Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

Von A. Mayer in Leipzig.

Jede einzelne lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist äquivalent einem gewissen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. In ganz ähnlicher Weise besteht zwischen den Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die eine gemeinsame Lösung zulassen, und zwischen gewissen Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen ein leicht erkennbarer reciproker Zusammenhang, der übrigens in einzelnen Fällen, z. B. bei der Ampère'schen Integrationsmethode derjenigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ein Zwischenintegral besitzen, schon mehrfach bemerkt und benutzt worden ist.

In der That, wenn die $m-1$ simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(I)} \qquad A_1(f) = 0 \quad , \quad A_2(f) = 0 \quad , \quad \ldots A_{m-1}(f) = 0,$$

in welchen allgemein:

$$A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + a^i_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + \cdots a^i_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist und die Coefficienten a^i_k gegebene Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, eine gemeinsame Lösung f besitzen, so ist diese Lösung zu gleicher Zeit und welche willkürlichen Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ man auch für $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}$ setzen mag, immer auch eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\lambda_1 A_1(f) + \lambda_2 A_2(f) + \cdots \lambda_{m-1} A_{m-1}(f) = 0,$$

also, einer willkürlichen Constanten gleichgesetzt, ein Integral der $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_{m-1} : \quad dx_m : \cdots\cdots : dx_n$$

$$= \lambda_1 : \quad \lambda_2 : \cdots : \quad \lambda_{m-1} : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a^h_m \cdots : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a^h_n$$

und folglich auch ein Integral der $n - m + 1$ linearen totalen Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \, dx_h, \qquad k = m, m+1, \ldots n,$$

die aus den vorhergehenden durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}$ hervorgehen, und man sieht unmittelbar, dass umgekehrt, wenn die Gleichung (II) ein Integral $f = \text{Const.}$ besitzen, d. h. wenn es eine Function f von $x_1, x_2, \ldots x_n$ giebt, deren Differential durch die Gleichungen (II) allein identisch Null wird, diese Function eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (I) ist.

Die Aufgabe, eine gemeinsame Lösung der $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen (I) zu finden, ist demnach identisch mit der Aufgabe, ein Integral der $n - m + 1$ linearen totalen Differentialgleichungen (II) zu entdecken. Hiernach steht zu erwarten, dass jede Methode, die uns die Gleichungen (II) integriren lehrt, gleichzeitig auch den Keim in sich enthalten muss zu einer Integrationsmethode der Gleichungen (I). Dieser Gedanke gab die Veranlassung zu den folgenden Untersuchungen, deren Hauptzweck es ist, einen Weg ausfindig zu machen, auf dem man durch möglichst wenig Integrationen zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung mehrerer gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function gelangen könne.

Dabei konnte aber von vornherein eine sehr wesentliche Vereinfachung eingeführt werden. Da nämlich, wie Herr Clebsch gezeigt hat*), jedes System solcher partieller Differentialgleichungen, das überhaupt eine gemeinsame Lösung besitzt, sich zurückführen lässt auf ein Jacobi'sches System, d. h. im Besonderen auf ein System von der Form (I), in welchem zwischen den Operationen A die $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ Identitäten stattfinden:

$$\text{(III)} \qquad A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0,$$

so war es auch nur nöthig, solche Systeme totaler Differentialgleichungen in Betracht zu ziehen, deren Coefficienten die aus (III) folgenden Bedingungen erfüllen.

Diese Systeme besitzen die Eigenschaft, dass ihnen durch $n - m + 1$ Integrale Genüge geschieht, und es wird sich zunächst zeigen, dass ihre Integration zurückkommt auf die vollständige Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie dies, unter Voraussetzung eines Systemes

*) Crelle J. 65, p. 257.

totaler Differentialgleichungen, welches die angegebene Zahl von Integralen besitzt, schon früher von Herrn Natani bemerkt worden ist*). Durch eine Transformation der gegebenen Gleichungen aber, die derjenigen nachgebildet ist, mit Hilfe derer Herr P. du Bois-Reymond die durch eine Gleichung integrirbaren linearen totalen Differentialgleichungen auf je eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln zurückzuführen gelehrt hat**), kann man bewirken, dass schon die Integration des ersten jener $m-1$ Systeme zur vollständigen Integration der gegebenen Gleichungen genügt, womit gleichzeitig die vollständige Lösung des äquivalenten Jacobi'schen Systemes zurückgeführt ist auf die vollständige Integration eines einzigen Systems von $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Hieraus endlich wird sich, was für die Anwendungen ungleich wichtiger ist, ergeben, dass zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung des Jacobi'schen Systemes nur die Kenntniss eines einzigen Integrales jenes Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen nothwendig ist, wodurch z. B. die Anzahl der Integrale, deren man zur vollständigen Lösung einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bedarf, wenn man absieht vom ersten, gerade um die Hälfte reducirt wird gegen die Anzahl von Integralen, deren Kenntniss nach der vorzüglichsten der früheren Methoden, der Methode von Weiler-Clebsch***) erforderlich war.

§ 1.

Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität.

Zu den Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen, die im Folgenden ausschliesslich betrachtet werden sollen, gelangt man, wenn man $n-m+1$ beliebige, von einander unabhängige Functionen von n Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$ willkürlichen Constanten gleichsetzt und die also entstehenden Gleichungen vollständig differentiirt. Durch Auflösung der derivirten Gleichungen nach $n-m+1$ von den n Differentialen erhält man $n-m+1$ simultane Differentialgleichungen von der Form:

$$(1) \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h\, dx_h$$

$$k = m,\, m+1, \ldots n,$$

in denen die a_k^h gegebene Functionen aller n Variabeln sind und denen

*) Crelle J. 58, p. 303.
**) Crelle J. 70, p. 312.
***) Crelle J. 65, p. 263.

in Folge ihrer Entstehungsart dadurch genügt werden kann, dass man für $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ passende Functionen der unabhängigen Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ setzt, Functionen, die überdies noch $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthalten. Um mich kurz fassen zu können, will ich ein solches System linearer totaler Differentialgleichungen (1) ein *unbeschränkt integrables* nennen.

Wenn umgekehrt ein System linearer totaler Differentialgleichungen von der Form (1) vorliegt, so fragt es sich zunächst, unter welchen Bedingungen ist dasselbe unbeschränkt integrabel, und weiter, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, wie kann man dasselbe integriren?

