Bertrand Russel M. A., late fellow of trinity college, Cambridge: **The Principles of Mathematics.** Vol. I; Cambridge: at the University Press, 1903; Leipzig, F. A. Brockhaus. XXIX + 534 Seiten.

Manche Bedingungen für eine gedeihliche Entwicklung der neuen Naturphilosophie, deren Entstehen in der wachsenden Zahl von Naturforschern, die ex cathedra als Philosophen sprechen, zum Ausdrucke kommt, scheinen wirklich vorhanden zu sein. Nicht nur, daß nach der reichen Ernte an positiven Ergebnissen, welche die exakte Forschung im abgelaufenen Jahrhundert eingebracht hat, eine Art psychischer Reaktion das Erwachen des Bedürfnisses nach philosophischer Zusammenfassung des Errungenen erklärlich macht. Die neue Naturphilosophie findet auch reale Stützen in gewissen Ergebnissen der exakten Naturforschung selbst. Unter anderen und vor allen reichen jene Disziplinen der Mathematik, welche durch die Erforschung der Grundlagen dieser Wissenschaft von Seite der Mathematiker geschaffen wurden: Die Arithmetisierung der Analysis, die Logifizierung von Arithmetik, Geometrie und Mechanik, Logikkalkul, Ausdehnungs- und Weitenbehaftungslehren u. s. w., bis an die Grenzen, ja überschreiten die Grenzen objektiver Naturforschung und gehen in Logik über, durch welche sie mit Psychologie und Erkenntnistheorie in unmittelbare Fühlung treten.

Diese Entwicklung des Denkens hat nun nicht nur zur Folge, daß Mathematiker und Physiker Anknüpfung an die benachbarten philosophischen Disziplinen suchen. Auch die Vertreter der Philosophie im engeren Sinne müssen sich genötigt sehen, von jenen Ergebnissen der exakten Forschung genauere Kenntnis zu nehmen. Von diesem Gesichtspunkte aus erweckt ein Werk, das sich, wie das vorliegende, mit der Darstellung der Prinzipien der reinen Mathematik an die Mathematiker und an die Philosophen in gleicher Weise richtet, besonderes Interesse.

B. Russel gibt als Ziele, die er mit seinen Principles of Mathematics angestrebt hat, an: erstens die Rückführung aller mathematischen Begriffe und aller ihrer Axiome auf logische Grundbegriffe (logical constants) und logische Grundsätze; zweitens die systematische Darstellung und Diskussion dieser logischen Grundlagen, d. i. der „Indefinablen der Mathematik“. In dieser Reihenfolge gibt R. die Themata seiner Untersuchungen an, und auf diesem Wege ist das Werk auch entstanden, d. h. das als „logische Grundlage“ bezeichnete System ist aus den Bedürfnissen der mathematischen Disziplinen herausgewachsen. Es ist aber auch nur in Hinblick auf diese Disziplinen zusammengestellt. Infolgedessen fehlen die Vorbedingungen für die deduktive Form, in welcher der Verfasser sein Lehrsystem vorträgt. Er empfiehlt denn auch selbst — wenigstens dem Mathematiker — mit der Lektüre der mathematischen Partien zu beginnen und nur fallweise auf die „philosophischen

Kapiteln“ zurückzugreifen. Es werde deshalb zunächst über die im ersten Teile entwickelte formale Logik nur berichtet, daß sie sich im wesentlichen an das System des Peanoschen Logikkalküls anschließt. Durch Abweichungen im einzelnen nähert sich R.' Logik aber vielfach den Fregeschen Theorien. Ferner zeichnet sie sich durch die besondere Betonung des Relationskalküls aus, welchem die größte Tragweite nicht nur für die Darstellung, sondern auch für die produktive Forschung auf mathematischem Gebiete zugeschrieben wird.

