Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper.

Von

T. Bonnesen in Kopenhagen.

Ist p der Umfang, f der Flächeninhalt einer ebenen Kurve, so besteht bekanntlich die Ungleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt. Bei dem Versuch, diese Ungleichung mit elementargeometrischen Mitteln zu beweisen, gelangte ich zu folgender verschärften Ungleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}(R-r)^2,$$

wo R den Radius des kleinsten die Kurve enthaltenden Kreises, r den Radius des größten der Kurve einschreibbaren Kreises bedeutet, und wo das Gleichheitszeichen wiederum nur für den Kreis gilt. Nach dem Beweise dieser isoperimetrischen Ungleichheit wird die analoge Ungleichheit auf der Kugel abgeleitet, und mit Hilfe der gewonnenen Resultate beweise ich dann die von Minkowski entdeckte Ungleichheit für konvexe Körper

$$\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq 0,$$

wo o die Oberfläche und k das unten näher bezeichnete Konturintegral des Körpers bedeutet[1]).

[1]) Comptes rendus **172** (1921), S. 1087–89. — Matematisk Tidsskrift, København, 1921, S. 1–13, 48–51.

I. Die isoperimetrische Aufgabe in der Ebene.

1. Wir gehen von einem konvexen Polygon K aus, dessen Umfang und Flächeninhalt mit p und f bezeichnet werden, und konstruieren die äußere Parallelkurve $K(\varrho)$ von K im Abstande ϱ. Diese Kurve ist aus den um die Strecke ϱ verschobenen Polygonseiten und aus Kreisbogen mit Radius ϱ und Zentren in den Polygonecken zusammengesetzt. Der Umfang $p(\varrho)$ und der Flächeninhalt $f(\varrho)$ von $K(\varrho)$ sind unmittelbar durch die folgenden Formeln bestimmt

$$p(\varrho) = 2\pi\varrho + p \tag{1}$$

$$f(\varrho) = \pi\varrho^2 + \varrho p + f. \tag{2}$$

Diese Formeln lassen sich sofort auf eine beliebige konvexe Kurve übertragen. Aus (1) und (2) folgt

$$M \equiv \frac{p(\varrho)^2}{4\pi} - f(\varrho) = \frac{p^2}{4\pi} - f.$$

Der Wert von M ist folglich von ϱ unabhängig. Für $\varrho = -\frac{p}{2\pi}$ nimmt die Funktion $f(\varrho)$ ihren Minimalwert, $-M$, an, während $p(\varrho) = 0$ ist. Unsre Aufgabe ist, zu zeigen, daß M positiv ist, oder daß der Minimalwert von $f(\varrho)$ negativ ist. Es wird genügen zu zeigen, daß die Funktion $f(\varrho)$, die für positive Werte von ϱ positiv ist, überhaupt für einen negativen Wert von ϱ negativ werden kann. Wenn in (2) ϱ durch $-\varrho$ ersetzt wird, kann die Aufgabe so formuliert werden:

Ist es möglich für ein beliebiges konvexes Polygon einen positiven Wert von ϱ anzugeben, für welchen die Funktion

$$\varphi(\varrho) = \varrho p - f - \pi\varrho^2 \tag{3}$$

positiv ist?

2. In dem speziellen Fall, wo das Polygon K einem Kreis mit dem Radius r umbeschrieben ist, sieht man gleich ein, daß $\varphi(r) > 0$, weil dann $rp = 2f$ und $f > \pi r^2$ ist. Es gilt aber allgemein der

Satz 1. *Für ein beliebiges konvexes Polygon vom Umfang p und Flächeninhalt f ist*

$$\varphi(r) = rp - f - \pi r^2 > 0, \tag{4}$$

wenn r den Radius des größten im Polygon enthaltenen Kreises bedeutet.

Zur Bestimmung der Lage eines größten Innenkreises C kann man von einem Innenkreis ausgehen, welcher mindestens zwei Seiten von K berührt. Sind diese Seiten parallel, dann ist der größte Kreis schon gefunden. Zwischen den Parallelen liegen zwei Reihen von Seiten, welche bis zur Berührung mit C parallel verschoben werden können, ohne daß der Wert von $\varphi(r)$ dabei geändert wird. Denn sowohl rp als f werden bei einer Verschiebung um die Strecke a um $2ra$ verkleinert. Der Kreis C wird von den Berührungspunkten mit dem neuen Polygon in Bogen geteilt, welche kleiner als 180^0 sind. — Wenn aber ein Innenkreis zwei nicht parallele Seiten berührt, dann gibt es einen größeren Kreis, der wenigstens noch eine Seite berührt, und die Kreisbogen zwischen den Berührungspunkten sind kleiner als 180^0. Der größte Innenkreis kann also jedenfalls immer so angebracht werden, daß er drei Seiten des Polygons tangiert.