Soll es $n - m + 1$ Functionen $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ geben, welche die gegebenen Gleichungen (1) identisch erfüllen, so muss, wenn h und i irgend zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots m - 1$ bezeichnen, für diese Functionen

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_h} = a_k^h \quad , \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = a_k^i \,, \tag{2}$$

folglich, wenn man durch die Charakteristik d andeutet, dass bei der Differentiation $x_m \ldots x_n$ als solche Functionen von x_h und x_i anzusehen sind, für welche die Relationen (2) stattfinden,

$$\frac{d\, a_k^h}{d x_i} - \frac{d\, a_k^i}{d x_h} = 0$$

werden, oder es müssen diese Functionen den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0. \tag{3}$$

Führt man allgemein die Bezeichnung $A_i(f)$ ein für die Operation

$$A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \,, \tag{4}$$

so kann man die Gleichungen (3) kürzer also schreiben:

$$A_i\left(a_k^h\right) - A_h\left(a_k^i\right) = 0 \,. \tag{5}$$

Diesen Bedingungen, deren Anzahl

$$= (n - m + 1) \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

ist, muss demnach Genüge geschehen durch diejenigen Functionen $x_m \ldots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_{m-1}$, welche die Gleichungen (1) lösen. Wenn aber, wie hier angenommen wird, diese Functionen $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthalten sollen, so ist dies nicht anders möglich, als wenn diese Bedingungen schon an sich identisch sind.

Das identische Bestehen der Relationen (3) oder (5) ist hiernach jedenfalls nothwendig, wenn die Gleichungen (1) unbeschränkt integrabel sein sollen. Dass dasselbe auch hinreichend ist, wird der folgende § zeigen, welcher lehrt, wie man unter Voraussetzung der Identitäten (3) $x_m \dots x_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_{m-1}$ und von $n-m+1$ willkürlichen Constanten so bestimmen kann, dass den Gleichungen (1) identisch genügt wird.

Zuvor bemerke ich noch, dass, da nach (4):

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) \\ = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left\{A_i(a_\lambda^k) - A_k(a_\lambda^i)\right\} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

ist, die Identitäten (5) auch die folgenden nach sich ziehen:

$$A_i(A_k(f)) = A_k(A_i(f)), \tag{6}$$

die für jede beliebige Function f gelten, und umgekehrt die Bedingungen (5) ersetzen können.

§ 2.

Zurückführung des Systems (1), falls die Relationen (3) identisch stattfinden, auf $m-1$ Systeme von je $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn es überhaupt $n-m+1$ Functionen $x_m \dots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_{m-1}$ giebt, welche die Gleichungen (1) erfüllen, so müssen dieselben zunächst den $n-m+1$ Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_1} = a_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = a_{m+1}^1, \dots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = a_n^1. \tag{7}$$

Diese Gleichungen, in denen $x_2 \dots x_{m-1}$ nur wie Constante eingehen, bilden ein System von $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x_m \dots x_n$ und x_1.

Sind daher:

$$\varphi_\lambda(x_1\, x_2 \dots x_{m-1}\, x_m \dots x_n) = c_\lambda \\ \lambda = m,\ m+1, \dots n \tag{8}$$

$n-m+1$ von einander unabhängige Integrale dieses Systems, so müssen die Lösungen $x_m \dots x_n$ der Gleichungen (1) enthalten sein in den Gleichungen (8), deren Integrationsconstanten c_λ nur von $x_2 \dots x_{m-1}$ abhängen dürfen.

Die Gleichungen (8), als vollständige Integralgleichungen des Systems (7), sind stets auflösbar nach $x_m \dots x_n$. Man kann diese Gleichungen daher benutzen, um durch dieselben $c_m \dots c_n$ an Stelle von $x_m \dots x_n$ als neue abhängige Variabeln einzuführen.

Aus (8) ergiebt sich durch vollständige Differentiation und Substitution der Gleichungen (1):

$$dc_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_h}\right) dx_h \,.$$

Hierin ist aber der Coefficient von dx_1 identisch Null, weil die Gleichungen (8) nach Voraussetzung Integrale des Systems (7) sind. Unter Einführung der Bezeichnung (4) bleibt daher nur:

$$(9) \qquad dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} A_h(\varphi_\lambda)\, dx_h \,.$$

Aus diesen $n - m + 1$ Gleichungen, in denen man rechter Hand für $x_m \ldots x_n$ die aus den Gleichungen (8) folgenden Werthe einzusetzen hat, sind demnach die neu eingeführten Grössen $c_m \ldots c_n$ zu bestimmen.

Sollen aber die Gleichungen (8) Integrale des Systems (7) bleiben, so müssen die c_λ unabhängig von x_1 werden; also darf x_1 in den Gleichungen (9) nicht vorkommen.

Dies ist in der That auch der Fall. Da nämlich nach (6)

$$A_1(A_h(f)) = A_h(A_1(f))$$

und $A_1(\varphi_\lambda) = 0$ ist, so ist auch

$$f = A_h(\varphi_\lambda)$$

eine Lösung der Gleichung $A_1(f) = 0$, oder $A_h(\varphi_\lambda) = \text{Const.}$ ein Integral des Systems (7); daher werden nach Substitution der Werthe von $x_m \ldots x_n$, die sich aus den Integralen (8) dieses Systems ergeben, die Ausdrücke $A_h(\varphi_\lambda)$ unabhängig von x_1.

Die Gleichungen (9) sind somit sämmtlich frei von x_1 *und können sich daher nicht ändern, wenn man in ihnen dieser Variabeln irgend welchen Werth beilegt.*

Das gegebene System (1) ist nunmehr zurückgeführt auf das System (9), welches nur noch $m - 2$ unabhängige Variabeln enthält. Dies letztere System lässt sich im Allgemeinen, d. h. solange man über das System Integrale der Gleichungen (7), durch welches die c_λ als Integrationsconstanten eingeführt werden, nichts Näheres festsetzt, offenbar erst aufstellen, nachdem man diese Integrale gefunden hat. Nimmt man aber für die c_λ ein bestimmtes System Integrationsconstanten der Gleichungen (7), nämlich die Anfangswerthe der abhängigen Variabeln, so erhält man den grossen Vortheil, die Gleichungen (9) vor aller Integration bilden zu können.

Man kann dies direct aus dem System (9) erkennen, es zeigt sich aber noch klarer, wenn man ausgeht von einem andern, den Gleichungen (9) äquivalenten Systeme.

