Friedrich Ludwig Wachter,
ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

1.

In dem achten Bande der Werke von Gauss (S. 175—176) findet man Stücke eines Briefes abgedruckt, den ein ehemaliger Zuhörer, Friedrich Ludwig Wachter, am 12. December 1816 von Danzig aus an ihn gerichtet hat. Dieser Brief ist gewiss vor allem wegen der darin überlieferten Aeusserungen von Gauss werthvoll, er enthält aber auch die Ergebnisse von Untersuchungen über die Parallelentheorie, zu denen Wachter selbst durch eine Unterredung mit Gauss angeregt worden war und in denen er sich als selbständiger, schöpferischer Denker bewährt, eine Meinung, die durch Wachters übrige Briefe an Gauss und durch eine kleine im Jahre 1817 veröffentlichte Schrift über das elfte Axiom Euklids nur bekräftigt wird. Auf diesen Beweisversuch Wachters hat bereits Camerer in seinem vortrefflichen *Excursus ad El. I. 29* hingewiesen (Euclidis Elementorum libri sex priores. Edidit J. G. Camerer. T. I. Berlin 1824. S. 439—440); während er lobend anerkennt, dass der Verfasser den Gegenstand auf neuen, verborgenen Wegen angegriffen habe, glaubt er sein endgültiges Urtheil aufschieben zu müssen, bis die in Aussicht gestellte ausführlichere, die noch vorhandenen Dunkelheiten aufklärende Darstellung erschienen sei. Sonst habe ich, abgesehen von mangelhaften Angaben in biographischen und bibliographischen Nachschlagewerken, Wachter nirgends erwähnt gefunden. Es liegt das wohl daran, dass jene Schrift sehr selten ist und dass Gauss' Nachlass bis vor kurzem unzugänglich war. Nachdem diese reichhaltige Quelle erschlossen ist, will ich im Folgenden über Wachters Leben und seine Leistungen für die nichteuklidische Geometrie einen kurzen Bericht geben und darauf als Belegstücke einige Briefe sowie die Demonstratio von 1817 in deutscher Uebertragung folgen lassen. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, die mir die Benutzung des Gauss-Archivs und den Abdruck der oben erwähnten Briefe freundlichst gestattet hat, sowie der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, die mir einen Brief von Wachter an Bessel zur Verfügung gestellt hat, möchte ich auch an dieser Stelle meinen ergebenen Dank aussprechen.

2.

Friedrich Ludwig Wachter ist am 20. Juli 1792 zu Cleve geboren. Nachdem er das von seinem Vater Christian Friedrich Wachter geleitete Gymnasium in Hamm absolvirt hatte, wurde er am 1. Juli 1809 in Göttingen immatriculirt und studirte daselbst Mathematik und, unter Gauss' Leitung, Astronomie. Gauss war damals mit den 1801 bis 1807 entdeckten kleinen Planeten Ceres, Pallas, Juno und Vesta beschäftigt. Während er die umfangreichen Rechnungen zuerst allein auf sich genommen hatte, zog er jetzt seine Schüler Encke, Gerling, Möbius, Nicolai, Wachter zu Hilfe. Im Besonderen erhielt Wachter die Juno zugewiesen; Zachs Monatliche Correspondenz aus den Jahren 1811 und 1812 sowie die während derselben Zeit erschienenen Astronomischen Jahrbücher für 1814 und 1815 enthalten die Ergebnisse der Rechnungen Wachters, dessen grosse Sorgfalt und Geschicklichkeit Gauss in den begleitenden Worten wiederholt lobend hervorhebt. Astronomischen Inhalts war auch eine tüchtige Dissertation, die Wachter angeregt durch Gauss im Jahre 1813 entworfen hatte, die aber wegen seiner Theilnahme an dem Befreiungskriege (Dec. 1813 bis Mai 1814) erst 1815 unter dem Titel: *De elementis quae ad corporum coelestium revolutionem circa proprium axem spectant, ex observationibus geocentricis derivandis* in Göttingen erschienen ist. Die Drucklegung hatte Encke besorgt, da Wachter auf Gauss' Empfehlung seit Juni 1813 als Professor der Mathematik an dem Friedrichsgymnasium zu Altenburg angestellt war. Im Frühjahr 1816 legte er seine Stelle nieder und folgte im Herbst desselben Jahres einem Ruf an das Gymnasium illustre in Danzig. Hier nahm er schon früher begonnene Untersuchungen über „die Philosophie der Mathematik“ wieder auf. Er beabsichtigte über diesen Gegenstand ein Buch zu schreiben, als dessen Vorläufer er im Februar 1817 die kleine Schrift: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi* (16 S. 16⁰) drucken liess. Zur Ausführung seines Planes ist Wachter nicht gekommen. Am 3. April 1817 begab er sich auf den gewohnten Abendspaziergang, von dem er nicht zurückgekehrt ist. Alle Nachforschungen seiner Freunde und Collegen waren vergebens, und das Räthsel seines plötzlichen Verschwindens ist niemals gelöst worden. Welchen Eindruck die Nachricht von dem jähen, geheimnissvollen Ende seines „jungen Freundes“ auf Gauss gemacht hat, zeigt ein Brief an Gerling vom 15. Mai 1817: „Ich bin im Innersten erschüttert“, heisst es darin. „Wachter hatte einen braven Charakter, gewiss ausgezeichnete Talente, eine reine Leidenschaft für die Wissenschaft, und wenn auch seine metaphysischen Schwärmereien ihn auf Abwege führten, so glaube ich doch, dass ein reiferes Alter ihn immer mehr von jenen geheilt hätte, und dass er viel für die Wissenschaft geleistet haben würde“.*)

3.

In „metaphysischen Speculationen“ hatte Wachters Interesse für die Grundlagen der Geometrie seinen Ursprung; dass überhaupt das Wiedererwachen dieses Interesses seit dem Ende des achtzehnten Jahrhunderts mit dem Einflusse der Kantischen Philosophie zusammenhängt, habe ich schon an anderer Stelle hervorgehoben.**) Wie Wachter selbst bezeugt, wurde es verstärkt durch die für den Schulunterricht erforderliche Beschäftigung mit den Elementen. Dazu kam endlich im April 1816 eine mächtige Anregung durch eine Unterredung mit Gauss.

Noch vor diese Unterredung fällt eine Kritik der 1815 erschienenen *Vollständigen Theorie der Parallelen* von Matthias Metternich, ein Beitrag, den Wachter für die soeben durch v. Lindenau und Bohnenberger ins Leben gerufene *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* geliefert hatte. Wachter deckt zunächst den argen Fehlschluss auf, dessen Metternich sich schuldig gemacht hatte (Bd. II, S. 64—74) und setzt dann seine eigene Ansicht über einen möglichen Beweis des Parallelenaxioms auseinander, indem er folgende Betrachtung anstellt.

*) Als Quelle für die vorstehende Skizze haben gedient: die gedruckten Briefwechsel Gauss-Olbers (Gauss, den 8. April 1813, 24. Juni 1815, 3. April und 4. Juni 1816, 28. April und 2. August 1817, Olbers, den 15. April 1816), Gauss-Schumacher (Gauss, den 10. März 1811, Schumacher, den 17. Juni 1814), Bessel-Olbers (Bessel, den 8. Mai 1817, Olbers, den 23. Mai 1817) und die ungedruckten Briefe Gauss an Gerling, den 15. Mai 1817, Gerling an Gauss, den 15. Juni 1817 und 25. März 1818 und Wachter an Gauss den 19. Mai, 29. Juni, 27. September und 16. December 1814, 28. März 1815, 12. December 1816 und 25. Februar 1817, sowie zwei Briefe von Wachters Vater an Gauss, einer vom 10. Mai 1817, ein späterer ohne Datum. Dazu kommen einige zum Theil ungenaue Angaben in den Schriften: M. Geyer, *Geschichte des Friedrichsgymnasiums zu Altenburg seit 1789*, Altenburg 1891, S. 6, 33, 80 und C. Bruhns, *Johann Franz Encke*, Leipzig 1869, S. 16, 17, 18, 25, auf die mich F. Engel in Leipzig hingewiesen hat.

**) Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, in Gemeinschaft mit F. Engel herausgegeben von P. Stäckel, Leipzig 1895, S. VI; im Folgenden mit P. Th. angeführt.

4*

Steht die Gerade ND auf der Geraden MN senkrecht, während die Gerade MF mit MN einen spitzen Winkel bildet, so besagt das Axiom, dass MF und ND gehörig verlängert einander schneiden werden. „*Man setze jetzt MF sey parallel* [nicht schneidend] *mit ND.* Daraus würde

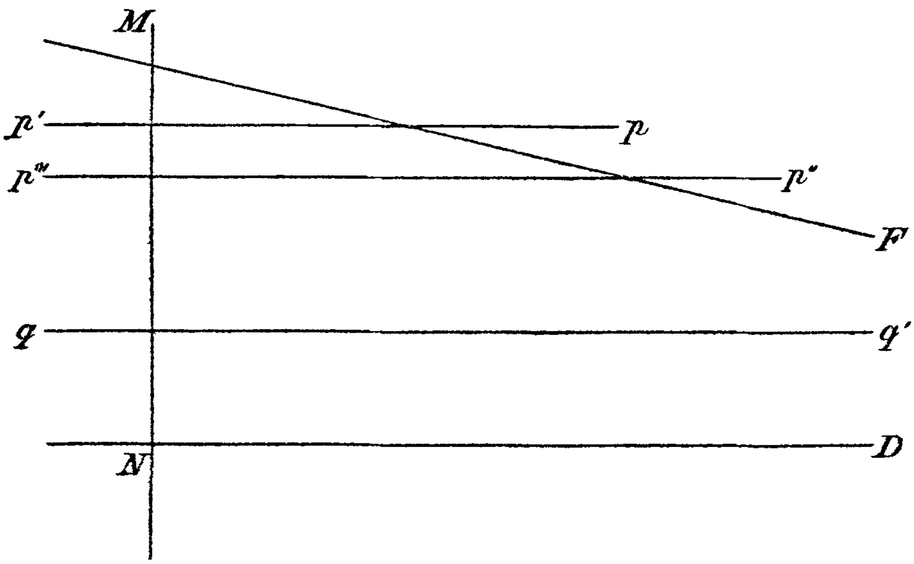

Fig. 1.