Es sei jetzt (Fig. 1) $ABCDEFGHA$ das gegebene Polygon mit seinem größten Innenkreis. ABC sei eine Reihe von Seiten, welche den Kreis nicht berühren, L der Schnittpunkt der nächstliegenden berührenden Seiten, und $A_1B_1C_1$ seien so konstruiert, daß

$$\frac{LA}{LA_1} = \frac{LB}{LB_1} = \frac{LC}{LC_1} = m < 1.$$

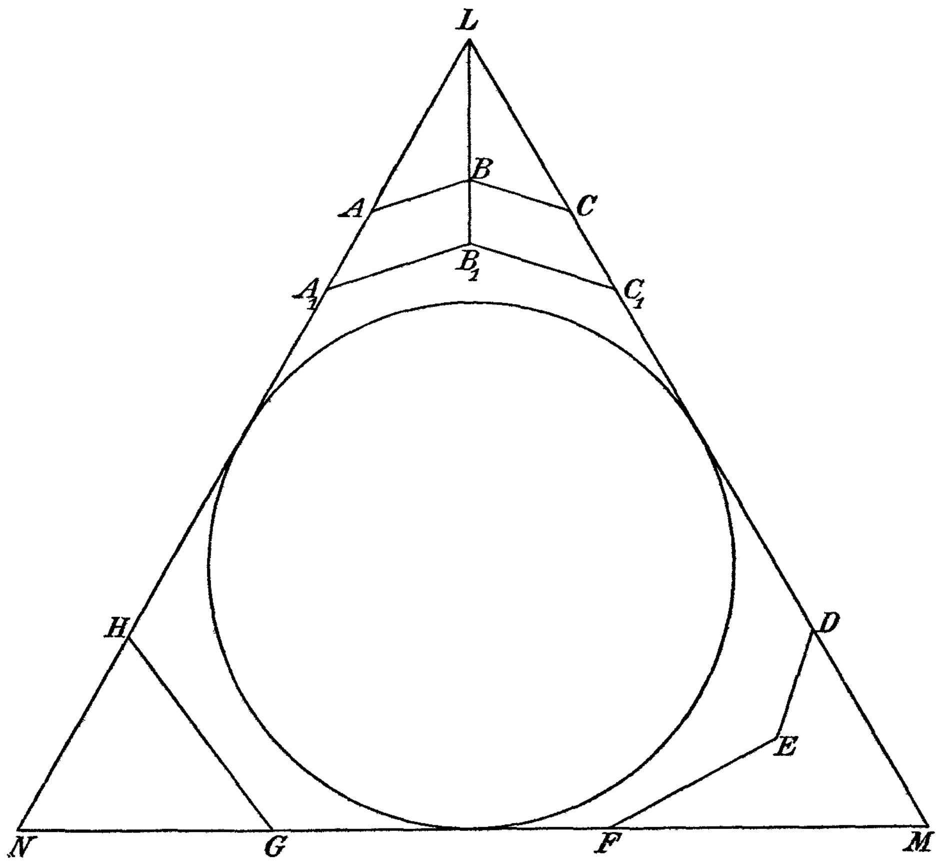

Fig. 1.

Wir vergleichen die zwei Polygone $ABCDEFGHA$ und $A_1B_1C_1DEFGHA$ und setzen

$$\varphi = rp - f - \pi r^2,$$
$$\varphi_1 = rp_1 - f_1 - \pi r^2,$$
$$\varphi - \varphi_1 = r(p - p_1) - (f - f_1).$$

Mit den Bezeichnungen $LA = a$, $LC = c$, $AB + BC = k$ und den analogen für $A_1 B_1 C_1$ ist

$$p - p_1 = (a_1 - a) + (c_1 - c) - (k_1 - k) = (1 - m)(a_1 + c_1 - k_1)$$
$$f - f_1 = (1 - m^2) t_1,$$

wo t_1 den Flächeninhalt $A_1 B_1 C_1 L A_1$ bedeutet, und somit

$$\varphi - \varphi_1 = (1 - m) r (a_1 + c_1 - k_1) - (1 - m^2) t_1.$$

Mit Hilfe der Dreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze im Zentrum des Innenkreises haben und die Grundlinien LA_1, LC_1, $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, sieht man, daß

$$r(a_1 + c_1 - k_1) \geqq 2 t_1,$$

wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $A_1 B_1$ und $B_1 C_1$ den Kreis berühren. Hieraus folgt

$$\varphi - \varphi_1 \geqq (1 - m) \cdot 2 t_1 - (1 - m^2) t_1 = (1 - m)^2 t_1.$$