Bezeichnet man durch:

$$(10) \qquad x_k = \psi_k(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, c_m \ldots c_n)$$

die Auflösungen der Integrale (8) nach $x_m \ldots x_n$ oder die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7), und führt direct durch

(10) die c_λ als neue abhängige Variable in die Gleichungen (1) ein, so erhält man jetzt zur Bestimmung der c_λ die Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\lambda} dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right) dx_h$$

in denen durch die Substitutionen (10) auch die a_k^h auszudrücken sind in $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, c_m \ldots c_n$, und bei deren Aufstellung benutzt worden ist, dass durch diese Substitutionen identisch

$$a_k^1 - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} = 0$$

wird.

Wenn man diese $n - m + 1$ Gleichungen nach $dc_m \ldots dc_n$ auflöst, so muss man wiederum zu den Gleichungen (9) gelangen. Man kann daher die letzteren ersetzen durch die Gleichungen (11). Und da nach dem Vorhergehenden die Gleichungen (9) frei von x_1 sind, so ist es gestattet, *auch vor der Auflösung direct in den Gleichungen* (11) *der Variabeln x_1 irgend einen beliebigen Werth beizulegen*, für den diese Gleichungen noch auflösbar bleiben.

Dies vorausgeschickt seien nun

$$(12) \qquad x_k = \chi_k(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_m^0 \ldots x_n^0)$$

die vollständigen Lösungen der Gleichungen (7), ausgedrückt in x_1 und den Werthen $x_m^0 \ldots x_n^0$ der abhängigen Variabeln $x_m \ldots x_n$, welche dem constanten Anfangswerthe x_1^0 von x_1 angehören. — Dieser Anfangswerth x_1^0 kann beliebig gewählt werden, nur darf für denselben, damit die zugehörigen Werthe der abhängigen Variabeln willkürlich bleiben, keine der Grössen a_k^1 unendlich oder unbestimmt werden. — Die Ausdrücke χ_k, indem sie die Werthe sind, die sich durch Auflösung der aus den Integralen (8) folgenden Gleichungen

$$\varphi_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_m \ldots x_n) = \varphi_\lambda(x_1^0\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_m^0 \ldots x_n^0)$$

für die Variabeln x_k ergeben, haben dann die Eigenschaft, für $x_1 = x_1^0$ sich auf x_k^0 zu reduciren.

Setzt man daher in dem Systeme

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda^0} dx_\lambda^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \chi_k}{\partial x_h}\right) dx_h\,,$$

welches sich aus (1) ergiebt, wenn man durch die Substitutionen (12) die Anfangswerthe $x_m^0 \ldots x_n^0$ an Stelle von $x_m \ldots x_n$ als neue Variable einführt, und in welchem nach dem Vorhergehenden x_1 einen beliebigen Werth erhalten darf, $x_1 = x_1^0$, so reducirt sich dasselbe auf:

$$(13) \qquad dx_k^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} a_k^{h0}\, dx_h,$$

worin allgemein a_k^{h0} den Werth bezeichnet, den a_k^h durch die Substitutionen

$$x_1 = x_1^0 \quad , \quad x_m = x_m^0, \; \ldots \; x_n = x_n^0$$

annimmt.

Aus diesen $n - m + 1$ Gleichungen (13), die, wie man sieht, vor jeder Integration des Systems (7) aufgestellt werden können, sind also die Anfangswerthe als Functionen von $x_2 \ldots x_{m-1}$ zu bestimmen.

Die Gleichungen (13) aber bilden ein ganz ebensolches System wie die gegebenen Gleichungen (1), nur mit einer unabhängigen Variabeln x_1 weniger. Denn da nach Voraussetzung identisch:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda}\right) = 0$$

ist, so hat man auch identisch:

$$\frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^{i0}}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(a_\lambda^{i0} \frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_\lambda^0} - a_\lambda^{h0} \frac{\partial a_k^{i0}}{\partial x_\lambda^0}\right) = 0,$$

also erfüllt auch das System (13) die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität. Man kann dieses System daher genau so weiter behandeln, wie vorher das gegebene, nämlich durch Integration eines zweiten Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung dasselbe zurückführen auf ein unbeschränkt integrables System mit nur noch $m - 3$ unabhängigen Variabeln u. s. f., so dass man schliesslich nach Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen jedes unabhängig von den andern aufgestellt und behandelt werden kann, zur vollständigen Integration des gegebenen Systems (1) gelangen und durch ein recurrirendes System von Formeln $x_m \ldots x_n$ ausgedrückt in $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ und den $n - m + 1$ willkürlichen Constanten des letzten jener $m - 1$ Systeme erhalten wird.

§ 3.

Zurückführung des unbeschränkt integrablen Systems (1) auf ein einziges System von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Durch die im vorigen § angegebene Methode wird die Integration des gegebenen, unbeschränkt integrablen Systems (1) zurückgeführt auf die Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn aber der besondere Fall eintreten sollte, dass man die Constante x_1^0 so wählen könnte, dass für $x_1 = x_1^0$ sämmtliche $(m - 2)(n - m + 1)$ Grössen:

$$a_k^2 \quad a_k^3 \ldots a_k^{m-1}$$

den Werth Null erhielten, so würden die Gleichungen (13), auf welche durch Integration der Gleichungen (7) das gegebene System (1) zurückgeführt ist, sich auf

$$dx_k^0 = 0$$

reduciren und daher sofort ergeben

$$x_m^0 = \text{Const.} \quad , \quad x_{m+1}^0 = \text{Const.}, \ldots x_n^0 = \text{Const.}$$

Es würden uns dann also schon unmittelbar die vollständigen Lösungen des ersten jener $n - m + 1$ Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, ausgedrückt in x_1 und den Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $x_1 = x_1^0$, sobald darin diese Anfangswerthe als willkürliche, von $x_2 \ldots x_{m-1}$ unabhängige Constanten angesehen werden, die vollständigen Lösungen des Systems (1) ergeben.

Dieser scheinbar sehr besondere Fall lässt sich nun stets durch eine passende Transformation der Gleichungen (1) herbeiführen.