Der mathematische Inhalt des Werkes ist — insbesondere an bemerkenswerten Einzelheiten — so reich, daß er hier nur in flüchtigen Umrissen angedeutet werden kann. Die Teile II bis VII des Buches führen die Titel: Zahl, Quantität, Ordnung, Unendlichkeit und Stetigkeit, Raum, Materie und Bewegung. Im wesentlichen werden in diesen Kapiteln die Grundlagen der Arithmetik und Analysis, wie sie von Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor geschaffen wurden, des letzteren Mengenlehre und Theorie der transfiniten Zahlen, eine Übersicht über die moderne Geometrie, schließlich im letzten Teile eine Einführung in die reine Mechanik, welche inhaltlich der Darstellung Boltzmanns in seinen „Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik“ nahe kommt, vorgetragen.

Die Darstellung dieses umfangreichen Materials kann dahin charakterisiert werden, daß alle jene Theorien und Lehrsysteme in einheitlicher Terminologie im Anschlusse an das im Teile I adoptierte logische System, ohne Formelsprache, kritisch und zum Teile nach neuen Gesichtspunkten, ferner unter jeweiliger Polemik mit dem „Philosophen“ im allgemeinen oder speziellen entwickelt werden.

Die Terminologie bietet, infolge der schon erwähnten Entstehungsweise des ersten Teiles, keine besonderen Neuerungen. Die größten Abweichungen vom Sprachgebrauche enthält der Teil, welcher von der „Quantität“ handelt. Das Thema dieses Teiles ist übrigens kein eigentlich mathematisches. Denn, wie ausdrücklich gesagt wird, ist der Begriff der Quantität für die reine Mathematik ganz entbehrlich. Sie hat es nur mit „Größen“ zu tun. „Größe“ wird definiert, als „etwas, was der undefinierbaren Relation ‚größer und kleiner‘ fähig ist“. Jede einzelne Größe hat die der Klassenzugehörigkeit ähnliche, mit ihr aber nicht identische Relation zu jener abstrakten Qualität (welche nicht definiert erscheint), deren Größe sie ist. Wenn eine Größe „spezialisiert“ werden kann durch zeitliche oder (und) räumliche Lage, oder durch Beziehungen, welche durch je zwei terms bestimmt sind (d. s. Entfernungen), so ist die Größe eine Quantität. Zwei Quantitäten, welche eine und dieselbe Größe spezialisieren, heißen gleich. Größen können aber nur in der Relation ‚größer oder kleiner‘ stehen, niemals aber ‚gleich‘ sein. Größen sind auch immer unteilbar. Wohl aber gibt es „Größe der Teilbarkeit“ (z. B. Längen, Flächen, Volumina), welche eine weiter nicht definierbare Eigenschaft „geordneter Ganzer“ ist, die bei „endlichen Ganzen“ und nur bei diesen mit der Anzahl der „Teile“ zusammenfällt. Diese Klasse von Größen und eine zweite große Klasse, nämlich Entfernungen, heißen „extensive“ Größen und sind meßbar. Die Messung enthält aber immer ein konventionelles Element. Alle anderen Quantitäten sind „intensiv“ (psychische Tatsachen) und sind nicht numerisch meßbar, obwohl die Relation ‚größer oder kleiner‘ von ihnen völlig genau ausgesagt werden kann. Der Begriff unendlich kleiner Größen wird als verworren und überflüssig abgelehnt.

Die Null wird als Verneinung des definierenden Begriffes einer Art von Größen, nicht aber als Verneinung einer besonderen oder aller dieser Größen eingeführt.

R. sucht mit dieser komplizierten Begriffskonstruktion einerseits der Verwendung des Größenbegriffes in der Psychologie gerecht zu werden und trifft in diesem Streben vielfach mit Meinong zusammen, dessen Arbeiten er großenteils zustimmend, teils kritisch bespricht. Anderseits will R. die gegenseitige Unabhängigkeit der beiden Eigenschaften 1. größer und kleiner sein, 2. teilbar sein auch terminologisch zum Ausdrucke bringen, weil er diese Unterscheidung in seiner Darstellung der Geometrie braucht, um die „Strecke vom Punkte a bis zum Punkte b“ und die „Entfernung ab“ von einander unabhängig zu machen. Infolge der unübersichtlichen und zum Teil auch unscharfen Darstellung ist es schwer, ein Urteil über R.' Größenlehre abzugeben. Die widerspruchsvollen Bemerkungen aber, die R. über das Verhältnis von „Zahl“ und „Größe“ macht, wonach die Zahlen zwar unter die Größendefinition fallen (§§ 118, 151), an anderer Stelle aber ausdrücklich den Größen entgegengestellt werden (§§ 161, 162) berechtigen wohl dazu, R.' Konstruktion für mißglückt zu halten.