Wir wählen jetzt einen solchen Wert von m, daß eine oder mehrere von den Seiten $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ den Kreis tangieren, während die übrigen außerhalb des Kreises bleiben. Das gegebene Polygon ist dann durch ein neues ersetzt worden, welches eine größere Anzahl von Berührungspunkten hat und einen kleineren Wert von $\varphi(r)$ gibt. Mit diesem neuen Polygon wird eine analoge Transformation vorgenommen usw., bis man bei einem umschriebenen Polygon endet. Für dieses ist, wie wir wissen, $\varphi(r)$ positiv, und $\varphi(r)$ muß also auch für das ursprüngliche Polygon positiv sein. Der Satz 1 ist hiermit bewiesen und somit auch die isoperimetrische Ungleichheit, $M > 0$, für konvexe Polygone.

3. Es ist nun möglich einen zweiten Wert von ϱ anzugeben, für welchen $\varphi(\varrho)$ positiv ist. Es gilt nämlich der

Satz 2. *Für ein beliebiges konvexes Polygon ist*

$$\varphi(R) = Rp - f - \pi R^2 > 0 \tag{5}$$

wo R der Radius des kleinsten Kreises ist, welcher das Polygon enthält.

Man sieht leicht ein, daß ein solcher kleinster Außenkreis c entweder eine größte Seite (oder Diagonale) als Durchmesser hat oder durch drei Ecken gehen muß, welche ein spitzwinkliges Dreieck bestimmen. Die Ecken, welche innerhalb des Kreises liegen, sind also immer in Kreisabschnitten verteilt, deren Bögen höchstens 180° sind.

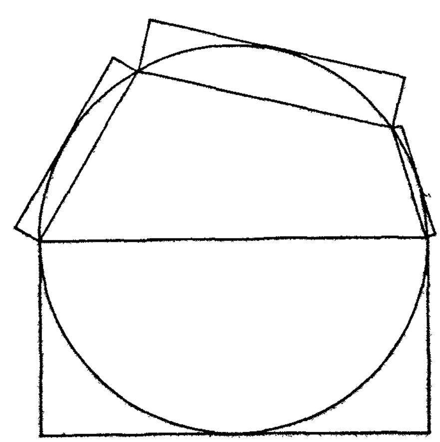

Fig. 2.

Wir betrachten zuerst den speziellen Fall, wo der kleinste Außenkreis dem Polygon umschrieben ist (Fig. 2). Über jeder Seite wird ein Rechteck so konstruiert, daß die gegenüberliegende Seite eine Tangente ist. Dann ist $Rp = 2f +$ die Rechtecke, oder $Rp - f = f +$ die Rechtecke, und weil die letztgenannte Figur den Kreis enthält, ist $Rp - f - \pi R^2 > 0$.

In dem allgemeinen Fall aber, wo das Polygon Ecken innerhalb des Kreises hat, wird der Kreis nicht ganz in der Figur enthalten sein, welche von dem Polygon und den Rechtecken zusammengesetzt ist. Es gibt dann eine Reihe von einem Kreisbogen und zwei Rechteckseiten begrenzten Sektoren, welche außerhalb des Kreises liegen (Fig. 3). Soll auch in diesem Fall $Rp - f - \pi R^2$ als positiv nachgewiesen werden, so ist zu zeigen, daß die Summe dieser Sektoren kleiner ist als die Summe derjenigen Teile der Rechtecke, die außerhalb des Kreises liegen.

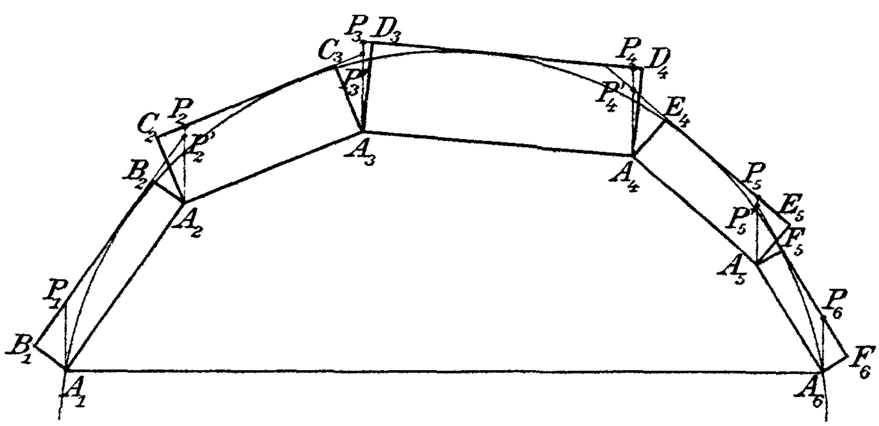

Fig. 3.