folgen, dass es senkrechte, wie qq', zwischen M und N gebe, welche die MF nicht schneiden, oder, wenn auch keine andere, wenigstens ND selbst eine solche senkrechte wäre. Eine von diesen, welche die MF nicht mehr schneidet, ist von N nach M zu gewiss die *letzte*. Man nehme unbestimmt qq' dafür; dann ist zwischen ihr und der MF keine senkrechte mehr möglich, ohne die MF zu schneiden. Auch fallen die Durchschnittspunkte derselben, wie der $p'p$, der $p'''p''$ u. s. w. in immer grössere Entfernungen von M, je mehr sie sich der Asymptote qq' nähern. Der letzte Durchschnittspunkt aber, lässt sich wegen der Unendlichkeit der MF nicht angeben; er würde in dem Augenblicke, wo $p'''p''$ in qq' übergienge, statt gefunden haben in einem Abstande von M, der über alle Gränzen hinausfiele. Die Winkel aber, wie $Mp''p'''$, unter welchen MF von jeder Senkrechten geschnitten wird, können nie Null werden, weil keine Senkrechte mit MF zusammenfallen kann; sie fallen also nothwendig zwischen irgend ein $\frac{1}{2^{n-1}}R$ und $\frac{1}{2^n}R$, so dass nie $\frac{1}{2^n}R = 0$. Nach *Satz* I liegt dann aber der Durchschnitt in einer Entfernung von M stets kleiner als $2^n L$. Dieser müsste aber wegen der Unendlichkeit der MF über jede Gränze hinauswachsen. *Mithin führt die Annahme, dass qq' die MF nicht schneide, auf den Widerspruch: dass die Gränze für $\frac{1}{2^n}$ nicht $= 0$, zugleich aber doch die Gränze für $2^n = \infty$ seyn soll.* Also kann MF nicht parallel mit qq' also auch nicht mit ND seyn; weil, was jetzt von der MF und qq' gezeigt ist, offenbar auch allgemein von jeder andern Linie durch M und jeder andern Asymptote gilt. W. Z. B. W.“

In dem Versuche einer apagogischen Beweisführung ist Wachter mit Saccheri und Lambert zusammengetroffen, deren Arbeiten ihm freilich unbekannt waren. Ja noch mehr, seine Deduction, eine Asymptote qq' sei deshalb nicht möglich, weil sie mit MF den Winkel Null bilden und alsdann MF mit qq' zusammenfallen müsste, ist der Kern des ersten Beweises von Saccheri*). Wachter selbst scheint die Unzulänglichkeit seines Verfahrens gefühlt zu haben, denn am Schlusse seiner Besprechung bemerkt er: „Ob aber der eben versuchte Beweis für das elfte Axiom des Euklides wirklich die von den Mathematikern gewünschte Form habe, oder ob sich ihm nicht vielleicht eine noch strengere Form geben lasse, wagt Rec. nicht zu entscheiden“, und meint, wollte man als *Axiom* aufstellen, dass *eine gerade Linie nicht Asymptote einer andern geraden Linie sein könne*, „so schiene dieses wenigstens viele andern, in der Paralleltheorie versuchten, Axiome an Anschaulichkeit zu übertreffen.“**)

4.

„Es bleibt in der Geschichte der Mathematik gewiss merkwürdig“, schrieb Wachter am 17. März 1817 an Bessel, indem er ihm seine *Demonstratio* übersandte, „dass noch niemand die Wahrheit des elften euklidischen Axioms bezweifelt hat, wie es, der Form nach, schon die sonst gebräuchliche apagogische Beweisart mit sich gebracht haben würde; und wie es des Geometers allein würdig gewesen wäre, wenigstens die Folgen zu entwickeln, die Statt haben müssten, sobald der Satz vielleicht falsch, oder doch völlig unbeweisbar war. Doch diese Folgen, von denen einige interessant genug scheinen, darzulegen, kommt mir — obgleich ich der erste gewesen bin, der die ersten aus einer dem elften Axiom entgegengesetzten Hypothesis handgreiflich folgenden Sätze angedeutet hat, in einer in der astronom. Zeitschrift abgedruckten Recension — weniger zu als Gauss, der, wie ich später von ihm erfuhr, schon seit vielen Jahren mit solchen Entwickelungen beschäftigt gewesen ist.“

Wachter bezieht sich hierbei auf eine Unterredung mit Gauss, die er auch in seinem Briefe an Gauss vom 12. December 1816 wiederholt erwähnt. Für den Zeitpunkt dieses „letzten Aufenthalts in Göttingen“ giebt zunächst der Eingang des Briefes einen Anhalt. „Nach einem in Zerstreuungen verlebten halben Jahre, nach einer ermüdenden Reise, nach

*) *Euclides ab omni naevo vindicatus.* Mailand 1733, S. 86. P. Th. S. 122.

**) Dieses Axiom hatte bereits Duttenhofer vorgeschlagen (*Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den Parallellinien.* Stuttgart 1813).

dem Eintritt in einen neuen Wohnort", so erklärt Wachter entschuldigend, schreibe er endlich an seinen verehrten Lehrer. Verbindet man hiermit die Angabe, die Gauss selbst in dem Briefe an Olbers vom 4. Juni 1816 macht: er [Wachter] war im April hier", so ist als Zeitpunkt jener Unterredung der *April 1816* gesichert.

Dass in ihr das elfte euklidische Axiom berührt wurde, ist sehr erklärlich; Gauss und Wachter hatten sich damals beide mit Metternichs Parallelentheorie befasst. Wachters Besprechung ist schon erwähnt worden. Gauss' Recension erschien anonym in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816*); es ist gewiss kein Zufall, dass sie von Wachter in der Einleitung zur *Demonstratio* erwähnt und als Verfasser „summus geometra" genannt wird. Indem man die Angaben in den beiden vorher erwähnten Briefen Wachters verbindet, wird man annehmen dürfen, dass Gauss seinem jungen Freunde berichtet hat, er habe sich schon seit vielen Jahren mit der „antieuklidischen Geometrie" beschäftigt und sei sogar dazu gelangt, die dabei geltende „transcendente Trigonometrie" auszubilden. Die Art, in der Wachter diese Trigonometrie erwähnt, erweckt den Eindruck, als habe Gauss ihn aufgefordert, nun auch seinerseits die betreffenden Formeln herzuleiten, eine Aufgabe, der Wachter freilich nicht gewachsen war.

Wann hatte Gauss die „transcendente Trigonometrie" entdeckt? Um auf diese Frage zu antworten, muss man, was bisher nicht genügend geschehen ist, scharf unterscheiden zwischen nichteuklidischer Geometrie und Unbeweisbarkeit des elften Axioms. Auch ein Mathematiker, der von der unbedingten und ausschliesslichen Gültigkeit der euklidischen Geometrie überzeugt ist, kann eine nichteuklidische Geometrie hypothetisch ausbilden, hat doch Saccheri weder an der Beweisbarkeit des Parallelenaxioms noch an der empirischen Richtigkeit des Euklidischen Systems gezweifelt. Daher darf auch aus Schumachers Aufzeichnung vom November 1808, «Gauss habe die Theorie der Parallelen darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsse, welches absurd ist», nicht geschlossen werden, dass Gauss damals die „transcendente Trigonometrie" noch nicht besessen habe; es ist vielmehr sehr wohl denkbar, dass er sie bereits im Sept. 1799 entdeckt hat, als er in sein Tagebuch die Notiz eintrug: *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus***),

*) Sie ist abgedruckt Werke Bd. IV, S. 364—368, Bd. VIII, S. 170—174, P. Th. S. 220—223.

**) Werke, Bd. VIII, S. 162; auch der Brief von Gauss an Bolyai vom 16. Dec. 1799 spricht nur zu Gunsten dieser Vermuthung. Dass Gauss' Nachlass keine Aufzeichnungen darüber enthält, ist kein entscheidender Gegengrund, denn Gauss besass auch auf anderen Gebieten viel mehr, als er aufgeschrieben hat.

und wenn Engel sagt, dass Bartels, der bis 1807 mit Gauss verkehrte, von diesem „nicht wesentlich mehr über die Parallelenfrage erfahren hat, als das was er ebensogut aus Gesprächen mit Kaestner oder aus den damaligen Lehrbüchern der Geometrie, insbesondere aus den *Éléments* Legendres entnehmen konnte“*), so scheint mir damit mehr behauptet, als sich beweisen lässt. Dagegen stimme ich Engel darin vollständig zu, dass „Gauss in der Zeit bis 1808 ... zwar an der unbedingten Wahrheit des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft geworden, aber seiner Sache doch noch nicht ganz sicher war“ und glaube sogar, dass man auf Grund des Briefes von Wachter dasselbe für die Zeit bis 1816 annehmen darf. Denn hätte Gauss seinem jungen Freunde gerade heraus erklärt, das elfte Axiom lasse sich schlechterdings nicht mittelst der übrigen Axiome beweisen, so müssten sich doch irgend welche Rückwirkungen einer solchen Aeusserung bei einem Mann, wie Wachter zeigen, der von der grössten Verehrung für Gauss beseelt war. Hiermit stimmt auch sehr gut überein, dass Gauss am 20. April 1817, veranlasst durch Wachters *Demonstratio*, an Olbers schreibt: „Ich komme immer mehr zu der Ueberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht *vom* menschlichen Verstande noch *für* den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen“ und dass er in dem Briefe an Taurinus vom 8. November 1824 von seinen vergeblichen Anstrengungen erzählt, „einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser nichteuklidischen Geometrie zu entdecken.“

Man darf hierin eine Bestätigung der von mir früher ausgesprochenen Ansicht sehen, „dass die Erkenntniss von der logischen Unanfechtbarkeit der nichteuklidischen Geometrie Gauss nicht durch eine geniale Intuition zu Theil geworden ist, sondern dass er sie erst im harten Kampfe gegen das alte Vorurtheil errungen hat“**).