Führt man an Stelle von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ $m - 1$ andere Grössen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ durch $m - 1$ beliebige, von einander unabhängige Gleichungen

$$(14) \qquad x_h = x_h(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1})$$

als neue Variable ein, so verwandeln sich die Gleichungen (1) in:

$$(15) \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i \, d\alpha_i ,$$

worin:

$$(16) \qquad b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} .$$

Zu gleicher Zeit erhält man, wenn man in einer beliebigen Function f von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ die Substitutionen (14) macht:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

folglich:

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) .$$

Da wir aus dem Vorhergehenden wissen, dass das ursprüngliche System (1) ein unbeschränkt integrables ist, sobald die Identitäten (3) bestehen, so folgt unmittelbar, dass unter dieser Voraussetzung auch das transformirte System (15) dieselbe Eigenschaft besitzt und daher zwischen den Coefficienten b_k^i desselben die Relationen identisch stattfinden müssen:

$$(18) \qquad \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \right) = 0,$$

in denen $k = m, m+1, \dots n$ und ϱ und σ irgend zwei der Zahlen $1, 2, \dots m-1$ sind, und die, wenn wir allgemein

$$B_\varrho(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varrho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \tag{19}$$

setzen, die folgenden nach sich ziehen:

$$B_\varrho\big(B_\sigma(f)\big) = B_\sigma\big(B_\varrho(f)\big). \tag{20}$$

Dies lässt sich auch leicht durch die Rechnung verificiren.

Man hat nämlich nach (16):

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right)$$

und:

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} \right) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} a_\lambda^\mu \left(\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right).$$

Bildet man hiermit die linke Seite der Gleichung (18) und vertauscht in den negativen Gliedern die beiden Summationsindices h und μ, so erhält man:

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} \left\{ \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_\lambda} \right) \right\},$$

welche Formel direct nachweist, dass von den beiden Systemen identischer Relationen (3) und (18) das eine stets das andere nach sich zieht.

Man kann somit zur Integration des aus dem gegebenen unbeschränkt integrablen System (1) durch die Substitutionen (14) hervorgegangenen Systems (15) genau dieselbe Methode benutzen, die im vorigen § für die Integration von (1) gewonnen wurde.

Nach dieser werden wir zuerst die $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1, \dots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1 \tag{21}$$

vollständig zu integriren und die Integrationsconstanten auszudrücken haben durch die Werthe $x_m^0 \dots x_n^0$ der Variabeln $x_m \dots x_n$, welche dem constanten Anfangswerth $\alpha_1{}^0$ von α_1 entsprechen. Die also erhaltenen vollständigen Lösungen der Gleichungen (21) geben uns dann zugleich auch die vollständigen Lösungen des Systems (15), wenn wir in ihnen für $x_m^0 \ldots x_n^0$ diejenigen Functionen von $\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ setzen, die sich durch vollständige Integration des Systems ergeben:

$$(22) \qquad dx_k^0 = \sum_{i=2}^{i=m-1} b_k^{i0}\, d\alpha_i ,$$

dessen Coefficienten b_k^{i0} aus den Coefficienten

$$b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

der Gleichungen (15) durch die Annahmen:

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 \quad , \quad x_m = x_m^0 , \; \ldots , \; x_n = x_n^0$$

hervorgehen.

Nun aber steht uns die Wahl der Substitutionen (14) vollkommen frei und es erhellt leicht, dass wir dieselben immer so einrichten können, dass sämmtliche Coefficienten b_k^{i0} der Gleichungen (22) verschwinden. In der That brauchen wir zu dem Ende die Substitutionen (14) nur von der Form zu nehmen:

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h ,$$

worin α_1^0 und die x_h^0 Constante, dagegen $f_1\, f_2 \ldots f_{m-1}$ beliebige $m-1$ Functionen von $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ sind, die nur selbstverständlich stets so gewählt werden müssen, dass die Gleichungen (23) unabhängig von einander in Bezug auf $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ werden.

Hierdurch wird:

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right)$$

und für $i > 1$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i} .$$

Wenn wir daher der Grösse α_1^0 irgend einen solchen constanten Werth beilegen, dass keine der $m-1$ Functionen f_h unendlich oder unbestimmt wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, wenn wir überdies die Constanten

$$x_1^0\, x_2^0 \ldots x_{m-1}^0$$

so annehmen, dass für:

$$x_1 = x_1^0 \;, \; x_2 = x_2^0 , \ldots x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

sämmtliche a_k^h endlich und bestimmt bleiben, so wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ jedes $b_k^i = 0$, in welchem $i > 1$ ist, während die Grössen b_k^1 für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ endliche und bestimmte Werthe behalten.

Bei dieser Wahl der Substitutionen (14) sind daher die vollständigen Lösungen der $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

(21), ausgedrückt in α_1 und den Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, wenn man in denselben diese Anfangswerthe als willkürliche, von $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_{m-1}$ unabhängige Constanten betrachtet, zugleich auch die Lösungen des Systems totaler Differentialgleichungen (15) dar. Aus diesen erhält man aber die Lösungen des gegebenen Systems (1), wenn man für $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ die aus den Substitutionen (23) folgenden Werthe einsetzt.

Die Integration des gegebenen Systems von $n - m$ linearen totalen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h\, dx_h$$

$$k = m,\ m+1, \ldots n$$

lässt sich somit in der Voraussetzung, dass zwischen den Coefficienten desselben die identischen Relationen bestehen:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0$$

in folgender Weise zurückführen auf die Integration eines einzigen Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

Man führt an Stelle von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ durch die, unter den vorhin angegebenen Beschränkungen willkürlich gewählten Substitutionen

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h$$

die Grössen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ als neue unabhängige Variable ein. Hierdurch geht das gegebene System (1) über in das folgende:

$$(15) \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i\, d\alpha_i\,,$$

aus dessen Coefficienten

$$(24) \qquad \begin{cases} b_k^1 = \sum\limits_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \dfrac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right) \\ b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum\limits_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \dfrac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1 \end{cases}$$

$x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ durch die Substitutionen (23) zu eliminiren sind. Hat man dann die aus (15) folgenden $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(25) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1\,, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1\,, \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1$$

vollständig integrirt und die Integrationsconstanten ausgedrückt durch die Anfangswerthe $x_m^0 \ldots x_n^0$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, so sind die so erhaltenen Gleichungen zwischen

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n$$

und den willkürlichen Constanten $x_m^0 \dots x_n^0$ die vollständigen Integralgleichungen sowohl der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25) *als auch der totalen Differentialgleichungen* (15) *und man braucht daher nur aus diesen Gleichungen $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ mit Hilfe der Formeln* (23) *zu eliminiren, um die vollständigen Integralgleichungen des gegebenen Systems* (1) *zu erhalten.*