Kritische Schärfe und volle logische Strenge ist dagegen der Entwicklung der verschiedenen Stufen des Zahlbegriffes und der Abhandlung der Ordnungsbegriffe nachzurühmen. Die Anzahlen (natürliche Zahlen) erscheinen als „Klassen von ähnlichen Klassen“, im Anschlusse an Dedekind („Was sind und was sollen die Zahlen“), die rationalen Zahlen als gewisse „Relationen“ zwischen natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen wieder als gewisse „Klassen“ von rationalen Zahlen. Alle Definitionen sind mit Rücksicht auf die transfiniten Zahlen formuliert, deren Besonderheit stets präzisiert und aus dem Charakteristikum, daß im Gebiete dieser Zahlen der Schluß von n auf $n+1$ nicht zulässig ist, abgeleitet wird. Die Definitionen zeichnen sich dadurch aus, daß eine besondere „Abstraktion“, durch welche in der Regel (z. B. bei Dedekind, l. c., 73. Erkl.) aus einer bestimmten „Klasse“ die „Zahl“ erst gewonnen wird, entfällt, die bezügliche Klasse vielmehr schon die Zahl „ist“. In gleicher Weise „ist“ eine bestimmte Relation zwischen Anzahlen die rationale Zahl und „ist“ ein Abschnitt (segment) rationaler Zahlen die reelle Zahl. Bei der Definition der irrationalen Zahlen ist diese unmittelbare Gleichsetzung gewisser „Folgen“ mit der reellen Zahl wohl allgemein gebräuchlich. Allerdings findet man oft die Wendung, eine solche Folge „definiere“ eine reelle Zahl, so daß die „Folge“ und die „Zahl“ unterschieden werden. Logisch ist diese Unterscheidung gewiß überflüssig und führt leicht zu dem Mißverständnis, die reellen Zahlen seien als Grenzen von Folgen rationaler Zahlen definiert. Dagegen ist es die Frage, ob die Unterscheidung zwischen „Folge“ und „Zahl“ nicht psychologisch begründet ist und vielleicht auch logisch entwickelt werden kann, gerade mit Hilfe des interessanten Satzes, den R. aufstellt und an manchen Stellen auch verwendet, mittels seines „principle of abstraction“, das besagt, daß gewisse Relationen zwischen terms a und b logisch ersetzt werden können, durch Relationen dieser einzelnen terms zu einem neuen term t, welcher dadurch eindeutig definiert wird.

In der Kritik der Irrationalzahltheorien von Dedekind, Weierstrass und Cantor treten besonders zwei Forderungen scharf hervor: die eine geht dahin, daß jede Begriffsbildung durch einen Existenzbeweis vervollständigt werden muß, die zweite verlangt, daß der limes-Begriff bei der Definition der irrationalen Zahlen nicht verwendet werden darf. Die Forderung nach Existenzbeweisen durchzieht das ganze Werk R.' und tritt immer mehr in den Vordergrund, so daß in der Zusammenfassung am Schlusse des Werkes die Erfüllung eben dieser Forderung als die Hauptleistung desselben hervorgehoben wird. Tatsächlich bedeuten diese Existenzbeweise den Nachweis, daß die neueingeführten Begriffe unter einen der logical constants fallen. Sie sind somit nur relativ zu der zu Grunde gelegten Logik von Bedeutung, teilen also deren Vorzüge und Schwächen. Die Erkenntnis dieser Relativität kommt aber nirgends zum Ausdrucke und dieser Mangel wird insbesondere in der Kritik der „am Kontinent üblichen“ Einführung der komplexen Zahlen fühlbar, bei deren Diskussion die Forderung nach Existenzbeweisen am eingehendsten besprochen wird.