Hierzu möchte ich eine Bemerkung psychologischer Natur hinzufügen, die das Vorangehende wohl erst in dem rechten Lichte erscheinen lässt. Es wäre irrig sich vorzustellen, dass Gauss die Fragen, um die es sich bei den Grundlagen der Geometrie handelt, mit der Klarheit und Deutlichkeit erfasst hatte, die nach ihm durch die Arbeit einer Generation

*) Nicolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei Geometrische Abhandlungen. Zweiter Theil. Leipzig, 1899, S. 378—379.

**) P. Stäckel und F. Engel, Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie. Diese Annalen, Bd. 49, S. 151.

von Mathematikern erworben worden ist. Wir müssen zwar annehmen, dass er, um einen Ausdruck Goethes zu gebrauchen, mit der Dumpfheit der Genies so manches vorausgeschaut hat, was wir jetzt besitzen, aber das schliesst nicht aus, dass der Process der Loslösung von der zweitausendjährigen Autorität Euklids sich bei ihm allmählich und unter Schwankungen vollzogen hat, unter Rückfällen in die alte Anschauung, wenn er bei der Durchführung der neuen Ideen auf Schwierigkeiten stiess, wie zum Beispiel auf die Forderung, dass es eine constante, a priori der Länge nach gegebene Linie geben solle. Von diesem Gesichtspunkte aus wird man die Annahme, dass Gauss schon im Jahre 1799 in jugendkräftiger Entfaltung seines Genies zu der Conception einer nichteuklidischen Geometrie mit Einschluss der transcendenten Trigonometrie vorgedrungen ist und dass ihm diese Entdeckung „die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft gemacht" hat (Brief an Bolyai vom 16. Dec. 1799), mit der Thatsache in Einklang bringen können, dass derselbe Gauss dennoch fünf Jahre später einen Beweis des elften Axioms für möglich gehalten hat (Brief an Bolyai vom 25. Nov. 1804).

Zum Schluss dieses Abschnittes möge noch bemerkt werden, dass auch der wiederholt auftretende Begriff mehrdimensionaler Räume durch Gauss an Wachter vermittelt worden zu sein scheint. Allerdings reicht die Geschichte dieses Begriffs mindestens bis ins siebzehnte Jahrhundert zurück, sodass die Möglichkeit einer andern Quelle nicht geleugnet werden kann; allein Wachter coquettirt mit den n Dimensionen wie jemand, der erst kürzlich davon erfahren hat, ja er versteigt sich in jugendlichem Enthusiasmus zu Räumen von unendlich vielen Dimensionen! Dass Gauss schon früh die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten gehabt hat, kann als sichergestellt gelten.

5.

Was hat nun Wachter in seinem langen Briefe vom 12. Dec. 1816 für die Grundlagen der Geometrie geleistet? Da muss zunächst constatirt werden, dass es ihm an Selbstkritik gar sehr mangelte. Ein beträchtlicher Theil seiner Ausführungen muss als unreif und verfehlt bezeichnet werden. Vor allem trägt hieran seine unklare Auffassung des Unendlichen Schuld, die schon in der Besprechung der Metternichschen Parallelentheorie zu Tage tritt. Auf der andern Seite aber finden sich viele scharfsinnige Bemerkungen, und durch sein geniales Aperçu, dass, unabhängig von dem Parallelenaxiom, auf der Kugel von unendlich grossem Radius die Euklidische Geometrie verwirklicht ist, erhebt sich W a c h t e r zu der Höhe von L o b a t s c h e f s k i j und J o h a n n B o l y a i.

Dass in der Euklidischen Geometrie die Ebene als Grenze der Kugel angesehen werden kann, ist gewiss schon den griechischen Geometern bekannt gewesen, denen ja bereits der Sache nach die Transformation durch reciproke Radienvectoren im Raume geläufig war. Allein die Erkenntniss, dass umgekehrt die Annahme, die Grenzkugel sei eine Ebene, mit dem Parallelenaxiom äquivalent ist, scheint jungen Ursprungs zu sein. Vor Wachter kann ich dafür nur Grashof anführen, in dessen 1806 erschienenen *Theses sphaerologiae**) dieser Gedanke in etwas verschwommener Form entwickelt wird. Aus der späteren Zeit ist die vortreffliche Darstellung von J. W. H. Lehmann (*Mathematische Abhandlungen*, Zerbst 1829) zu nennen**). Ein ganz neuer Gedanke aber war es, die Geometrie auf einer Grenzkugel zu betrachten, und Wachter gebührt der Ruhm auch schon diesen weiteren Schritt gethan zu haben.

Weiter ist hervorzuheben, dass Wachter die *gerade Linie* als *die nur auf einzige Weise zwischen zwei gegebenen Punkten liegende* definirt. Bei Euklid lautet die Erklärung der geraden Linie: „Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist", es folgt dann die Forderung, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse, und endlich besagt der neunte Grundsatz, dessen Echtheit allerdings angezweifelt wird, dass zwei gerade Linien keinen Raum einschliessen. Schon die griechischen Geometer haben versucht, diese Erklärung zu verbessern oder durch eine brauchbarere zu ersetzen, und später ist eine umfangreiche Litteratur über die Definition der Geraden entstanden.***) Die Definition, deren sich Wachter bedient, habe ich in den älteren Schriften nirgends gefunden. Es scheint fast, als ob sie auf Klügel zurückgeht. In seinem *Mathematischen*

*) P. Th. S. 304 und 315, wo nachzutragen ist, dass Grashof 1770—1841 gelebt hat. Er ist übrigens 1826 auf diesen Gegenstand zurückgekommen (Ueber die ersten Begriffe der Geometrie, zunächst mit Bezug auf Parallelen-Theorien, Programm des Karmeliter-Gymnasiums zu Köln), ohne dass seine Auseinandersetzungen an Klarheit gewonnen hätten. Zum Schluss (S. 11) fasst er das Ergebniss seiner Untersuchungen dahin zusammen, „dass eine Parallelen-Theorie ohne sphaerologische Begründung nothwendig eines Axioms bedarf, um in allen ihren Folgerungen bewiesen zu werden, und dass es vergeblich ist, einen Beweis für das elfte Euklidische Axiom oder für jedes ähnliche auf dem bisherigen Wege zu suchen."

**) Siehe meine Biographie von F. A. Taurinus (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Heft 9. Leipzig 1899. S. 426—427).

***) Für die Griechen ist auf die Euklid-Kommentare von Proklos und von An-Nairîzî (herausgegeben von M. Curtze, Leipzig 1899) zu verweisen. Eine Zusammenstellung der neueren Litteratur findet man bei Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, Bd. I, Leipzig 1890, Kapitel 5; freilich giebt dieses Sammelwerk über die historische Entwicklung der Untersuchungen in Betreff der Grundbegriffe der Geometrie keine Auskunft.

Wörterbuche (Theil III. Leipzig 1808. S. 449) heisst es: „Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwei Punkte, in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung, nur auf eine einzige Art gezogen werden kann.“ Klügel fügt hinzu, diese Eigenschaft der Geraden benutze Euklid bei seinen Beweisen, seine ursprüngliche Erklärung brauche er dabei gar nicht*).

Gegen Klügels Erklärung, die auf den ersten Blick etwas bestechendes hat, ist schon von seinem Schüler Grashof mit Recht eingewendet worden, dass diese Eigenschaft der Geraden nicht ausreicht, alle übrigen zu beweisen, „z. B. dass jede Gerade nach beiden Seiten verlängert werden kann, dass sie als Ganzes, wie man sich ausdrückt, unendlich ist und dass es überhaupt von jedem Punkte nach jedem Punkte eine Gerade giebt.“**)

Etwas ganz anderes ist es, wenn Hilbert***) unter seinen sieben *Axiomen der Verknüpfung* als erstes aufstellt: „Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a“. Immerhin war die Erkenntniss, dass Euklids Definition der Geraden für die Beweise entbehrlich sei, ein wesentlicher Schritt vorwärts auf dem Wege zu der Aufstellung eines *formalen* Systems der Geometrie.

Auch auf die Definition der *Ebene* kommt Wachter zu sprechen und bemerkt sehr richtig, dass schon durch zwei gerade Linien, die einen Punkt gemein haben, eine Ebene bestimmt ist und dass man aus dieser Definition die gewöhnliche ableiten müsse, wonach die Ebene diejenige Fläche ist, in welcher nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können. Er trifft hier mit Gauss zusammen, der, wie sein geometrischer Nachlass gezeigt hat, wiederholt auf diese Lücke in der Definition der Ebene zurückgekommen ist†).

6.

Die in dem Briefe vom 12. December 1816 ausgesprochenen Gedanken hat Wachter weiter verfolgt. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen enthält

---

*) Genau ebenso hat Leibniz gedacht. In Aufzeichnungen, die Gerhardt 1858 herausgegeben hat (Leibniz' Mathematische Werke, Bd. 5), bemerkt er zu Euklids Definition: Haec definitio nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibitur neque satis intelligitur (In Euclidis πρῶτα, S. 185), und in der *Characteristica geometrica* von 1679 sagt er (a. a. O. S. 145): Haec autem linea quae a duobus solis punctis, per quae transit, determinata est, . . . linea dicitur *recta*.

**) Grashof, *Theses sphaerologiae*, Berlin 1806, S. 62. Vergl. auch Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*. Bd. II. Paderborn 1898, Abschnitt VII, § 3.

***) *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899.

†) Werke, Bd. VIII, S. 193—199.

seine Schrift: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi;* ihren wesentlichen Inhalt giebt ein Brief wieder, den er am 25. Februar 1817 an Gauss gerichtet hat.

Wachters Ziel ist: ohne Benutzung des Parallelenaxioms zu beweisen, dass durch drei beliebige Punkte der Ebene stets ein Kreis gelegt werden kann, woraus dann die Richtigkeit des elften Axioms selbst erschlossen werden könnte. In dieser Tendenz trifft er einerseits mit Lambert zusammen, dessen Beweisversuche auf die Frage nach der Existenz eines solchen Kreises hinauslaufen, was freilich bei Lambert selbst nicht deutlich zu Tage tritt*), andrerseits mit Wolfgang Bolyai, dessen Ausspruch: „könnten jede 3 Punkte, die nicht in einer Geraden sind, in eine sphärische [Fläche] fallen; so wäre das Eucl. Ax. XI bewiesen"**), wie man leicht erkennt, auf dasselbe herauskommt. Mit Recht hat Frischauf erklärt, dass von den Axiomen, die zum Ersatze des Parallelenaxioms vorgeschlagen worden sind, die Voraussetzung, dass drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, stets auf einer Kugelfläche liegen sollen, am anschaulichsten ist***).