Es sei (Fig. 3) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ein Teil des Polygons, welcher in einem Kreisabschnitt kleiner oder gleich 180° enthalten ist. Durch die Ecken werden die Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2' P_2, \ldots$ senkrecht auf $A_1 A_6$ gezogen. Weil die Summe der Sektorwinkel $A_2, A_3, \ldots$ gleich $\angle B_1 A_1 P_1 + \angle P_6 A_6 F_6$ ist, wird entweder eine und nur eine der Geraden AP durch den entsprechenden Sektor gehen ($A_3 P_3$ in Fig. 3), oder zwei von diesen werden mit zwei Rechteckseiten zusammenfallen. Die übrigen Geraden durchkreuzen die Rechtecke, und es ist in Fig. 3 vorausgesetzt, daß sie die Tangentenseiten selbst schneiden. Wir fangen mit dem Teil des Sektors A_3 an, welcher rechts von der Geraden $A_3 P_3$ liegt. Dieser Teil ist kleiner als $\triangle A_3 D_3 P_3$, welches in die Lage $\triangle A_4 D_4 P_4$ parallel verschoben werden kann. Ein Teil dieses Dreiecks hat die gewünschte Lage innerhalb des Rechtecks und außerhalb des Kreises. Was übrig ist, wird zum Sektor A_4 addiert, und die Summe ist in dem Dreieck $A_4 E_4 P_4'$ enthalten, welches wiederum nach $\triangle A_5 E_5 P_5$ verschoben werden kann. Dieses wird in derselben Weise geteilt, wobei man mit $\triangle A_6 F_6 P_6$ endet, welches außerhalb des Kreises und innerhalb des letzten Rechtecks liegt. In analoger Weise behandelt man die Sektoren, welche links von $A_3 P_3$ liegen.

Wenn (Fig. 4) die Gerade $A_4 P_4$ nicht die Seite $D_3 D_4$ sondern $A_3 D_3$ schneidet, ist der Doppelsektor A_3 in einem Trapez $A_3 M_3 M_4 P_4$ enthalten,

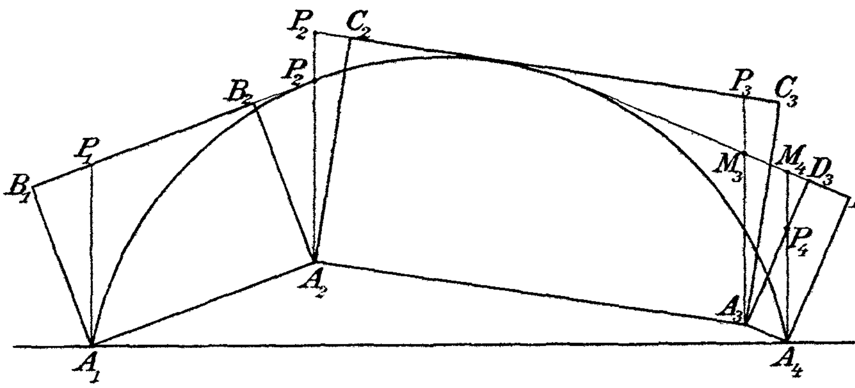

Fig. 4.

welches den nämlichen Flächeninhalt wie das Trapez $A_4 D_4 D_3 P_4$ hat, und dieses Trapez hat die gewünschte Lage. Die Ungleichheit

$$\varphi(R) = Rp - f - \pi R^2 > 0$$

ist hiermit bewiesen.

4. Aus dem gewonnenen Resultat, daß die Funktion $\varphi(\varrho) = \varrho p - f - \pi \varrho^2$ für $\varrho = r$ und $\varrho = R$ positiv ist, kann man schließen, daß $R - r$ kleiner ist als die Differenz $2\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} - \frac{f}{\pi}}$ der Nullstellen von $\varphi(\varrho)$, was uns den Satz liefert:

Satz 3. *Zwischen dem Umfang p und dem Flächeninhalt f eines konvexen Polygons besteht die Ungleichheit*

$$\frac{p^2}{4\pi} - f > \pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2, \tag{6}$$

wo R den Radius des kleinsten Außenkreises und r den Radius des größten Innenkreises bedeuten.