Die strenge Distinktion bei der Definition von „Grenze“ und „Irrationalzahl“ ist als solche gewiß anzuerkennen, zumal da diese Distinktion in manchen Darstellungen die ihrer großen logischen Wichtigkeit gebührende Betonung nicht findet. Ferner ist bei R. die logische Struktur dieser Begriffe sehr deutlich und ausführlich expliziert, was insbesondere für Laien, welche sich über diese Begriffsschöpfungen orientieren wollen, von Wert sein dürfte. In der dort natürlich sich ergebenden Verallgemeinerung des Grenzbegriffes zum Begriffe „Klassen von Grenzen der Funktionswerte“ dürfte vielleicht sogar eine glückliche Neuerung zu erblicken sein. Dagegen ist die Form, in welcher diese Analyse bei R. erscheint, nämlich als kritische Ergänzung der Weierstrass'schen und Cantorschen Theorien, verfehlt. Es mag der Irrtum R.', daß den Gründern der Theorie deren logische Feinheiten entgangen seien, durch eine mißverständliche Auffassung der Darstellung, welche Stolz in seiner „Arithmetik I.“ gibt, verursacht sein (vielleicht insbesondere der zwei Stellen auf p. 106, Absatz 2 u. p. 113, Abs. 3). R.' Kritik, bezw. Interpretation jenes „Axioms von der Geraden“, an welches Dedekind seine Definition der Stetigkeit anknüpft, scheint aber einen wesentlichen Punkt zu treffen und dürfte insbesondere vom pädagogischen Standpunkte aus Beachtung verdienen. Zu diesem Axiom: „Zerfallen alle Punkte einer Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen . . . hervorbringt“, zu diesem Axiom bemerkt nämlich R., daß es die Verteilung aller Punkte fordere. Wenn aber alle Punkte in die beiden Klassen verteilt sind, bleibt kein zu definierender übrig. Bleibt aber dieser eine Punkt bei der Verteilung außer Betracht, so gilt der Satz auch von diskreten Punktreihen. Es muß also das Axiom dahin verbessert werden, daß die Teilung nur irgend eine überall dichte Menge von Punkten auf der Geraden betrifft. Dann fällt aber die Selbstverständlichkeit des Axioms weg, um derentwillen es angeführt wird. Die Dedekindsche Definition der Stetigkeit wird durch diese Bemerkung natürlich nicht angegriffen.

Dankenswert ist, wie schon erwähnt, die eingehende Abhandlung der Ordnungsbegriffe. Eine gründliche Bearbeitung der bezüglichen Relationslehre und deren Anwendung auf die Ordnungsbegriffe setzt R. in den Stand, den Begriff der Ordinalzahl und ihr Verhältnis zur Kardinalzahl, die logische Unabhängigkeit dieser beiden von einander und ihren Zusammenhang, sowie die

Abweichungen der Rechnungsregel für transfinite Kardinal- und Ordinalzahlen in strenger Terminologie und großer Vollständigkeit zu begründen. Obwohl die Arithmetik der endlichen Zahlen und die ganze Analysis mit den Ordinaleigenschaften der Zahlen völlig ausreicht, und den Kardinalzahlen ebensowenig eine logische Priorität vor jenen zukommt, wie umgekehrt jenen vor diesen, geht der Verf. von den Kardinalzahlen aus, weil diese in bezug auf das zu Grunde liegende, logische System einfacher sind.