Die einfachste Art, den an die Substitutionen (23) gestellten Forderungen in allen Fällen zu genügen, ist die, dass man

$$x_1 = \alpha_1$$

und für $h = 2, 3, \dots m - 1$

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, \alpha_h$$

setzt, worin die Constanten $\alpha_1^0\, x_2^0 \dots x_{m-1}^0$ nur so zu wählen sind, dass für

$$x_1 = \alpha_1^0 \quad , \quad x_2 = x_2^0, \dots x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

keine der Grössen a_k^h unendlich oder unbestimmt wird. Man erhält dann:

$$b_k^1 = a_k^1 + \alpha_2\, a_k^2 + \cdots \alpha_{m-1}\, a_k^{m-1}$$
$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, a_k^i \quad , \quad i > 1 .$$

Bei der Ableitung des vorstehenden Satzes ist kein Gebrauch gemacht worden von der Aequivalenz der unbeschränkt integrablen Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und der Jacobi'schen Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen in der bestimmten Absicht, die Integration der letzteren lediglich aus der Untersuchung der ersteren zu schöpfen. Will man aber die bekannten Eigenschaften der Jacobi'schen Systeme zu Hilfe nehmen, so kann man sich von der Zurückführbarkeit des unbeschränkt integrablen Systems (1) auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (25) auch noch auf anderem kürzeren Wege ganz ohne Rechnung überzeugen. Um den Gang der Untersuchung nicht aufzuhalten, lasse ich diese zweite Ableitung des obigen Satzes, die sich noch mehr als die vorhergehende der Schlussweise anschliesst, durch welche Herr P. du Bois-Reymond diese Zurückführbarkeit für den speciellen Fall einer einzelnen linearen totalen Differentialgleichung nachgewiesen hat, erst am Schlusse (§ 7.) folgen.

§ 4.

Integration des Jacobi'schen Systemes $A_h(f) = 0$.

Nach dem vorigen § sind die vollständigen Integralgleichungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25), ausgedrückt in α_1 und den constanten Anfangswerthen von $x_m \dots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ gleichzeitig auch die vollständigen Integralgleichungen des Systems totaler Differentialgleichungen (15), das aus dem gegebenen (1) durch die Substitutionen (23) hervorgeht.

Die vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen aber die Eigenschaft, dass sie auflösbar sein müssen, sowohl nach den abhängigen Variabeln als auch nach den Anfangswerthen derselben. Man kann daher die vollständigen Integralgleichungen des Systems (25) benutzen, einmal, um aus ihnen $x_m \dots x_n$, das andere Mal, um $x_m^0 \dots x_n^0$ zu bestimmen. Es seien:

(26) $$x_k = \psi_k(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\, x_m^0 \dots x_n^0)$$

und:

(27) $$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\, x_m \dots x_n)$$

die also erhaltenen Werthe der x_k und der x_λ^0. Durch die Substitutionen (26) müssen dann die Gleichungen (27) identisch erfüllt werden, müssen folglich die Ausdrücke

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h}$$

identisch verschwinden. Da aber nach dem Vorhergehenden diese Substitutionen zugleich dem Systeme (15) oder den Gleichungen:

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h} = b_\lambda^h$$

genügen, so muss dasselbe auch von den Ausdrücken gelten:

$$B_h(\chi_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda},$$

wie auch direct daraus hervorgeht, dass die Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ durch die Substitutionen (26) unabhängig von α_1 werden müssen, weil bei unseren Annahmen $B_1(\chi_k) = 0$ und damit wegen

$$B_1(B_h(f)) = B_h(B_1(f))$$

zugleich auch $B_1(B_h(\chi_k)) = 0$ ist, diese Ausdrücke aber verschwinden, wenn man $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$ setzt, weil hierdurch χ_k sich auf x_k reduciren muss und überdies jedes $b_k^h = 0$ wird, in dem $h > 1$.

Das Resultat Null der Substitution der Werthe (26) in die Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ kann aber nicht abgeändert werden, wenn man darin rückwärts für die x_k^0 ihre Werthe (27) einsetzt, wodurch die Substitution selbst aufgehoben wird. Also muss schon vor der Substitution jedes

$$B_h(\chi_k) = 0$$

sein, oder es sind

$$f = \chi_m,\ \chi_{m+1},\ \dots \chi_n$$

Lösungen des Jacobi'schen Systems von $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Dieses Jacobi'sche System aber geht, wie die Formel (17) lehrt, aus dem andern:

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

dadurch hervor, dass man durch die Substitutionen (23) $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ an Stelle von $x_1\ x_2 \ldots x_{m-1}$ einführt und muss sich umgekehrt wieder in letzteres verwandeln, wenn man rückwärts die α durch die x ausdrückt. Die Lösungen $f = \chi_m, \chi_{m+1}, \ldots \chi_n$ des ersten Systems geben uns daher, sobald wir in denselben für $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ die aus den Substitutionen (23) folgenden Werthe setzen, zugleich auch die Lösungen des zweiten, dem gegebenen System (1) äquivalenten Jacobischen Systems.

Hieraus entspringt die folgende Methode zur vollständigen Integration des gegebenen Jacobi'schen Systems von $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(28) \qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$
$$h = 1, 2, \ldots m-1.$$

Man drücke durch die $m-1$, unter den im vor. § angegebenen Beschränkungen beliebig gewählten Substitutionen

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1})$$

die Grössen:

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1}\right), \text{ und}$$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1$$

durch $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\ x_m \ldots x_n$ aus und bilde mit den ersteren die $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \ \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1, \ \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1.$$

Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt und die Integrationsconstanten ausgedrückt durch die Anfangswerthe $x_m^0 \ldots x_n^0$ der abhängigen Variabeln für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, so liefert die Auflösung der erhaltenen Integralgleichungen nach diesen Anfangswerthen $n-m+1$ Functionen

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\ x_m \ldots x_n),$$

welche die $n-m+1$ Lösungen sind des Jacobi'schen Systems:

$$(29) \qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

und die, wenn man aus ihnen mit Hilfe der Gleichungen (23) $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ *eliminirt, übergehen in die* $n - m + 1$ *Lösungen des gegebenen Jacobi'schen Systems* (28).

§ 5.

Zur Auffindung einer Lösung des gegebenen Jacobi'schen Systems (28) ist nur erforderlich die Kenntniss eines beliebigen Integrales der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25).