Dass Wachters Beweisversuch, der an Originalität fast alle Versuche dieser Art weit überragt und Camerers Lob, dass darin neue, verborgene Wege eingeschlagen worden seien, durchaus verdient, dennoch gescheitert ist, hat zwei Ursachen. Seine Deduction in § 3, Fall II enthält einen Fehlschluss, es wird dabei die Möglichkeit der *Hypersphären*†) übersehen, deren Normalen zu einander *Hyperasymptoten* sind. Aber auch wenn man hiervon absehen wollte, kann seine *Demonstratio* nicht befriedigen, weil ihre Grundlage: die Theorie der „Fläche von vier Punkten" ungenügend ist.

Wachter definirt die Fläche von vier Punkten als diejenige Fläche, die durch vier Punkte und nicht mehr vollständig bestimmt ist und mit einer andern Fläche derselben Art nicht mehr als einen Schnitt gemeinsam hat, der seinerseits durch drei Punkte und nicht mehr bestimmt ist; auf ganz ähnliche Art sei die „Linie von drei Punkten" zu erklären, während die gerade Linie die „Linie von zwei Punkten" ist. Wenn Wachter nun fortfährt: „Man schliesst hieraus leicht, dass unsere Fläche stetig ist, dass sie keine verschiedenen Fortsetzungen (Zweige) und keine doppelte

*) *Theorie der Parallellinien* § 17—26, § 88, P. Th. S. 167—176, 206—207, vergl. dazu die Bemerkung auf S. 144, die Schur bei seiner Besprechung (Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik, Bd. XXVI für 1895, S. 59) übersehen hat.

**) *Kurzer Grundriss eines Versuches* u. s. w., Maros-Vásárhely 1851, S. 46. Auf S. 45 hatte Bolyai bemerkt, dass in der absoluten Geometrie die Möglichkeit, „um jeden △ einen Kreis zu beschreiben" wegfällt.

***) *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai.* Leipzig 1872. S. 91.

†) Vergl. Gauss Werke Bd. VIII, S. 221.

Krümmung [d. h. nicht die Gestalt einer Sattelfläche] hat", so möchte ich mich trotz Wachters Versicherung, dass er diese Behauptung zur höchsten Evidenz bringen könne, Killing anschliessen, der in seiner *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Bd. II. Paderborn 1898. S. 178) sich so äussert: „Was kann denn der Ausdruck: Eine Linie oder eine Fläche ist durch eine gewisse Zahl von Punkten bestimmt, für einen Inhalt haben, solange man die Eigenschaften der Linie oder der Fläche nicht als bekannt voraussetzt? Vergebens sieht man sich nach einer Erklärung dieses Ausdrucks um, die doch gegeben sein muss, ehe man mit der aufgestellten Definition operieren darf. — — — Man versuche nur, der Untersuchung des Kreises [allein] die Eigenschaft zu Grunde zu legen, dass er durch drei Punkte bestimmt sei; man wird schwerlich zum Ziele gelangen."

Somit hält vor der Kritik nur der erste Paragraph der *Demonstratio* Stand, auf den Wachter selbst grossen Werth gelegt zu haben scheint; sagt er doch in einem Briefe an seinen Vater, der wahrscheinlich aus dem Februar 1817 stammt, nachdem er sich gerühmt hat, das Problem der Parallelentheorie gelöst zu haben, für das die Anstrengungen zweier Jahrtausende nicht hingereicht hatten: „Doch hiernach wäre der Werth dieser Arbeit zu gering angeschlagen. Man hat bisher noch gar nicht einmal daran gedacht, die eminenten Folgen zu überblicken, die es hätte, wenn die Parallelentheorie nicht wahr wäre. Man hat nicht einmal gewagt, an der Wahrheit des 11^{ten} Eucl. Axioms zu zweifeln, obgleich alle Bemühungen es zu beweisen vergebens waren." In der That enthält § 1 einen bemerkenswerthen Ansatz zu einer nichteuklidischen Geometrie. Wachter beweist hier auf originelle Art den Lehrsatz *„Leugnet man das elfte Axiom*, so giebt es aus jedem Punkte auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels eine gerade Linie, die den andern Schenkel asymptotisch berührt, und umgekehrt: auf dem einen Schenkel eines jeden spitzen Winkels giebt es einen solchen Punkt, dass die aus ihm unter rechtem Winkel gezogene Linie eine Asymptote des andern Schenkels ist," ein Theorem, das freilich schon Saccheri in seinem *Euclides ab omni naevo vindicatus* im Jahre 1733 ausgesprochen hatte (Lehrsatz XVII, XXVII und XXXII, P. Th. S. 70, 98—100, 107).

Beläge.

Wachter an Gauss. Danzig, den 12. Dec. 1816.

... Als ich mich vor ein paar Tagen mit den Principien der Geometrie beschäftigte, ward mir von neuem klar, wie die Kantische Ansicht, dass die Geometrie auf einer blossen Anschauung des Raumes beruhe, (desselben Ansicht der Arithmetik, als auf Anschauung der Zeit begründet, enthält, wie sich streng zeigen lässt, einen Paralogismus) das innere Wesen der Wissenschaft gar nicht erfasse, und eigentlich leer und nichtssagend dastehe. Und wenn man noch betrachtet, was sein bester Ausleger und Epitomator, der Königsberger Schulze, der, nach Kants eigenem Geständnisse, ihn am besten und durchaus verstanden haben soll, für die Principien der Geometrie geleistet hat: so darf man nicht fürchten, dem grossen Manne durch dieses Urtheil Unrecht zu thun. — Ich schlug den entgegengesetzten Weg ein; zeigte durch die strengste psychologisch-mathematische Analyse in mathematischer Form:

1) Dass mit der ursprünglichen Vorstellung des Ausgedehnten die ursprüngliche Vorstellung der Bewegung, eine zugleich mit der andern, und wechselsweise durch die andere gegeben sey, ohne welche Nachweisung sich, meinem Urtheil nach, die metaphysischen Einwürfe der Eleatiker vorzüglich des Zeno gegen die Möglichkeit der Bewegung überhaupt, und dann des Sextus Empiricus gegen die Möglichkeit einer Geometrie a priori nie befriedigend möchten widerlegen lassen.

2) Dass wirklich kein beschränkter, sondern ein nach allen Seiten hin unendlicher Raum uns gegeben sey. Erst wenn auf solche Weise nachgewiesen ist, dass man aus einem beschränkten, vorgeschriebenen Raume herausgehen könne, dass z. B. die Welt nicht in einer einzigen Kreislinie, Spirale oder Kugelfläche u. dergl. enthalten sey, kann man sich von einer speciellen Geometrie, die in jenem Falle allein möglich seyn würde, zur allgemeinen und reinen Wissenschaft erheben.

Wie nun diese mit der Aufgabe, die Lage zweier Punkte zu bestimmen, anfange, daraus die Nothwendigkeit der geraden Linie, als der nur auf einzige Weise zwischen zwei gegebenen Punkten liegenden, erhelle; — wie also der Geometer sich die Definition der geraden Linie, als derjenigen, welche von einer andern geraden in nicht mehr als einem Punkte geschnitten wird, selbst mache, und in keinem andern Sinne, als insofern sie ihm nothwendig ist; — wie erst bewiesen werden muss: dass ihre andere Eigenschaft, dass sie nicht mehrere Zweige habe, oder auch ihre Verlängerung auf einzige Weise möglich sey, erst Folge dieser Definition sey; (den Beweis führte ich auf eigenthümliche Weise apagogisch, indem ich diesen Satz auf den zurückführte, dass eine gerade Linie keinen Raum einschliessen könne; denn das oft gebrauchte Verfahren, nach dem man zuerst die Gleichheit aller rechten Winkel beweist, und dann hieraus den Satz ableitet, dass eine gerade Linie nicht Segment einer andern seyn könne, beruhet auf einem Paralogismus) etc. das versteht sich, glaube ich, für den eigentlichen Geometer von selbst; obgleich die meisten, alle aus der Kantischen philos. Schule, und alle empirischen, die gerade Linie nur als durch Anschauung gegeben sich denken können, wenn ihnen gleich nie eine in der reinen Anschauung zu Theil geworden ist.

Die Aufgabe der Lagebestimmung dreier Punkte führt sodann zur Aufgabe der Lagebestimmung zweier gerader Linien, die einen Punkt gemein haben, und zur Lösung dieser Aufgabe durch den Winkel in der Ebene, als derjenigen Fläche, welche von einer andern derselben Art in nicht mehr, als einer geraden Linie geschnitten wird. Aus dieser, durch jene Aufgabe sich als nothwendig ergebenden Definition der Ebene, ist dann die gewöhnliche abzuleiten: dass sie diejenige Fläche ist, in welcher nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können. Nach diesen Grundbegriffen — andres, als weniger hieher gehörig, übergehe ich — kam ich wieder zur Parallel-Theorie und fand darüber Folgendes. Die von dieser Theorie unabhängigen Sätze Euklids setze ich voraus. Von dem geradlinigten Winkel, und der Oefnung seiner Schenkel ging ich wieder aus.

I) Die Basis eines gleichschenklichten Dreiecks ABC, welches entsteht, wenn auf beiden Schenkeln eines geradlinigten Winkels vom Scheitel aus gleiche Abschnitte genommen, und deren Endpunkte durch eine gerade Linie verbunden werden, wächst mit grössern Abschnitten über jede endliche Gränze hinaus.

Beweis. Man setze der Satz sey falsch: so muss es für jene Basis irgend eine Gränze geben. Sie sey gleich der endlichen Linie $L = BC = CD = DE$, welcher sich jene Dreiecksbasen asymptotisch mehr und mehr nähern, je weiter sie vom Scheitel A abstehen.