Der Umfang p, der Flächeninhalt f und die Radien R und r des Außen- und Innenkreises einer beliebigen konvexen Kurve können immer als Grenzwerte der entsprechenden Größen eines umschriebenen Stützpolygons berechnet werden, und es muß deshalb für alle konvexen Kurven die folgende Relation gelten:

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Also gilt nur wenn $R = r$, d. h. für den Kreis, die Gleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f = 0.$$

Die Relation (7) gilt auch für nicht-konvexe Kurven, welche einen bestimmten Umfang und Flächeninhalt haben, wenn R und r für die konvexe Hülle berechnet werden.

5. Aus der isoperimetrischen Maximaleigenschaft des Kreises kann man bekanntlich leicht folgern, daß unter allen Figuren, welche von einer gegebenen Strecke und einem Bogen von gegebener Länge begrenzt sind, der Kreisabschnitt den größten Flächeninhalt hat. Diesen Satz werden wir benutzen, um zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen in (7) nur für den Kreis ($R = r$) gelten kann.

Aus den für konvexe Polygone geltenden Ungleichheiten (4) und (5) folgt für beliebige konvexe Kurven, daß

$$Rp \geqq \pi R^2 + f, \qquad rp \geqq \pi r^2 + f. \tag{8}$$

Und weil durch (7) ausgedrückt wird, daß $R - r$ kleiner oder gleich der Differenz der Nullstellen der Funktion $\varphi(\varrho)$ ist, kann das Gleichheitszeichen in (7) nur gelten, wenn

$$Rp = \pi R^2 + f, \qquad rp = \pi r^2 + f,$$

das sagt, wenn

$$p = \pi(R + r), \qquad f = \pi R r. \tag{9}$$

Wir werden jetzt voraussetzen, daß eine Kurve K von dieser Beschaffenheit mit nicht zusammenfallendem Außenkreis C und Innenkreis c existiere. Für eine andere Kurve K_1 mit denselben C und c und mit derselben Länge p des Umfangs ist der Flächeninhalt f_1 durch die Ungleichheit $Rp \geqq \pi R^2 + f_1$ beschränkt, d. h. $f \geqq f_1$.

Es kann gezeigt werden, daß K aus Strecken und Kreisbogen zusammengesetzt sein muß. Im entgegengesetzten Fall könnte man auf einem Bogen, welcher C und c verbindet, einen inneren Punkt Q angeben, dessen Umgebung weder gerade noch kreisförmig wäre, und weiter zwei von Q getrennte Punkte P und R so dicht an Q, daß der Kreisbogen PR, welcher dieselbe Länge wie der Bogen PQR hat, auch zwischen C und c läge. Würde der Bogen PQR durch den Kreisbogen PR ersetzt, so erhielte man statt K eine neue Kurve K_1 mit demselben Umfang, aber mit einem größeren Flächeninhalt, $f_1 > f$, und zu K_1 gehörten dieselben C und c wie zu K. Dann ist aber, wie oben nachgewiesen, $f_1 \leqq f$, was mit $f_1 > f$ im Widerspruch ist.

Es ist selbstverständlich, daß K den Kreis c berührt. Wir werden zeigen, daß K auch C berühren muß. Man sieht leicht, daß eine äußere Parallelkurve K' von K von derselben Art (9) wie K ist. Denkt man sich, daß zwei Bögen von K in einem auf C gelegenen Knickpunkt M zusammenstoßen, so würde der M entsprechende Kreisbogen auf K' mit einem anderen Kreisbogen innerhalb des Außenkreises von K' zusammenstoßen. Das ist aber unmöglich, wie wir gesehen haben.

K muß also aus Kreisbögen bestehen, welche C und c berühren. Die innere Parallelkurve von K im Abstand r zeigt aber, daß dann K ein Vollkreis sein muß. Dieser fällt aber mit seinem Außenkreis und seinem Innenkreis zusammen. Es gibt also keine andere konvexe Kurve als den Kreis, für welche die Relationen $p = \pi(R+r)$ und $f = \pi R r$ bestehen.

6. Aus (7) erhellt, daß, wenn $p \leqq \pi(R+r)$, auch $f < \pi R r$ ist. Und wenn $f \geqq \pi R r$, ist $p > \pi(R+r)$.