Die komplexen Zahlen werden aus der Arithmetik in die Geometrie verwiesen. Denn diese ist zu definieren als die Lehre von zwei- und mehrdimensionalen Reihen. Auch in dem Abschnitte über Geometrie trägt die eingehende Diskussion der Ordnungsbegriffe gute Früchte. Neben der Präzision des sprachlichen Ausdruckes sei nur hervorgehoben, daß der wichtige Umstand, daß die Dimensionszahl einer Menge nur von dem logisch willkürlichen Ordnungsprinzip abhängt, klar zu Tage tritt. Der Begriff Dimension wird nicht definiert, sondern nur die Entstehung mehrdimensionaler Reihen als „Reihen von Reihen" beschrieben. Der nächstliegende spezielle Fall sind die gewöhnlichen komplexen Zahlen. Deren Definition als Wurzeln algebraischer Gleichungen, d. i. ihre Erzeugung durch algebraische Verallgemeinerung wird mit der schon oben besprochenen Begründung abgelehnt, daß eine derartige Generalisation den Existenzbeweis schuldig bleibe. Ebensowenig werde die Existenz von komplexen Zahlen erwiesen durch ihre Definition als Ausdrücke von der Form $\Sigma\ \alpha_i \,.\, e_i$; wo die α reelle Zahlen, die e Zeichen sind, deren Verknüpfung durch algebraische Formeln definiert wird. R. definiert vielmehr die komplexe Zahl n^{ter} Dimension als eine „ein- mehrdeutige Relation, deren Gebiet*) die reellen Zahlen, deren Gegengebiet*) die ersten n ganzen Zahlen sind." Ob und wie der algebraische Kalkül mit komplexen Zahlen auf Grund dieser Definition entwickelt werden kann, wird alllerdings nicht besprochen. Im übrigen verarbeitet R. in diesem Abschnitte hauptsächlich die Werke Pieris, Pasch und Hilberts. Seine Disposition aber beruht auf der nicht disjunktiven Unterscheidung von projektiver, deskriptiver und metrischer Geometrie, je nachdem die Gerade, die Strecke, oder überdies die Entfernung durch zwei Punkte definiert wird. Diese drei Arten von Geometrie unterscheiden sich also nur durch die Wahl der Indefinabeln, und infolgedessen der Axiome. Sofern dreidimensionale Mannigfaltigkeiten in Betracht kommen, ist projektive Geometrie nur auf elliptische Räume, deskriptive Geometrie auf den Euklidischen und auf hyperbolische Räume anwendbar. Metrische Eigenschaften lassen sich zwar im projektiven und deskriptiven Raume definieren, doch können manche metrische Sätze der gewöhnlichen Geometrie nur mit Hilfe des in logischen Konstanten nicht definierbaren Begriffes „Größe der Teilbarkeit" aufgestellt werden, für welche Größen das archimedische Axiom und ein Axiom der Linearität aufgestellt werden muß. Insoferne aber dieser Begriff verwendet wird, sei Geometrie nicht mehr reine Mathematik. Geometrie als Zweig der reinen Mathematik ist wesentlich hypothetisch, d. h. von der Form „aus A folgt B", wo A und B Sätze sind, die nur in logical constants definierbare Begriffe enthalten. Die Vorder-

*) Gebiet und Gegengebiet einer Relation sind — kurz ausgedrückt — die Klassen der Subjekte, bezw. Objekte jener Sätze, welche die Relation aussprechen.

sätze sind die Axiome, welche nicht irgend welche Wesen, sondern stets Klassen von Klassen betreffen, die durch Relationen von ein und demselben logischen Typus verbunden sind. Mathematik, also auch reine Geometrie hat nichts mit dem zu tun, was wirklich existiert. Deshalb tritt auch z. B. die Frage, ob ein absoluter Raum anzunehmen, d. h. ob der Raum aus Punkten bestehend zu denken sei, zwischen welchen ewige Relationen bestehen, aus dem Gebiete der reinen Mathematik heraus. Wohl aber läßt sich zeigen, daß in einer solchen Annahme keine logischen Widersprüche liegen. Deshalb ist es zu empfehlen, der allgemeinen Meinung, welche einen absoluten Raum postuliert, zuzustimmen.