Durch den letzten Satz ist die Auffindung *aller* Lösungen eines Jacobi'schen Systems von der Form (28) zurückgeführt auf die *vollständige* Integration eines einzigen Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bei den meisten und wichtigsten Anwendungen der Jacobi'schen Systeme, bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei dem Pfaff'schen Probleme handelt es sich aber gar nicht um die allgemeine Lösung der auftretenden Jacobi'schen Systeme, sondern es kommt immer nur darauf an, von jedem eine Lösung zu ermitteln. Daher ist es von der grössten Wichtigkeit zu untersuchen, ob man nicht, auch ohne das System (25) vollständig integrirt zu haben, eine Lösung des Jacobi'schen Systems (28) oder (29) finden könne.

Angenommen, man habe irgend ein Integral

$$F(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n) = \text{Const.}$$

der Differentialgleichungen (25) gefunden. Die vollständigen Lösungen dieser Differentialgleichungen, ausgedrückt in α_1 und den Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$ genügen dann der Gleichung:

$$(30) \quad U = F(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n) - F(\alpha_1{}^0\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m^0 \ldots x_n^0) = 0.$$

Nach § 3. genügen aber diese Lösungen, wenn man in ihnen $x_m^0 \ldots x_n^0$ als unabhängig von $\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ ansieht, auch den totalen Differentialgleichungen (15) oder den Gleichungen:

$$(31) \qquad \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_h} = b_k^h\,.$$

Sie müssen folglich auch den Gleichungen identisch genügen:

$$(32) \qquad B_h(U) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

die man durch Differentiation der Gleichung $U = 0$ nach α_h unter

Berücksichtigung der Relationen (31) erhält*). Hierbei ist die Form der Gleichung $U = 0$ ganz gleichgültig. Genau dasselbe gilt auch für jede Gleichung $V = 0$, die durch irgend welche algebraische Operationen aus der Gleichung (30) hervorgeht.

Von den $m - 1$ Gleichungen (32) ist die erste stets identisch, oder, falls man diese Gleichung nicht direct mit der Gleichung (30), sondern mit einer beliebigen anderen, dieser äquivalenten Gleichung gebildet hat, doch eine blosse algebraische Folge der Gleichung $U = 0$. Unter Umständen kann auch von den übrigen ein Theil identisch oder eine blosse algebraische Folge der Gleichung $U = 0$ sein. Diejenigen aber der Gleichungen (32), *welche diese Eigenschaft nicht besitzen, sind neue Integralgleichungen des Systems* (25). Mit jeder solchen neuen Integralgleichung kann man nun ganz ebenso verfahren, wie mit der Gleichung $U = 0$ und erkennt so die Möglichkeit, aus einem einzigen Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25) durch blosse Differentiation eine ganze Reihe neuer Integralgleichungen derselben abzuleiten, Integralgleichungen, die alle demjenigen System vollständiger Integralgleichungen dieser Differentialgleichungen angehören, aus dem sich die abhängigen Variabeln durch α_1 und die für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ genommenen Anfangswerthe bestimmen.

Verbindet man hiermit die Bemerkung (die auch schon im vor. § hätte benutzt werden können, um zu zeigen, dass die dort erhaltenen Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ identisch Null sein müssen), dass sich aus Gleichungen, welche einem solchen System vollständiger Integralgleichungen angehören, niemals eine von den Anfangswerthen der abhängigen Variabeln völlig freie Gleichung ergeben kann, oder dass, wenn man eine solche Gleichung erhalten hat, dieselbe nothwendig identisch sein muss, so wird man auf den folgenden Weg geführt, *um von dem gegebenen Integrale $F =$ Const. oder $U = 0$ der Gleichungen* (25) *zu einer Lösung des Jacobi'schen Systems* (29) *zu gelangen.*

Wir bringen durch Auflösung nach irgend einem in dem Integrale $U = 0$ vorkommenden Anfangswerthe der abhängigen Variabeln, z. B. nach x_m^0, diese Gleichung auf die Form:

---

*) Dies lässt sich wiederum auch direct einsehen. Nach Voraussetzung ist nämlich $B_1(F) = 0$, folglich auch $B_1(U) = 0$, folglich wegen:

$$B_1(B_h(f)) = B_h(B_1(f))$$

auch $B_1(B_h(U)) = 0$. Der Werth, den $B_h(U)$ für die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (25) erhält, ist also unabhängig von α_1. Dieser Werth verschwindet aber, wenn man $\alpha_1 = \alpha_1^0$ setzt, weil hierdurch $x_m = x_m^0, \ldots x_n = x_n^0$, daher nach (30) $\frac{\partial U}{\partial \alpha_h} = 0$ wird und zugleich jedes b_k^λ verschwindet.

(33) $$x_m^0 = U_m(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+1}^0 \ldots x_n^0)$$

und bilden hiermit die $m-1$ Gleichungen

(34) $$B_h(U_m) = \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U_m}{\partial x_k} = 0,$$

von denen die erste identisch ist. Von diesen Gleichungen kann keine eine blosse algebraische Folge der Gleichung (33) sein, da x_m^0 in ihnen gar nicht vorkommt. Sind sie sämmtlich, ebenso wie die erste, an sich identisch, so ist unmittelbar der aus $U=0$ erhaltene Werth U_m von x_m^0 eine gemeinsame Lösung der $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen (29). Ist dies aber nicht der Fall, so muss sich aus den Gleichungen (34) stets noch ein Theil der übrigen Anfangswerthe $x_{m+1}^0 \ldots x_n^0$ bestimmen lassen, weil es nach dem Vorhergehenden unmöglich ist, diese Anfangswerthe vollständig zu eliminiren. Nehmen wir an, dass sich $x_{m+1}^0, \ldots x_{m+h-1}^0$ aus den Gleichungen (34) bestimmen liessen, so können wir nun mit jedem der also erhaltenen Werthe

$$\begin{aligned} x_{m+1}^0 &= U_{m+1}^1 \quad (\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+h}^0 \ldots x_n^0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m+h-1}^0 &= U_{m+h-1}^1 (\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+h}^0 \ldots x_n^0) \end{aligned}$$

ebenso operiren, wie vorher mit der Gleichung (33) und werden hierdurch zu Gleichungen gelangen, die nicht eine blosse algebraische Folge der vorhergehenden sein können, weil sie die Grössen

$$x_m^0 \ldots x_{m+h-1}^0$$

gar nicht enthalten, die vielmehr an sich identisch sein oder ihrerseits wieder einen Theil der übrigen Anfangswerthe bestimmen müssen. Auf diese Weise wird man, falls man nicht vorher schon auf eine gemeinsame Lösung der $m-1$ Gleichungen (29) gekommen ist, schliesslich dazu gelangen müssen, alle in dem gegebenen Integrale $U=0$ enthaltenen Anfangswerthe der abhängigen Variabeln auszudrücken durch $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n$ allein. Bildet man aber nun mit irgend einem dieser Ausdrücke die $m-1$ Gleichungen $B_h(f)=0$, so sind diese frei von allen Anfangswerthen und müssen daher an sich identisch sein. Jeder dieser Ausdrücke ist also (was übrigens auch direct aus dem vorigen § folgt) eine Lösung des Jacobi'schen Systems (29) und folglich auch, nachdem man rückwärts für

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$$

ihre Werthe aus den Substitutionen (23) gesetzt hat, eine Lösung des gegebenen Jacobi'schen Systems (28).