Beispielsweise ist für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b $R = a$, $r = b$, $f = \pi a b$, und aus (7) folgt deshalb, daß $p > \pi(a+b)$.

Als zweites Beispiel führen wir die Kurven konstanter Breite b an. Hier ist $R + r = b$ und $p = \pi b = \pi(R+r)$, also $f < \pi R r$.

II. Die isoperimetrische Aufgabe auf der Kugel.

7. Es soll jetzt die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf einer Kugelfläche untersucht werden, indem wir denselben Weg einschlagen wie in der Ebene. Es wird sich zeigen, daß die Verhältnisse hier viel einfacher sind. Die ganze Überlegung bezüglich der Figuren 1, 3 und 4 fällt nämlich fort und es wird nur von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß der Großkreisbogen die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte ist. Wird der Kugelradius gleich 1 gesetzt, so ist der Umfang eines sphärischen Kreises vom Radius ϱ gleich $2\pi \sin \varrho$ und der Flächeninhalt $2\pi(1-\cos\varrho)$. Die Ungleichung

$$M \equiv (2\pi - f)^2 + p^2 > (2\pi)^2 \tag{10}$$

drückt die bekannte Isoperimetrie des Kreises auf der Kugel aus, d. h. die Tatsache, daß der Kreis mit dem Umfang p einen größeren Flächeninhalt hat als jede andere Kurve desselben Umfangs p; f bedeutet den Flächeninhalt der Kurve. Bei der folgenden Untersuchung soll gezeigt werden, daß sogar

$$M \equiv (2\pi - f)^2 + p^2 > (2\pi)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{R-r}{2}\right), \tag{11}$$

wo R und r die sphärischen Radien des kleinsten Außenkreises und des größten Innenkreises sind.

Wir gehen wieder von einem konvexen Polygon K aus, welches ja der Konvexität zufolge ganz auf einer Halbkugel enthalten ist. Die äußere Parallelkurve $K(\varrho)$ im Abstand ϱ ist aus Kleinkreisbögen zusammengesetzt, ist aber nicht konvex. Man braucht nur den Flächeninhalt f durch die Winkelsumme auszudrücken, um die folgenden Formeln für den Umfang $p(\varrho)$ und den Flächeninhalt $f(\varrho)$ von $K(\varrho)$ zu haben:

$$(12)\qquad 2\pi - f(\varrho) = (2\pi - f)\cos\varrho - p\sin\varrho,$$

$$(13)\qquad p(\varrho) = (2\pi - f)\sin\varrho + p\cos\varrho.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, daß $\varrho < \frac{\pi}{2}$ ist, dann hat $K(\varrho)$ keine Doppelpunkte, und die Fläche ist nur einmal überdeckt. Die Formeln (12) und (13) übertragen sich unmittelbar auf beliebige konvexe Kurven.

Die beiden Kreise C und c haben mit K mindestens zwei Punkte gemein und werden von diesen in Bögen geteilt, welche höchstens 180^0 sind. Der Außenkreis $C(\varrho)$ und der Innenkreis $c(\varrho)$ von $K(\varrho)$ sind mit C bzw. c konzentrisch und haben die Radien $R + \varrho$ und $r + \varrho$. Wenn erstens $\varrho = \frac{\pi}{2} - R$ und zweitens $\varrho = \frac{\pi}{2} - r$ gesetzt wird, werden $C(\varrho)$ und $c(\varrho)$ Großkreise, welche von $K(\varrho)$ in Bögen geteilt werden, die $\leqq \pi$ sind. Der Umfang von $K(\varrho)$ ist deshalb in beiden Fällen größer als der Großkreis. Aus (13) geht also hervor, daß

$$(2\pi - f)\cos R + p\sin R > 2\pi,$$
$$(2\pi - f)\cos r + p\sin r > 2\pi.$$

Weil $\sqrt{M}$ das Maximum der Funktion $p(\varrho)$ ist, sieht man also erstens, daß $M > (2\pi)^2$, und zweitens schließt man, daß es zwei Werte $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ gibt,

$$0 < \varrho_1 < r < R < \varrho_2 < \pi,$$

für welche $p(\varrho_1) = p(\varrho_2) = 2\pi$ ist. Wir setzen

$$2\pi - f = \sqrt{M}\cos\varphi, \qquad p = \sqrt{M}\sin\varphi,$$

und ϱ_1, ϱ_2 sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{M}\sin(\varrho + \varphi) = 2\pi.$$