Mit Hilfe dieser Entscheidung, wird auch das Problem der Relativität der Bewegung — im Widerspruch mit den Lösungsversuchen von C. Neumann, Streintz, W. H. Macaulay und Mach — erledigt. Denn die Mechanik, soweit sie Teil der reinen Mathematik ist, handelt von der Bewegung als Zuordnung von Raumpunkten zu Zeitpunkten, also von Relationen zwischen Elementen bestimmter Mengen. Materie ist logisch definiert als eine gewisse Gesamtheit solcher Relationen. Auffallend ist, daß R. Geschwindigkeit und Beschleunigung als physixalische Tatsachen nicht gelten lassen will, weil dies die Annahme unendlich kleiner Größen involvieren würde. Da also seine Konfigurationen nur Ortsbestimmungen enthalten und da ihm ferner die Zusammensetzung von Wirkungen logische Schwierigkeiten zu bereiten scheint, sieht sich der Verfasser veranlaßt, die mechanische Kausalität im Zusammenhange von je drei Konfigurationen zu verschiedenen Zeiten zu erblicken und nur von Integralgesetzen auszugehen. Infolgedessen kommt er auch zu einer neuen Formulierung des allgemeinen Kausalgesetzes, welche besagt: aus je m Ereignissen zu n gegebenen Zeiten können m neue Ereignisse in einem beliebigen Zeitpunkte erschlossen werden, sofern n und m sowie die Ereignisse entsprechend gewählt sind. In einem System von N materiellen Punkten ist z. B. $m = N$ und $n = 2$. Die Formulierung der Bewegungsgesetze in Differentialgleichungen ist erst nach entsprechenden Voraussetzungen über die durch Relationen verknüpften Mengen möglich. Daß diese Gleichungen zweiter Ordnung sind, ist eben der Ausdruck für die angegebene spezielle Form des allgemeinen Kausalgesetzes, die es in der „wirklichen" materiellen Welt hat. Betreffend die „wirkliche" Welt treten in den Gleichungen Zahlenkoeffizienten auf, welche Massen genannt werden. Die Beschleunigung ist also durch eine Funktion ψ gegeben, welche die Umgebungsdaten enthält. Diese Funktion kann nur empirisch gefunden werden. Wäre sie z. B. von der Art, daß $\psi = o$ ist, wenn die in ihr vorkommenden Entfernungen eine unter der Wahrnehmungsgrenze liegende Größe r übersteigen, dann und nur dann würden in der materiellen Welt Fernkräfte ausgeschlossen erscheinen.

Das philosophisch interessante Resultat der reinen Mechanik wird in den folgendenden zwei Prinzipien zusammengefaßt: 1. Es besteht eine Verknüpfung von je drei Konfigurationen. 2. Nur das ganze Universum stellt ein unabhängiges System dar; zwei solche Universa aber, die sich nur durch die Wirkungen der von einem Gebiete weit entfernten Massen unterscheiden, würden innerhalb dieses Gebietes annähernd dieselben relativen Bewegungen aufweisen. Durch diese beiden Prinzipien ist der philosophische Gehalt nicht nur der Newtonschen, sondern auch, wie gezeigt wird, der Hertzschen Mechanik erschöpft.

Die mathematischen und philosophischen Themen, von denen vorstehend nur eine kleine Auswahl hervorgehoben wurde, werden alle breit und eingehend behandelt und auch die einschlägige Literatur findet in großem Umfange Berücksichtigung. Es fehlen aber wiederum manche Gegenstände ganz, deren Erwähnung wenigstens erwartet werden muß. So sei nur auf zwei Disziplinen hingewiesen, deren eine sich sehr vollkommen in das System eingeordnet hätte, deren andere allerdings in ihm kaum Platz finden könnte: Die Theorie der Idealzahlen und die Analysiitus.

Zur Orientierung über die wichtigsten Grundbegriffe der Mathematik wird das Werk, insbesondere Laien, welche die formelle Technik nicht beherrschen, gute Dienste leisten, aber auch der Mathematiker wird für viele Anregungen und manche logische Feinheit, auf die ihn der Autor aufmerksam macht, dankbar sein und am meisten Neues und Wertvolles wird in dem Buche finden, wer sich für den Logikkalkül interessiert.