Um also eine Lösung dieses Jacobi'schen Systems von $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln zu finden, ist es nur nöthig, irgend ein Integral der $n-m+1$ ge-

wöhnlichen Differentialgleichungen (25) *zu kennen.* Nach der vorzüglichsten der früheren Methoden*) dagegen erforderte die Auffindung einer solchen Lösung die Kenntniss je eines Integrales von $m-1$ Systemen, von denen das erste aus $n-m+1$, jedes der übrigen höchstens aus ebensoviel gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht.

§ 6.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und das Pfaff'sche Problem.

Jacobi hat bekanntlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt auf die Aufgabe, von einer Reihe Jacobi'scher Systeme linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (28) successive je eine Lösung zu finden. Kommen in der gegebenen partiellen Differentialgleichung, die man frei von der unbekannten Function selbst annehmen kann, n unabhängige Variable vor, so bestehen diese Jacobi'schen Systeme resp. aus:

$$1,\ 2,\ \ldots m-1,\ \ldots n-1$$

linearen partiellen Differentialgleichungen mit

$$2n-1,\ 2n-2,\ \ldots 2n-m+1,\ \ldots n+1$$

unabhängigen Variabeln.

Nach der im vor. § auseinandergesetzten Methode *erfordert daher die vollständige Lösung der gegebenen Gleichung nur die Ermittelung eines Integrales von je einem System von*

$$2(n-1),\ 2(n-2),\ \ldots 2(n-m+1),\ \ldots 2$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, während man früher**) der Kenntniss bedurfte je eines Integrales für ein System von $2(n-1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und für je 2 Systeme von $2(n-2), \ldots 2(n-m+1), \ldots 2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und in ungünstigen Fällen selbst diese Anzahl von Integrationen noch nicht ausreichend sein konnte.

Die Integration gestaltet sich, wenn man die einfachste Form der Substitutionen (23) wählt, hier folgendermassen:

Es hat***) allgemein das $(m-1)^{\text{te}}$ Jacobi'sche System die Form:

$$(35)\qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial q_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial p_h}{\partial q_\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial p_h}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \right) = 0$$
$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

*) Vgl. Clebsch, Crelle J. 65, p. 261.

**) Vgl. Clebsch, Crelle J. 65, p. 265.

***) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik p. 292, Crelle J. 60, p. 23.

worin $p_1\, p_2 \ldots p_{m-1}$ aus den vorhergehenden Jacobi'schen Systemen bestimmte Functionen von $q_1\, q_2 \ldots q_n\, p_m \ldots p_n$ sind, für welche die Ausdrücke

$$A_h(A_i(f)) - A_i(A_h(f))$$

identisch verschwinden.

Setzt man nun:

(36) $q_1 = \alpha_1,\ q_2 = q_2^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_2, \ldots q_{m-1} = q_{m-1}^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_{m-1}$,

worin $\alpha_1^0\, q_2^0 \ldots q_{m-1}^0$, unter der Voraussetzung, dass die Functionen $p_1\, p_2 \ldots p_{m-1}$ für

$$q_1 = \alpha_1^0,\ q_2 = q_2^0, \ldots q_{m-1} = q_{m-1}^0$$

bestimmte endliche Werthe behalten, belielig gewählte Constanten sind, und eliminirt hiermit $q_1\, q_2 \ldots q_{m-1}$ aus den Ausdrücken:

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} w_1 = p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots \alpha_{m-1}\, p_{m-1} \\ w_i = (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, p_i \quad , \quad i > 1\,, \end{cases}$$

so verwandelt man hierdurch das vorgelegte Jacobi'sche System (35) in das folgende:

$$\text{(38)} \qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial w_h}{\partial q_\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial w_h}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \right) = 0.$$

Von diesem kann man nach den Auseinandersetzungen des vor. § eine Lösung finden, sobald man ein Integral des Systems von $2(n - m + 1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kennt:

$$\text{(39)} \qquad \frac{\partial q_\lambda}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial p_\lambda}\,, \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial w_1}{\partial q_\lambda}\,,$$

$$\lambda = m,\ m+1, \ldots n$$

und braucht daher in dieser Lösung nur:

$$\alpha_1 = q_1\,,\ \alpha_2 = \frac{q_2 - q_2^0}{q_1 - \alpha_1^0}, \ldots \alpha_{m-1} = \frac{q_{m-1} - q_{m-1}^0}{q_1 - \alpha_1^0}$$

zu setzen, um aus ihr eine Lösung des gegebenen Systems (35) zu erhalten.

In ganz analoger Weise, wie bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wird auch bei dem Pfaff'schen Probleme, d. h. bei der Aufgabe, die gegebene lineare Differentialgleichung

$$\chi_1\, dx_1 + \chi_2\, dx_2 + \cdots \chi_{2n}\, dx_{2n} = 0$$

durch n Gleichungen zu integriren, durch das angegebene Verfahren die Anzahl der erforderlichen Integrationen fast um die Hälfte vermindert. Man erkennt nämlich ohne Schwierigkeit aus der Methode, die Herr Clebsch zur Lösung dieses Problems vorgeschrieben hat*), dass sich dasselbe zurückführen lässt auf die Auffindung je einer Lösung

*) Vgl. namentlich Crelle J. 61, p. 153 und 65, p. 266.