Bezeichnen $\varrho_1 + \varphi = u$, $\varrho_2 + \varphi = \pi - u$ $(0 < u < \pi)$ die Lösungen dieser Gleichung, so ist

$$R - r < \varrho_2 - \varrho_1 = \pi - 2u,$$
$$\cos(R - r) > \cos(\varrho_2 - \varrho_1) = -\cos 2u = \frac{2(2\pi)^2}{M} - 1,$$
$$M > (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right).$$

Die Ungleichheit (11) ist somit für konvexe Polygone bewiesen, und durch Grenzübergang erhält man für beliebige konvexe Kurven

$$(14)\qquad (2\pi - f)^2 + p^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right).$$

Für *konvexe* Kurven haben $2\pi - f$ und p beide die obere Grenze 2π, und M also die obere Grenze $2(2\pi)^2$. Die rechte Seite von (14) hat auch $2(2\pi)^2$ als obere Grenze, und zwar für $R = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$. Wenn

K in ein sphärisches Zweieck ausartet, dessen Winkel 0 ist, nehmen sowohl die rechte als die linke Seite von (14) den Wert $2(2\pi)^2$ an, und es gelten also für konvexe Kurven die Ungleichheiten

$$2(2\pi)^2 \geqq (2\pi - f)^2 + p^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right). \tag{15}$$

Es geht hieraus hervor, daß es keine Ungleichheit von der Form (15) gibt, wo das Glied $\operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}$ einen größeren Koeffizienten als $(2\pi)^2$ hat.

Auf einer Kugelfläche mit Radius a nimmt (15) die Form

$$2(2\pi)^2 \geqq \left(2\pi - \frac{f}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{a}\right)^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2a}\right) \tag{16}$$

an, und man kann hieraus für $a \to \infty$ die isoperimetrische Formel (7) in der Ebene folgern.

Herr Felix Bernstein hat in einer schönen Abhandlung „Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene" (Math. Ann. **60** (1905) S. 117—136) eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit gefunden. Der Verfasser betrachtet auch die Parallelkurve $K(\varrho)$ auf der Kugelfläche, teilt aber ϱ einen solchen Wert zu, daß $f = 2\pi$ wird. Es wird gezeigt, daß dann $p > 2\pi$ ist, und hieraus folgt sofort die Ungleichheit (10), weil M der Transformation (12), (13) gegenüber invariant ist. Herr Bernstein leitet dann durch Betrachtungen von ganz anderer Art eine neue untere Grenze für $p(\varrho)$ ab, und findet dadurch die neue Ungleichheit

$$M > (2\pi)^2 + 8\pi \sin^2\frac{R-r}{4(1+2\pi)},$$

und diese gibt als Grenzfall für die Ebene

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{1}{2(1+2\pi)^2}\cdot\left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

Das Verhältnis der Koeffizienten von $\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$ in (7) und in dieser Formel ist 320,6 : 1.

III. Eine isoperimetrische Ungleichheit im Raume.

8. Die für konvexe Kurven in der Ebene gewonnenen Resultate sollen jetzt auf einen beliebigen konvexen Körper K angewandt werden. Dem Körper sei ein Zylinder umschrieben, dessen Erzeugende eine willkürliche Richtung M im Raume haben. Der Normalschnitt des Zylinders ist eine konvexe Figur mit Umfang p und Flächeninhalt f. Ein Halbstrahl in der Richtung M schneide eine feste Kugelfläche vom Radius l in einem Punkt m, und das m entsprechende Element der Kugelfläche sei mit $d\omega$ bezeich-

net. Der Flächeninhalt o der Oberfläche von K kann durch das von Cauchy[2]) angegebene und leicht zu verifizierende Integral

$$o = \frac{1}{2\pi} \int 2 f \, d\omega \tag{16}$$

berechnet werden. Die Integration soll hier wie auch später überall über die ganze Einheitskugel erstreckt werden.

Wir bilden die äußere Parallelfläche von o im Abstand ϱ und projizieren diese auf dieselbe Ebene wie o. Die Projektion von o ist ein konvexer Bereich, dessen Flächeninhalt (ϱ) durch die Formel

$$f(\varrho) = \pi\varrho^2 + \varrho p + f$$

bestimmt ist. Der Inhalt $o(\varrho)$ der Parallelfläche ist dann

$$o(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int 2 f(\varrho) \, d\omega = 4\pi\varrho^2 + 2\varrho k + o, \tag{17}$$

wo

$$k = \frac{1}{2\pi} \int p \, d\omega. \tag{18}$$

Wir werden k als das *Konturintegral* des Körpers bezeichnen.