Man denke sich an dem Winkel BAC die Punkte B, C in unendlicher Entfernung vom Scheitel A (oder in einer Projection so, dass bei Verkürzung der Abstände AB, AC, die Winkelschenkel am Scheitel A

noch innerhalb der alsdann krummen Linien AB, AC liegen, und erst im unendlichen asymptotisch sie erreichen), ziehe darauf in derselben Ebene die geraden AD, AE etc., so dass $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE$ etc., wiederhole es, bis der Winkel $BAE > 90^0$. (Dass dieses möglich ist, lässt sich aus der unendlichen Theilbarkeit des Raumes streng beweisen. Doch bedarf es hier keines Weitern, und ich erwähne das nur, weil ein solcher Beweis für die oben angedeutete Art einer Begründung der Geometrie nothwendig gehört.) Alsdann wäre (Euklid I, 19, 20) $EB < BC + CD + ED$ etc. $< nL$, wenn n, L endliche Grössen, und zugleich $> AB$ d. i. ∞, welches widersprechend.

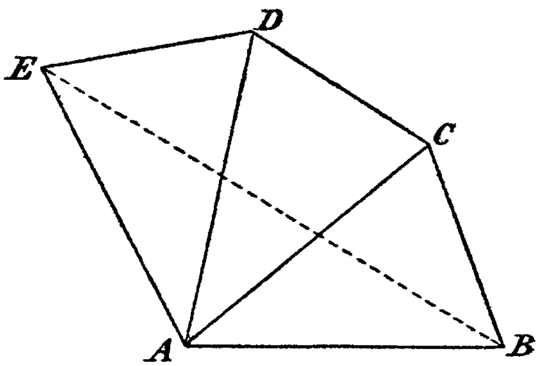

Fig 2.

2) Das Gränzverhältniss der Peripherie des mit unendlichem Radius beschriebenen Kreises, oder auch nur des einem Winkel BAC entsprechenden Theils zu diesem Radius, ist $= \infty$.

Beweis. Der Winkel BAC kann ins unendliche fort in kleinere Winkel getheilt werden. Von jedem gilt Satz (1), d. i. das Gränzverhältniss des ihm entsprechenden Theils der Peripherie zum unendlichen Radius ist $= 1$ und für n solche Winkel $= n$. Da nun jene Theilung keine Gränzen hat, so hat auch n keine Gränzen, (und wächst fort bis ∞?)

Auf diesen Satz gründete ich nun, nach mehrern vergeblichen Versuchen für oder gegen die Euklideische Parallel-Theorie, einen Beweis gegen sie. Ich glaube aber nicht, dass er Ihre Billigung finden kann, so wie ich ihn auch jetzt nicht mehr für bindend halte, und er mir von neuem zeigte, wie man beim Gebrauche des Begriffs ∞ nie vorsichtig genug seyn kann; — er stehe hier nur um des ferneren sich an ihn knüpfenden Ideengangs willen.

3) In der Euklideischen Paralleltheorie haben die Parallel-Linien überall gleichen Abstand; also würde das Verhältniss des Perimeters des Quadrats von unendlich grosser Seite, zu dieser Seite $= 4 : 1$ seyn. (Weil nun aber sowohl durch dieses Quadrat, da über den überall unendlich weit von einander abstehenden Seiten kein Theil der Ebene weiter hinausliegt, als auch durch die mit unendlich grossem Radius beschriebene Kreisfläche die ganze unendliche Ebene umfasst wird, und derselbe Perimeter nach S. (2) $= \infty$, nach S. (3) aber $= 4$ ist, so ist dieses widersprechend, und die Euklideische Theorie muss falsch seyn.) In der ihr entgegengesetzten wird dieser Widerspruch aufgehoben, weil dort eben-

falls der Abstand der Parallelen, so wie der Winkelschenkel über jede endliche Grösse hinaus wächst.

Also die anti-Euclideische oder Ihre Geometrie wäre wahr. [Die Constante in ihr aber bleibt unbestimmt: warum? liesse sich vielleicht durch folgendes begreiflicher machen.

Wenn in einer Ebene die geraden AB, AC, BD und $\sphericalangle CAB + \sphericalangle DBA < 180^0$ gegeben sind, soll entschieden werden, ob die BD die AC schneide oder nicht. Hier ist nun zu bemerken, dass die Ebene durch die 3 Punkte A, B, C völlig gegeben ist, dass sie aber, nach meiner oben gegebenen Erklärung, nur in so fern construirt wurde, als die Lage von drei Punkten zu bestimmen war, und im allgemeinen also auch nichts weiter leisten kann, als dieses. Jetzt aber ist von einem Problem von 4 Punkten die Rede, da zu A, B, C noch ein 4ter Punkt in derselben Ebene hinzukommen muss, um die Lage von BD zu bestimmen, und es handelt sich also hier um einen speciellen Fall des allgemeinen Problems der Lagebestimmung von 4 Punkten, welches nur durch räumliche Construction zu lösen möglich ist. Mithin nur durch Herausgehen aus der Ebene kann entschieden werden, ob die BD die AC schneide oder nicht; aber auch, dass es überhaupt unentschieden bliebe, wäre sehr wohl denkbar. Es könnte als zufällig erscheinen, dass die Natur der geraden Linie und der Ebene, anfänglich durch ganz andere geometrische Beziehungen bestimmt, auch schon implicite eine bestimmte auf den Parallelismus Bezug habende Eigenschaft in sich schlösse. — Aber gesetzt: jenes müsste also, dem Wesen der geraden Linie und Ebene nach, wirklich unbestimmt bleiben, gäbe es dann keine Geometrie über Euklid's 28 Satz hinaus?

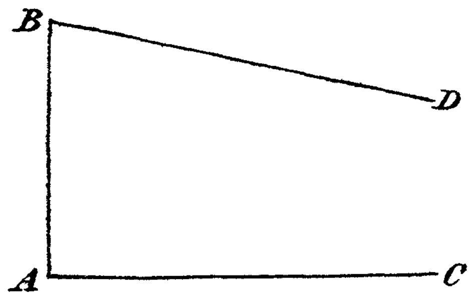

Fig. 3.

1) Gewiss nicht, sobald man bei der geraden Linie und Ebene stehen bleiben wollte.

Mithin mit derselben Nothwendigkeit, mit der die Bildung der geraden Linie und Ebene zur Lagebestimmung von 2 und 3 Punkten gefordert wurde, würden jetzt Linien gefordert, welche jene bestimmte Eigenschaft der Euklid. Parallelen haben, weil ohne diese alle Geometrie aufhören würde. Jenes Gerüste müsste dann wieder fallen; gerade Linie und Ebene träten in das Gebiet anderer Linien zurück, und es wären eben so, wie für diese, Gleichungen darzustellen, nur mit der ihnen nothwendig beiwohnenden Unbestimmtheit; — nur Verhältnisse könnten gegeben werden, und Ihre transcendente Trigonometrie wäre es, welche dieses leistete.

2) Diese Linien mit ihrer Ebene wären auch bald gefunden. Es sind die grössten Kreise einer mit unendlich grossem Halbmesser beschriebenen Kugelfläche. Wenn sonst die Geometer, um den Begriff der Ebene festzustellen, sagten: man solle sich eine Fläche denken, in der nach allen Richtungen hin gerade Linien möglich: — würde man jetzt, um die Vorstellung der nothwendigen Fundamentalfläche zu erhalten, fordern: sich eine Kugelfläche ins unendliche hin erweitert zu denken. Alles käme nur darauf an, dass diese classische Fläche nur auf einzige Weise möglich sey. Wäre sie es nicht: so versänke alle Geometrie in einem unbestimmten Unendlichen; das Loos des Geometers sowie des ganzen menschlichen Geistes könnte furchtbar genannt werden; es gäbe nichts absolut Wahres, keine Geometrie, keine Astronomie, keine Physik; alles läge vergraben in dem unergründlichen Meere des unendlich mal unendlichen Raumes. Wunderbare unbegreifliche Gränzen der menschlichen Fassungskraft; — nicht einmal wesenlose, ohne göttlichen Geisteshauch todte Raumformen vermöchte selbständig zu erschaffen der Mensch. Aber es ist zum Glück nicht so. Denn, wie man sich leicht überzeugen kann, ist jene unendliche Kugelfläche nur einzig, oder wenigstens eine mit der andern symmetrisch.

3) Auf jener Kugelfläche gilt offenbar die ganze Euklidische Geometrie, aber nur bis zur Stereometrie, welche unbestimmt bleibt. Nur in einem Raume mit vier Dimensionen würde auch diese sich geben lassen. Man denke sich nemlich als möglich, dass über der geraden Linie ACB statt 2 Recht. Winkel 4 R. W. lägen, und beschreibe mit dem Radius CA einen Halbkreis $ADEB$, ziehe CD und CE so, dass $ACD = BCE = 90^0$. Dann würde man das einemal eine Kugel beschreiben, für welche CD die Aequatorebene bildete, das andremal eine für CE. Beide Kugeln würden eine Berührung der dritten Art, oder eine körperliche Begränzung an ihrem Durchschnitt haben. Man denke sich diesen körperlichen Raum zu einer Fläche zusammengezogen. Dann wäre diese die für die Stereometrie klassische Fläche, durch welche der Raum bei stereometrischen Constructionen begränzt gedacht werden müsste. —

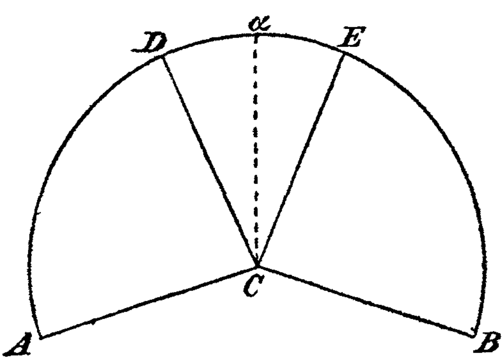

Fig. 4.