von n Jacobi'schen Systemen von der Form (28), die resp. bestehen aus $1, 2, \ldots n$ linearen partiellen Differentialgleichungen mit je $2n$ unabhängigen Variabeln. Nach dem Vorhergehenden hängt die Auffindung einer Lösung des i^{ten} dieser Systeme nur ab von der Ermittelung eines Integrales von $2n - i$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aber dieses i^{te} System, welches erst aufgestellt werden kann, nachdem man von jedem der vorhergehenden eine Lösung gefunden hat, besitzt in Folge der Art, wie es aus diesen entsteht, selbst $i - 1$ bekannte Lösungen. Keine von diesen Lösungen ist diejenige, die man wirklich braucht, — denn diese muss unabhängig sein von jenen — aber jede derselben liefert uns, wenn wir sie (ausgedrückt in den neuen Variabeln α) einer Constanten gleich setzen, ein Integral jener $2n - i$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Man kennt also von vornherein $i - 1$ Integrale dieser Gleichungen und kann mittelst derselben die $2n - i$ Differentialgleichungen zurückführen auf

$$2n - i - (i - 1) = 2n - 2i + 1.$$

Die Auffindung einer brauchbaren Lösung des i^{ten} Jacobi'schen Systems verlangt demnach nur die Kenntniss eines Integrales von

$$2n - 2i + 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Zur vollständigen Lösung des Pfaff'schen Problems ist es folglich ausreichend, ein Integral von je einem System von*

$$2n - 1,\ 2n - 3,\ 2n - 5, \ldots 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu kennen.

§ 7.

Anderer Beweis des Satzes von § 3.

Unter Voraussetzung der Identitäten:

$$(40)\qquad A_i\left(a_k^h\right) - A_h\left(a_k^i\right) = 0$$

besitzen, wie Herr Clebsch nachgewiesen hat*), die $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(41)\qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda = m}^{\lambda = n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

$n - m + 1$ von einander unabhängige Lösungen, die durch

$$f_m,\ f_{m+1}, \ldots f_n$$

bezeichnet werden mögen.

*) Crelle J. 65, p 260.

Da, wenn man

$$f = \varphi\,(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, f_m\, f_{m+1} \ldots f_n)$$

setzt:

$$A_h(f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} A_h(f_k)\,\frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}$$

wird, so sieht man, dass diese Lösungen von einander unabhängig sein müssen in Bezug auf $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$.

Setzt man daher:

$$(42) \qquad f_m = c_m,\; f_{m+1} = c_{m+1},\; \ldots f_n = c_n\,,$$

so müssen sich aus diesen Gleichungen $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ bestimmen lassen als Functionen der Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ und der Grössen $c_m\, c_{m+1} \ldots c_n$.

Betrachtet man die letzteren als willkürliche Constanten, so genügen die aus (42) folgenden Werthe von $x_m \ldots x_n$ den $n - m + 1$ Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial f_k}{\partial x_\lambda}\left(dx_\lambda - \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h\, dx_h\right) = 0,$$

die sich durch vollständige Differentiation der Gleichungen (42) unter Benutzung der Identitäten $A_h(f_k) = 0$ ergeben. Da aber die Determinante dieser Gleichungen

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\,\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

an sich nicht Null ist und daher auch nach Substitution jener Werthe nicht identisch verschwinden kann, so folgt, dass dieselben den $n-m+1$ linearen totalen Differentialgleichungen Genüge leisten müssen:

$$(43) \qquad dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h\, dx_h\,.$$

Bestehen daher die Identitäten (40), so giebt es stets $n - m + 1$ Functionen von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ und von $n - m + 1$ willkürlichen Constanten $c_m\, c_{m+1} \ldots c_n$, unabhängig von einander in Bezug auf die letzteren, welche, für $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ gesetzt, den Gleichungen (43) identisch genügen.

Bezeichnen wir diese Lösungen des Systems (43) durch

$$(44) \qquad x_\lambda = \varphi_\lambda\,(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, c_m \ldots c_n)$$

und verstehen unter $x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0$ unbestimmte Constanten, so müssen sich hiernach die $n - m + 1$ Gleichungen:

$$x_\lambda^0 = \varphi_\lambda\,(x_1^0\, x_2^0 \ldots x_{m-1}^0\, c_m \ldots c_n)$$

stets auflösen lassen nach $c_m \ldots c_n$. Durch Substitution dieser Werthe nehmen die Lösungen (44) die Form an:

$$(45) \qquad x_\lambda = \psi_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0),$$

wo, in Folge ihrer Entstehungsart, die Function ψ_λ für

$$x_1 = x_1^0,\; x_2 = x_2^0,\; \ldots x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

sich auf x_λ^0 reduciren muss.

Führt man nun für $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ die neuen Variabeln $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ durch die $m-1$ Gleichungen ein

$$(46) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1})$$

wodurch:

$$(47) \quad \psi_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0) = \Psi_\lambda(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, \alpha_1^0\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0)$$

werden möge, so erhält man aus (45) die Lösungen:

$$(48) \qquad x_\lambda = \Psi_\lambda(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, \alpha_1^0\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0)$$

des Systems linearer totaler Differentialgleichungen zwischen $x_m \ldots x_n$ und $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$:

$$(49) \qquad dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} b_\lambda^h\, d\alpha_h\,,$$

in welches das System (43) durch die Substitutionen (46) übergeht.

Die Gleichungen (48) genügen hiernach im Besondern auch den $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(50) \qquad \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_1} = b_\lambda^1\,.$$

Hat man aber die Constante α_1^0 so gewählt, dass keine der $m-1$ Functionen f_h unendlich oder unbestimmt wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, so wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ nach (46) jedes $x_h = x_h^0$ und daher nach (47) $\Psi_\lambda = x_\lambda^0$.

Es sind folglich die Gleichungen (48) diejenigen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (50), die sich für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ auf die dem Anfangswerth α_1^0 von α_1 zugehörigen Werthe der abhängigen Variabeln x_λ reduciren.

Umgekehrt muss es daher stets möglich sein, die Integrationsconstanten in einem System vollständiger Lösungen der $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen (50) so zu bestimmen, dass diese Lösungen für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ die willkürlich bleibenden Werthe $x_m^0, x_{m-1}^0 \ldots x_n^0$ annehmen, und die so erhaltenen Lösungen müssen, wenn man darin diese Anfangswerthe als unabhängig von $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_{m-1}$ ansieht, zugleich die totalen Differentialgleichungen (49) erfüllen, müssen also, nachdem man in denselben rückwärts für $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ ihre Werthe aus den Substitutionen (46) gesetzt hat, auch den totalen Differentialgleichungen (43) Genüge leisten.

Leipzig, Februar 1872.