Unsere Aufgabe ist zu beweisen, daß $k^2 - 4\pi o \geqq 0$, wo das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt. Dieser Satz wird bewiesen sein, sobald man einen negativen Wert von ϱ angeben kann, für welchen

$$4\pi\varrho^2 + 2\varrho k + o \leqq 0,$$

oder ein positives ϱ, für welches

$$2\varrho k - o - 4\pi\varrho^2 \geqq 0.$$

Wir wissen, daß die Ungleichheit

$$\varrho p - f - \pi\varrho^2 \geqq 0 \tag{19}$$

für jede Projektion von o gilt, wenn nur $r \leqq \varrho \leqq R$, wo R und r dieselben Bedeutungen haben wie früher. Das Gleichheitszeichen ist nur gültig, wenn $R = r$ ist, d. h. wenn die Projektion des Körpers ein Kreis ist. Wir werden zeigen, daß es einen für alle Projektionen von K gemeinsamen Wert von ϱ gibt, für welchen (19) richtig ist.

K sei auf eine Ebene A projiziert in eine Figur mit dem Außenkreis C, wo C auch selbst die Kontur von K sein kann. K wird auf eine zweite Ebene A_1 mittels eines Zylinders projiziert, dessen Projektion auf A ein Parallelstreifen ist. Die Breite dieses Streifens kann höchstens gleich dem Durchmesser $2R$ von C sein, und hieraus folgt, daß der Durchmesser $2r_1$ des Innenkreises der Projektion auf A_1 auch höchstens $2R$ sein kann.

---

[2]) A. Cauchy, Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces. Comptes rendus **13** (1841), S. 1060–65.

Der Innenkreis einer beliebigen Projektion von K ist also kleiner oder gleich dem Außenkreis einer beliebigen Projektion. Es sei r_M das Maximum der Radien r der Innenkreise für sämtliche Projektionen, R_m das Minimum der Radien R der Außenkreise, dann ist $r_M \leqq R_m$. Wird jetzt ein solcher Wert von ϱ gewählt, daß $r_M \leqq \varrho \leqq R_m$, dann ist für alle Projektionen

$$\varrho p - f - \pi \varrho^2 \geqq 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int 2(\varrho p - f - \pi\varrho^2)\,d\omega = 2\varrho k - o - 4\pi\varrho^2 \geqq 0.$$

Weil p und f stetige Funktionen des Punktes m sind, kann das Integral nur dann 0 sein, wenn der Integrand für alle m verschwindet, d. h. wenn jede Projektion von K ein Kreis ist. In diesem Fall aber ist K eine Kugel. Dieselbe Überlegung, die uns zu der Ungleichheit (7) führte, gibt uns hier die Ungleichheit

$$\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq \pi (R_m - r_M)^2. \tag{20}$$

Es ist zu bemerken, daß auch, wenn der Körper keine Kugel ist, $R_m = r_M$ sein kann, was z. B. bei einem Würfel und bei einem von einer Kreiszylinderfläche und zwei Halbkugeln begrenzten Körper der Fall ist. Jedenfalls gilt aber das Gleichheitszeichen in $\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq 0$ nur für die Kugel, und wir haben also den Satz bewiesen:

Unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche liefert die Kugel das Minimum des Konturintegrals.

Über die Bedeutung des Konturintegrals sei folgendes bemerkt. Schon Steiner hat die Parallelfläche eines konvexen Körpers untersucht[3]). Für ein Polyeder ist nach Steiner $2k$ in der Formel (17) die Summe der Produkte aus einer Kante und dem anliegenden äußeren Raumwinkel, was unmittelbar zu sehen ist. Für Körper mit stetiger Krümmung zeigt Steiner, daß k das Oberflächenintegral der mittleren Krümmung ist. In unserer Ableitung der Formel (20) sind keine Voraussetzungen über Krümmungsverhältnisse gemacht. Minkowski hat zuerst den obigen Satz ausgesprochen und zwar von dem Integral der mittleren Krümmung[4]).

Kopenhagen, den 10. Mai 1921.

---

[3]) Über parallele Flächen. Sitzber. Ak. Berlin 1840, S. 114—118.

[4]) H. Minkowski, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 9, S. 115—121. Ges. Abh. 2, S. 122—127. Volumen und Oberfläche. Math. Ann. 57. Ges. Abh. 2, S. 230—276, besonders S. 259.

(Eingegangen am 12. 5. 1921.)