{dr} \left( u' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dz} - v' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \right) \right].$$

Onde:

$$L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - L''_1 u' - M''_1 v' - N''_1 w' = 2\mu \left( \frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy} \right) + \mu \left[ \frac{dx}{dr} \left( \frac{dw'}{dy} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - \frac{dv'}{dz} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) + \frac{dy}{dr} \left( \frac{du'}{dz} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - \frac{dw'}{dx} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) + \frac{dz}{dr} \left( \frac{dv'}{dz} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - \frac{du'}{dy} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) \right].$$

Poniamo:

$$\frac{Z - Z'}{r} = \gamma$$

ed osserviamo che si ha

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy} \frac{dx}{dr} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \frac{dy}{dr}, \dots$$

avremo:

$$L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - L''_1 u' - M''_1 v' - N''_1 w' = 2\mu \left( \frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) + \frac{\mu}{r} \left( \frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left[ \frac{dx}{dr} \left( \frac{d(v'\gamma)}{dz} - \frac{d(w'\gamma)}{dy} \right) + \frac{dy}{dr} \left( \frac{d(w'\gamma)}{dx} - \frac{d(u'\gamma)}{dz} \right) + \frac{dz}{dr} \left( \frac{d(u'\gamma)}{dy} - \frac{d(v'\gamma)}{dx} \right) \right].$$

Moltiplicando per  $d\sigma'$  e integrando a tutta la superficie  $\sigma'$ , se osserviamo che  $r$  è costante sopra  $\sigma'$ , ed  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $\gamma$  sono funzioni finite e continue insieme colle loro derivate in tutto lo spazio  $s$ , e quindi l'integrale dell'ultimo termine per un teorema noto è uguale a zero, avremo:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma'} \left( L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - L''_1 u' - M''_1 v' - N''_1 w' \right) d\sigma' \\ &= 2\mu \int_{\sigma'} \left( \frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) d\sigma' + \mu \int_{\sigma'} \left( \frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy} \right) \frac{d\sigma'}{r^2} \\ &= 4\pi\mu \left( \frac{du'}{dy} - \frac{dv'}{dx} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione (8) si ottiene:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu \left( \frac{du'}{dy} - \frac{dv'}{dx} \right) &= - \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + M' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + N' \zeta \right] d\sigma \\ &+ \int_{\sigma} [(L'' + L^0) u' + (M'' + M^0) v' + (N'' + N^0) w'] d\sigma \\ &- \int_S \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + Y' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + Z' \zeta \right] dS. \end{aligned}$$

Abbiamo posto lo spazio  $S$  invece di  $S'$  perchè anche in questo caso l'integrale esteso alla sfera infinitesima  $s$  è uguale a zero.

Se determiniamo  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  in modo che sia sopra  $\sigma$ :

$$L'' + L^0 = 0, \quad M'' + M^0 = 0, \quad N'' + N^0 = 0,$$

avremo:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu \left( \frac{du'}{dy} - \frac{dv'}{dx} \right) &= - \int_{\sigma} \left[ L' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + M' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + N' \zeta \right] d\sigma \\ &- \int_S \left[ X' \left( \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi \right) + Y' \left( -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta \right) + Z' \zeta \right] dS \end{aligned}$$

cioè la componente della rotazione dell'elemento che si trova nel punto  $(x', y', z')$  espressa per le sole forze che agiscono sul corpo.

Formule analoghe si hanno per le altre due componenti.