Vor kurzem suchte ich die Construction des Fundamentalkörpers, (der, was der Würfel für den Raum von drei Dimensionen) allgemein für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Ich fand, dass dieses, wofern eine gewisse Schlussart richtig ist, mit der Zahl der rechten Winkel um einen Punkt in der Ebene zusammenhänge, dass nämlich der Raum n Dimensionen haben würde, wenn die Summe der rechten Winkel um einen Punkt herum $= 2^{n-1}$, und dass dann die Zahl der E c k e n des Fundamentalkörpers in diesem Raum von n Dimensionen durch 2^n, die Zahl der Begränzungen der ersten Art von der Dimension $(n-1)$ für jede Ecke durch n, und die Zahl derselben, der Gränzkörper von der Dimension $(n-1)$ für den ganzen Körper durch $2n$, die Zahl der Berührungen der zweiten Art von d. Dim. $(n-2)$ durch $4n$, sein körperlicher Inhalt, wenn die Seite L, durch L^n, und seine Diagonale durch $L\sqrt{n}$ gegeben werde. — Von einer andern Seite lässt sich zeigen: dass w e n n e s m ö g l i c h, dass e i n e g e r a d e L i n i e Z w e i g e h a b e, sie derselben unendlich viele, und a u c h d e r R a u m unendlich viele Dimensionen haben würde. Auf g e w i s s e Weise könnte man sagen, dass auch in Ihrer, der antieuklideischen Geometrie, der Raum unendlich viele Dimensionen habe, die aber alle wieder im unendlichen liegen. Nämlich es sey*) BAC ein rechter Winkel, AD die Constante für das rechtwinklichte asymptotische Dreieck, dessen anderer Winkel $= 45^0$; der rechte Winkel werde durch AD halbirt, dann liesse sich dieselbe Construction durch DE, EF u. s. w. an den Punkten D, E, F u. s. w. wiederholen, ohne dass die Linie AC jemals erreicht würde, — und dieses auf analoge Art räumlich gedacht gäbe innerhalb des von den drei

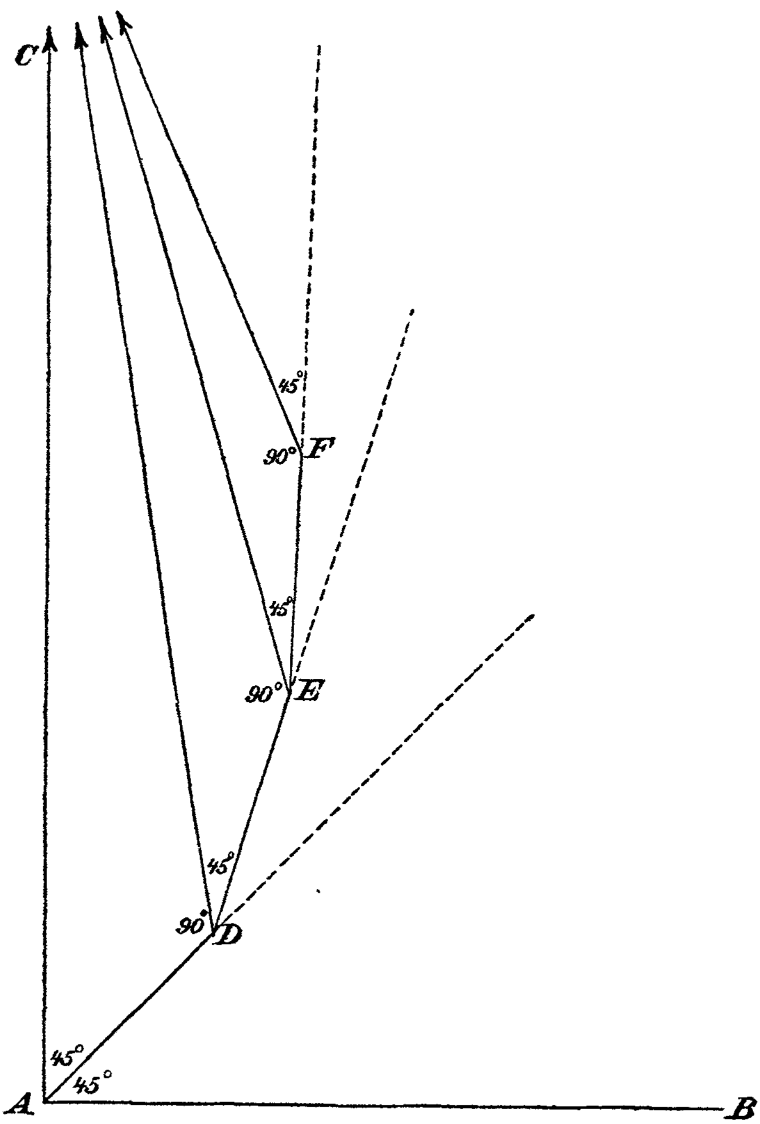

Fig. 5.

*) [Die flüchtig gezeichnete Figur des Originals ist durch eine genauere ersetzt worden. St.]

rechtwinkligen Ebenen begränzten Raumes körperliche Ecken, welche zuerst durch 3 Ebenen von 45^0 Oeffnung begränzt, der Reihe nach durch eben so viele Körper von der Dimension 3, 4, 5 u. s. w. bis ∞, begränzt gedacht werden könnten.

Das Resultat des Bisherigen wäre also so auszusprechen:

Die Euklideische Geometrie ist falsch; aber dennoch muss die wahre Geometrie mit demselben elften Euklideischen Axiom d. i. mit dem Postulat von Linien und Flächen anfangen, welche die in jenem Axiom behauptete Eigenschaft haben. Statt der geraden Linie und Ebene sind nur die grössten Kreise jener mit unendlichem Radius beschriebenen Kugel nebst ihrer Oberfläche zu setzen. Es entsteht zwar die eine Unbequemlichkeit daraus, dass die Theile dieser Fläche bloss symmetrisch, nicht wie bei der Ebene, congruent sind, d. i. dass der Radius nach der einen Seite hin unendlich, nach der andern imaginär ist; allein wie jene Unbequemlichkeit durch viele andere Vortheile, welche die Construction auf einer Kugelfläche darbietet, wieder aufgewogen werde, ist klar: sodass vielleicht auch dann noch, wenn die Euklideische Geometrie wahr wäre, zwar nicht mehr die Nothwendigkeit obwaltete, die Ebene als eine unendliche Kugelfläche zu betrachten, aber doch noch die Fruchtbarkeit dieser Ansicht dieselbe empfehlen könnte.

Allein als ich alles dieses durchdacht, als ich mich über das Resultat schon völlig beruhigt hatte, theils weil ich glaubte der Grund (la métaphysique) jener der Geometrie nothwendig anhaftenden Unbestimmtheit, — auch selbst der vollendeten Unentschiedenheit in dieser Sache, dann, wenn jener Beweis gegen die Euklideische Geometrie, wie ich nicht erwarten durfte, nicht für stringent zu halten sey — [, lasse sich aufklären]; theils weil doch alle die vielen bisherigen Untersuchungen aus der ebenen Geometrie nicht für verloren zu achten: sondern mit einigen Modificationen zu gebrauchen wären, und denn doch wenigstens bis zu einer ziemlich weiten Gränze hin, die sich vielleicht auch näher bestimmen liesse, auch die Sätze der körperlichen Geometrie und der Mechanik näherungsweise Gültigkeit hätten; fand ich heute Abend — eben mit einem Versuch beschäftigt, einen Eingang zu Ihrer transcendenten Trigonometrie zu finden, und weil es mir nicht gelingen wollte, in der Ebene dafür hinreichende, bestimmte Functionen zu erhalten, zu räumlichen Constructionen fortgehend, — zu meiner nicht geringen Überraschung folgenden Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie.

1) Man beschreibe mit einem asymptotischen rechtwinklichten Dreieck einen geraden Kegel, welches möglich nach Eukl. XI. Lehrs. 4. Die krumme Oberfläche desselben wird also ebenfalls mit der Basis asymptotisch zusammenlaufen.

2) Man nehme vom Scheitel A aus in der Oberfläche des Kegels drei gerade Linien AB, AC, AD, so dass alle drei in dieselbe Halbkegelfläche fallen; und lege durch je zwei AB u. AC, AB u. AD, AC u. AD Ebenen resp. $ABCA$, $ABDA$, $ACDA$, von denen also jede nur in den zwei gegebenen geraden Linien von der Kegelfläche begränzt und ausserdem in keiner andern von ihr geschnitten wird. *Ferner können diese Ebenen nicht die Kegelbasis schneiden, weil sonst auch ihre Gränzen AB, AC, AD sie schneiden würden*)* gegen die Construction (1). Mithin müssen diese Ebenen soweit sie innerhalb des Kegels liegen, mit der Basis, also auch mit der Oberfläche des Kegels asymptotisch zusammenlaufen, und werden daher einen asymptotischen Raum einschliessen.

3) Man setze, von den Linien AB, AC, AD liege AC in der Mitte, sodass der ebene Winkel $BAD > BAC > CAD$, und ziehe aus irgend einem Punkte der begränzten Ebene $ABDA$ ein Perpendikel auf dieselbe (es wird hier nur gefodert, dass es ein solches Perpendikel gebe, (Eukl. XI Lehr. 4), nicht [dass es] eigentlich construirt werde, obgleich auch diese Construction, welche bei Euklid die Paralleltheorie voraussetzt, unabhängig und zwar mit mehr Concinnität durch die Kugel geleistet werden könnte), so muss dieses gehörig verlängert, aus jenem asymptotischen Raum (2) wieder herausgehen, und also die Ebenen $ABCA$ oder $ACDA$ schneiden. Durch einen Punkt dieses Perpendikels, innerhalb des asymptotischen Raums, denke man sich eine Ebene, parallel der Ebene $ABDA$ d. i. eine solche, auf welcher jenes Perpendikel ebenfalls senkrecht steht. Dieselbe wird entweder eine der Ebenen $ABCA$ oder $ACDA$ oder beide u. in diesem Falle auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie AC schneiden, und aus der Figur der Durchschnittslinie würde, wie man sich leicht überzeugt, folgen, dass entweder eine Ebene eine andere in mehr als einer geraden oder in einer krummen Linie schneiden, oder folgen, dass entweder eine gerade Linie, oder zwei eine Ebene begränzen könnten, welches unmöglich.

Also ist kein solcher asymptotischer Kegel möglich, also auch kein solches asymptotisches Dreieck. W. Z. B. W.

Der Beweis hätte sich übrigens auch leicht auf den Satz zurückführen lassen, dass zwei gerade Linien nicht zugleich in einem Punkte einander schneiden, und nach der andern Seite hin asymptotisch zusammenlaufen können.

Könnten Sie übrigens, grosser Mann! dieses und anderes Aehnliche Ihrer Billigung nicht unwerth achten: so wäre ich geneigt, in einiger

---

*) [Das *cursiv* gedruckte ist im Originale rot unterstrichen.]

Zeit, unter dem Namen: Philosophie der Mathematik, ein Werk erscheinen zu lassen, welches die Grundprincipien dieser Wissenschaft, der Arithmetik, Geometrie und Analysis, und vielleicht auch der reinen Mechanik enthalten soll. Schon vor geraumer Zeit wurde ich von zwei Männern, welchen in deutscher Philosophie, Art und Kunst, eine bedeutende Stimme zuerkannt wird, von Bouterwek und Fries dazu ermuntert, meine Ansichten über Mathematik, so weit diese mit der Philosophie zusammenhängt, bekannt zu machen. Ich zögerte, einestheils weil ein solches Unternehmen nur durch die strengste mathematische Analyse begründet werden darf, und mir hier noch manches fehlte; und dann auch, weil ich durch längeres Studium, vorzüglich des Plato, mir eine gewisse Form der Darstellung anzueignen hoffte, von welcher jenes Werk, das auch einen rein philosophischen Theil erhalten musste, nicht entblösst sein sollte. Würden Sie urtheilen, dass dasselbe von mir nicht temere susceptum sey: so würde es mir zum grossen Glücke gereichen, wenn ich dann dem Zuge meines Herzens folgen und diese Arbeit, von der ich alles, was von eigentlich mathematischem Sinn zeugen könnte, nur Ihnen zu verdanken hätte, als ein öffentliches monumentum pietatis Ihnen weihen dürfte.

Gerade im Begriff zu schliessen bemerke ich noch, dass der obige Beweis für die Eukl. Parallel-Theorie fehlerhaft ist. Der Fehler liegt offenbar in den roth unterstrichenen Zeilen. Der Durchschnitt jener drei Ebenen mit der Kegelbasis geschieht nur in einem asymptotischen Dreieck, dessen 3 Winkel = 0 sind. Gäbe es eine von drei ebenen Winkeln begränzte körperliche Ecke, von denen der eine Winkel = der Summe der beiden übrigen, so liesse sich auch dann noch der Beweis führen; aber dieses ist nicht möglich. — Also wäre auch hier die Hofnung verschwunden, zu einem völlig entschiedenen Resultat zu kommen, und ich muss mich wieder bei dem vorhin Angeführten beruhigen. Übrigens glaube ich auf jenem Wege wenigstens einen Schritt zu Ihrer transcendenten Trigonometrie gethan zu haben, indem ich mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, die Verhältnisse aller Constanten, wenigstens durch Construction in rechtwinklichten Dreiecken, angeben kann. Es fehlt mir noch die wirkliche Berechnung der Basis eines gleichschenklichten Dreiecks aus der Seite, wofür ich suchen werde vom gleichseitigen Dreieck auszugehen. . . .

Wachter an Gauss. Danzig, den 25. Februar 1817.

Wohlgeborener,

Hochgeehrtester Herr Professor,

Sie haben noch nicht die Güte gehabt, verehrtester Lehrer, meinen Brief vom Dec. v. J. zu beantworten, und ich muss daraus schliessen, dass sie ihn keiner Antwort würdig geachtet haben. Mir wollte es später, in der Erinnerung, selbst so scheinen, als sei manches noch zu schülerhaft, Wahres mit vielem Halbwahren vermischt gewesen, als dass Sie es Ihrer Aufmerksamkeit hätten werth halten können. Es bleibt mir nichts anders übrig, als dass ich versuche, meinen Fehler wieder gut zu machen, indem ich Ihnen etwas Gediegeneres mitzutheilen wage, im Vertrauen auf Ihre gütige Nachsicht.

Sie finden mich nach zweimonatlicher Unterbrechung wieder zu demselben Punkte zurückgekehrt, zur Paralleltheorie. Ich weiss nicht, ob es meine wissenschaftliche Ausbildung hindern oder fördern mag, dass ich mich immer noch an der Schwelle der Mathematik herumdrehe; ich muss selbst fürchten, dass Sie solches sehr missbilligen werden; allein einestheils treibt mich leider der Elementarunterricht, zu dem meine Verhältnisse mich nöthigen, immer wieder dazu zurück; und dann auch glaube ich ein tieferes Eindringen in die Wissenschaft, durch ein völliges Klarwerden über ihre Grundbegriffe und Methode, erst gehörig begründet zu haben. Genug, ich hoffe, dass diesmal mein Bemühen nicht vergebens gewesen ist, und ich glaube jetzt, das Räthsel der Paralleltheorie gelöst zu haben.

Vor einigen Tagen ergab sich mir die Idee, und ich hielt sie fest, dass der Satz: Durch jede 3 Punkte in der Ebene sei ein Kreis möglich, nicht erst durch Hülfe der Paralleltheorie: sondern umgekehrt diese durch jenen erwiesen werden müsse. Allein es zeigte sich bald, dass der letztere Beweis auch nicht möglich. Es blieb nichts anders übrig, als zu 4 Punkten fortzugehen, und zu untersuchen, ob durch jede 4 Punkte im Raume eine Kugelfläche möglich, oder nicht möglich; mit welcher Untersuchung die ganze Geometrie stehen, oder fallen muss. Es gelang mir bald der Beweis, und ich wage es, Ihnen hier die Grundzüge desselben vorzulegen. Ich setze dabei voraus, dass das 11$^{\text{te}}$ Euklidische Axiom falsch sei, und zeige, dass jener Satz wahr sei, völlig unabhängig von aller Paralleltheorie.

1) Postulat. Durch jede 4 Punkte im Raume ist eine Fläche möglich, welche von einer andern, einzig und allein durch 4 Punkte bestimmten, in nicht mehr als einer allein durch 3 Punkte bestimmten

Linie geschnitten wird. Ich sehe dieses als die Definition der Fläche an, welche ich kurz die Fläche der 4 Punkte nennen will.

Es ist dieses das allgemeinste und einzige Postulat der Geometrie, von dem die Postulate einer Ebene durch 3 Punkte, oder der geraden Linie durch 2 Punkte, oder auch einer krummen Linie durch 3 Punkte in einer Ebene, nur besondere Fälle sind. Ich bin überzeugt, dass sich dieses Postulat zur höchsten Evidenz bringen lässt, und man muss es entweder zugeben, oder die ganze Geometrie läugnen.

2) Theorem. Die Fläche von 4 Punkten schliesst einen Raum ein.

Gesetzt es sei falsch, so wird sie entweder durch eine Ebene irgend wo asymptotisch begränzt, oder es giebt für sie keine solche asymptotische Ebene zur Gränze.

I. Man setze, sie habe eine solche Gränze. Dann fälle man aus irgend einem Punkte der Fläche eine Senkrechte auf diese asymptotische Ebene. Aus ihrem Durchschnittspunkte mit der Fläche giebt es eine gerade Linie, welche Asymptote der asymptotischen Ebene. Mit dieser beschreibe man einen asymptotischen Kegel, welcher entweder die Fläche in einem Theile schneidet, sodass gerade Linien in der Kegelfläche erst aus der inneren Seite der Fläche von 4 Punkten auf die äussere treten, und später wieder asymptotisch diese Fläche zwischen sich und der asymptotischen Ebene (der Kegelbasis) einschliessen, oder die Fläche bloss von innen asymptotisch berühren. In beiden Fällen ist eine (Berührungs)ebene an der Kegelfläche möglich, welche im letztern Falle die Fläche von 4 Punkten in zwei Linien (von drei Punkten) schneidet, gegen die Definition, oder im ersteren Falle in einer Linie von solcher Gestalt dass die beiden Zweige $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ asymptotisch zusammenlaufen, welches aber eine Linie nicht von 3 Punkten, sondern von 4 Punkten seyn würde, ebenfalls gegen die Definition.

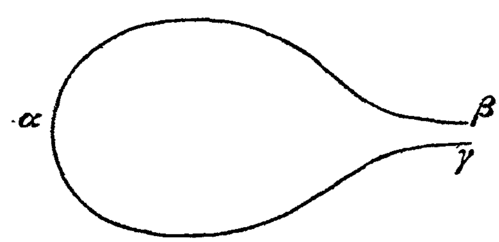

Fig. 6.

Der zweite Theil des Beweises ist leichter, da er sich auch schon von der Linie durch drei Punkte in einer Ebene auf gleiche Weise führen lässt, welches von dem ersten Fall des vorigen Theils nicht gilt, denn sonst brauchte man bei dem ganzen Beweise für das 11$^{\text{te}}$ Eucl. Axiom nicht aus der Ebene herauszugehen. Doch fand ich diesen Theil des Beweises erst später, und erst nach erhaltener Überzeugung, dass er in vier Dimensionen möglich.

II. Man setze die Fläche von 4 Punkten habe keine asymptotische Ebene. Es werde eine Ebene A so durch die Fläche gedacht, dass sie dieselbe in keiner geschlossenen Linie schneidet. Andere Ebenen darauf senkrecht, und unter einander parallel, werden mithin, der Hypothesis gemäss, bis ins unendliche fort die krumme Fläche schneiden. Darauf wähle man irgend 3 Punkte in dieser Fläche, nur nicht in der Ebene A, sondern auf einer Seite derselben, und beschreibe durch sie eine Kugelfläche von unendlich grossem Halbmesser, welche, wie leicht zu beweisen, ihre hohle Seite der convexen der Fläche von 4 Punkten zukehren und in den hohlen Raum der letzteren eintreten wird. Der Durchmesser der Kugel ist die Linie, die auf einer Ebene durch jene 3 Punkte senkrecht, und schneidet entweder die Ebene A oder irgend eine andere dieser parallelen Ebene. Woraus mit Hülfe der Sätze, die ich schon bei Gelegenheit der Metternichschen Recension in der Zeitschrift bewiesen, *folgen**) würde, dass der Mittelpunkt der Kugel wieder ausserhalb *des von* der hohlen Fläche umgebenen Raumes fallen müsste; als die *Ebene* die krumme Fläche noch in einer zweiten Linie schnitte; gegen die *Definition.*

3) Theorem. Die Fläche von 4 Punkten ist eine geschlossene, und mithin eine Kugel. Wie leicht zu beweisen.

4) Theorem, Durch jede 3 Punkte in der Ebene ist ein Kreis möglich. Folgt aus Th. 3.

5) Beweis für das 11te Axiom.

Es kann seyn, dass ich mich irre, allein ich habe mich so von der Evidenz meines Beweises überzeugt, dass ich wagte, ihn drucken zu lassen. Wenige Seiten darüber enthalten die im vorigen angedeuteten Beweise; zwar nur kurz, weil ich sonst fürchtete, wiederholt in den im vorigen Briefe an Sie begangenen Fehler der Weitläufigkeit zu verfallen; allein ich glaube, dass es für den eigentlichen Mathematiker hinreichen wird. In wenigen Tagen werde ich so frei sein, ein Exemplar der Abhandlung an Sie abgehen zu lassen.

Indem ich bescheiden die Hoffnung hege, dass Sie mir, verehrtester Lehrer, Ihr richtendes Urtheil über meinen Beweis nicht vorenthalten wollen, verharre ich in unbegränzter Hochachtung

Ihr

ergebener

F. L. Wachter.

---

*) [Der Brief ist stellenweise beschädigt. Die ergänzten Worte hier und im Folgenden sind durch *cursive* Typen gekennzeichnet worden.]

Wachter an Bessel. Danzig, den 17. März 1817.

... Der Titel der beiliegenden Abhandlung empfiehlt sie nicht als eine solche, welche man mit vielen Erwartungen zur Hand nehmen könnte. Die vielen meist sehr zuversichtlich angekündigten, aber misslungenen Versuche einer Begründung der Euklideischen Parallel-Theorie haben das Zutrauen, das man sonst in neue Versuche über diesen Gegenstand setzen durfte, fast vernichtet. Dennoch bleibt die endliche Vollendung dieser zweifelhaften Lehre ein Bedürfniss, ohne dessen Befriedigung alle Geometrie nebst ihrer Anwendung auf blossem empirischen Glauben beruhen müsste, — einer Überzeugungsart, welche dieser Wissenschaft völlig fremd, ja geradezu entgegengesetzt ist. Allein gerade der Mangel an allgemeinerer Verbreitung der ächten mathematischen Methode zeigt sich auch nirgends deutlicher als hier, wo man sich in einem steten logischen Kreise herumgedreht hat. Der wirkliche Beweis dafür, dass bei allen bisherigen Versuchen über Parallel-Theorie ein solcher Kreis zum Grunde liegt, ist nicht schwer zu führen; und es bleibt in der Geschichte der Mathematik gewiss merkwürdig, dass noch niemand die Wahrheit des elften euklideischen Axioms bezweifelt hat, wie es, der Form nach, schon die sonst gebräuchliche apagogische Beweisart mit sich gebracht haben würde; und wie es des Geometers allein würdig gewesen wäre, wenigstens die Folgen zu entwickeln, die Statt haben müssten, sobald dieser Satz vielleicht falsch, oder doch völlig unbeweisbar war. Doch diese Folgen, von denen einige interessant genug scheinen, darzulegen, kommt mir — obgleich ich der erste gewesen bin, der die ersten, aus einer dem elften Axiom entgegengesetzten Hypothesis handgreiflich folgenden Sätze angedeutet hat, in einer in der astronom. Zeitschrift abgedruckten Recension, — weniger zu als Gauss, der, wie ich später von ihm erfuhr, schon seit vielen Jahren mit solchen Entwickelungen beschäftigt gewesen ist. Ich bin nur froh, mich durch meine jetzige Arbeit von einer viermonatlichen Qual befreit zu haben, die durch ein völliges Verzweifeln an der Wahrheit der euklideischen Parallel-Theorie, mithin an der Möglichkeit aller Geometrie über den 28ten Satz des Euklides hinaus, denn auch keine andere ihr entgegengesetzte Geometrie könnte als wahr begründet werden — und durch den daraus unmittelbar folgenden Zweifel an aller, so weit sie von der Geometrie abhängig, absolut wahren Astronomie und Physik, entstanden war.

Das von mir zum Beweis des elften Axioms gebrauchte Verfahren ist in sich selbst klar, und ich muss nur wünschen in der Ausführung desselben durch mein Streben nach gedrängter Kürze nicht in den Fehler der Unverständlichkeit gefallen zu seyn. ...

Wachter, der Vater, an Gauss. Hamm, den 10. Mai 1817.

... Welche grosse Pläne hatte er noch! Als er mir sein letztes Werk die *Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi* übersandte, räsonnirte er vieles über die interessanten Folgen, die es gehabt hätte, wenn die Euclidische Geometrie nicht wahr wäre, deren Wahrheit er nun durch seine Schrift bewiesen zu haben überzeugt war. Indem er mir ihre Entstehungsgeschichte in seinem Kopfe meldet, sagt er:

„Hätte ich in gewöhnlichem Tone schreiben wollen, so hätte ich 5—10 Bogen gebraucht und Kupfertafeln, die ich hier schwerlich erhalten konnte. Ich habe mich der grössten Kürze befleissigt, sodass es jedem andern Mathematiker als H. *Gauss* schwer seyn wird, zu folgen. Es mag auch interessant scheinen, das, worüber seit Euclides Zeiten, Quartanten sind vergebens gearbeitet worden, auf einem einzigen Bogen ausgeführt zu sehen. Sie sehen, dass ich mit vieler Zuversicht schreibe. Aber halten Sie das nicht für Folgen meiner Phantasie, die Ihnen viel zu lebhaft scheint, sondern seyen Sie versichert, dass ich dabei so nüchtern gewesen bin und noch bin, dass ich am Ende nicht weiss, wohin mich diese Nüchternheit noch führen wird. Ich sollte viel Freude über das Gelingen meiner Arbeit empfinden, aber ich empfinde sie nicht. Ich habe das gefunden, wovon ich früher glaubte, wenn ich das erreicht, ruhig aus dieser Welt scheiden zu können. Ich könnte hoffen, viel Ruhm einzuärnten, für die Lösung eines Problems, für das die Anstrengung zweier Jahrtausende bisher nicht hingereicht hatte. Doch hiernach wäre der Werth dieser Arbeit zu gering angeschlagen. Man hat bisher noch gar nicht einmal daran gedacht, die eminenten Folgen zu überblicken, die es hätte, wenn die Paralleltheorie nicht wahr wäre. Man hat nicht mal gewagt, an der Wahrheit des 11ten Eucl. Axioms zu zweifeln, obgleich alle Bemühungen es zu beweisen vergebens waren, und es des Geometers nicht allein würdig, sondern ihm selbst nothwendig war, so lange auch das Entgegengesetzte dieses Satzes für möglich zu halten. Dass dieses nicht geschehen, ist ein sehr böses Zeichen für den Zustand der Wissenschaft und des geometrischen Sinnes. Man muss durchaus verzweifeln ächt mathematischen Sinn als Gemeingut unter die Menge zu bringen, vielleicht noch mehr als ächt ästhetischen und rein philosophischen Sinn zu verbreiten. Es giebt keine Schulen für reine Geometrie; sondern bloss empirische für den Tastsinn, gleichviel äussern oder innern, auch die sogenannte intellectuale Anschauung gehört hieher. — Es giebt in der Mathematik kein Axiom; will man sie, so muss man die Wissenschaft aufheben. Der einzige Mathematiker, von dem man hoffen darf, das anerkannt zu sehen, ist *Gauss*; er ist aber der einzige

Mathematiker, den es giebt und gegeben hat, und er ist noch viel zu wenig anerkannt. Von Männern wie *Newton*, *La Grange*, *La Place*, *Le Gendre*, *Euler*, *Euclid*, *Archimed*, *Apollonius etc.* kann man dieses nur in so fern sagen, als es die mathematischen tiefsinnigen Combinationen und Anwendungen auf Astronomie und Physik betrifft. Die Principien, von welchen alles abhängt, haben sie nicht weiter gebracht. Ein Glück, dass der menschliche Geist eine solche Organisation besitzt, dass ein feiner Tact oft eben so sicher leitet, als eine wissenschaftliche Überzeugung, und jener führt schneller zum Ziele als das meistens mühsam erhaltene. Hätte man gewartet bis die Principien aufs Reine gebracht waren: so wäre in höherer Mathematik und Physik bis dahin gar nichts geschehen. Hierin könnte sich das Walten eines höheren Geistes über den Menschen offenbaren, der dem menschlichen Geiste instinktartig eingiebt, was ihm zuvörderst zu wissen noth thut. — Mich aber kann so etwas nicht befriedigen. Indess mein Geschäft ist geendigt; mir kommt es nicht zu, die Wahrheit dieses Gegenstandes vor Augen zu legen. Ein Ort für die Auseinandersetzung der mathematischen Methode kann in Zukunft meine Philosophie der Mathematik werden. Dieselbe zu schreiben, hält mich nichts weiter ab, als noch nicht getriebenes Studium der platonischen Formen und Mangel an Aufmunterung von aussen, und daher an Lust das, was ich selbst für mich lange besitze, und mir unwidersprechlich klar ist, zu Papier zu bringen. — Indess begnüge ich mich, durch die Lösung jenes Problems mich von einer 4 monatlichen Qual und Pein wegen meines Zweifels an der Wissenschaft befreit zu haben, und das ist mir genug. Fremdes Urtheil kann dazu wenig hinzuthun oder entfernen. — In dieser Welt erwarte ich kein Heil für Mathematik. Die mathematische Methode ist ein Extrem, das Äusserste der geistigen Abstraction, und in dieser Welt lässt Mangel an abstractem Sinn und an gehöriger Leitung dazu oder andere davon abziehende historische Wissenschaften oder das Practische ihres Lebens oder Mangel an Selbstdenken wenige zu diesem Äussersten kommen. — Verzeihen Sie mir diesen Ton, in den ich gefallen bin; er ist nicht böse; ich überhebe mich nicht über mich selbst; ich überhebe mich nicht über andre; ich weiss was ich, wie viel ich besitzen mag, und dies ist ein Minimum, aber schon das ist viel, etwas Rechtes zu wissen; wenigstens mehr als andre, die sich mit einer Masse von Kenntnissen brüsten, ohne zu wissen, wie und warum ihnen diese Kenntnisse geworden sind.“ . . .