Die philosophische Seite des Buches gibt allerdings zu manchem Bedenken Anlaß. Schon die im Vorwort ausgesprochene Ansicht, daß viele, ja die meisten Philosophen der Meinung sind, die Mathematik enthalte innere Widersprüche, läßt erwarten, daß in den kommenden philosophischen Kontroversen offene Türen eingerannt und gegen Windmühlen gekämpft werden wird. Und das ist auch der Fall. Das Wesen dieser Kämpfe ist aber — nach der Meinung des Referenten — ein Aneinandervorbeireden. Und das muß schließlich so sein. Denn: der Mathematiker, sagt R., hat nichts mit dem zu tun, was wirklich ist, sondern nur mit dem, was formal folgt. Da nun aber dem Philosophen gerade um das zu tun ist, was wirklich ist, so kann R.' Mathematik weder mit Kants Erkenntnistheorie noch mit Lotzes Metaphysik in Widerspruch geraten. Allerdings — formale Widersprüche oder Sophismen, die sich ein oder der andere Philosoph geleistet hat, gehören vor das Forum der formalen Logik. Damit aber eine solche Berichtigung auf die erkenntnistheoretische oder metaphysische Gesamtanschauung Einfluß habe, müßte die betreffende formale Logik selbst erst zur Erkenntnistheorie und Metaphysik oder wenigstens zur Psychologie irgend eine Stellung eingenommen haben. Dem ist aber R. bewußt aus dem Wege gegangen. Denn wo er merkt, daß ein derartiges Problem vorliegt, schiebt er es dem „Logiker" oder dem „Philosophen" zu. Aber nicht einmal in rein formalen Fragen reicht R.' System aus. Denn wie er selbst verdienstvoll nachweist, ist es nicht im stande, den „Widerspruch καθ'ἐξοχήν"*) zu lösen. Rein formal beweist dies, daß das System als solches keinen absoluten Wert hat. Denn entweder k a n n es diesen Widerspruch nicht vermeiden, dann kann es auch anderen Systemen Selbstwidersprüche nicht vorwerfen; oder der Widerspruch ist nur scheinbar, dann fehlen dem System scharfe Kriterien, scheinbare und wirkliche Widersprüche zu unterscheiden. Allerdings ist sich der Verfasser dieser Schwächen seines Werkes

---

*) Als solcher tritt nämlich bei R. der Widerspruch auf, der in den verschiedensten Formen ausgesprochen werden kann, am kürzesten aber folgendermaßeu lautet: Wenn die Eigenschaft eines Prädikates, von sich selbst nicht aussagbar zu sein (es gibt Prädikate mit dieser Eigenschaft, sowie auch andere) als Prädikat P bezeichnet wird, so können die Sätze „P ist P" und „P ist nicht P" formal auseinandergefolgert werden.

bewußt und erwartet, daß man es als Versuch anerkennen möge. Den Wert eines umsichtigen und sorgfältigen Versuches muß dem Buch gewiß auch zugesprochen werden. Nur hätte der logische Zwiespalt zwischen dieser Selbstbeschränkung und den allzu „absoluten" Urteilen über „den" und „die" Philosophen vermieden werden können.

Was nun das Hauptziel des Werkes anbelangt, nämlich den Nachweis, daß die gesamte Mathematik aus 9 Begriffen und 20 Axiomen aufgebaut werden kann, ist es sehr schwer, nachzuweisen, daß dieses Ziel nicht erreicht worden sei. Ebenso unwahrscheinlich ist es aber auch, daß jemand in diesem Buche den überzeugenden Beweis für die Richtigkeit dieser These finden wird. Beides hat darin seine Ursache, daß der Verfasser zu Gunsten der Allgemeinverständlichkeit auf die strenge Form verzichtet hat. Gerade für solche ökonomische, logische Untersuchungen — und vielleicht nur für solche — bietet sich ein Logikkalkül als vorzüglichstes Mittel dar. Wenn aber der Kalkül fehlt, ist die Logik ebenso schwer zu erkennen, wie eine mathematische Abhandlung, deren Kunstsprache durch die Umgangssprache ersetzt wurde, verständlich wäre. Besonders schwierig gestaltet sich die Verfolgung eines Beweisganges, der unter den Grundbegriffen, z. B. auch den Begriff „derart, daß" und „Wahrheit" aufzählt. Man muß daher mit Spannung dem zweiten Bande entgegensehen, dessen Erscheinen der Autor in Aussicht stellt. Denn dieser wird nicht nur originelle Untersuchungen bringen, welche den Nutzen des Logikkalküls für die produktive mathematische Forschung beweisen, sondern er soll die formell strenge, an Mathematiker gerichtete Deduktion der Gedanken bringen, welche der vorliegende erste Band, einleitend und kommentierend, „auch für den Philosophen" entwickelt.

Präzision des Ausdrucksmittels kann zwar philosophische Begabung nicht ersetzen, aber sie wirkt als Sieb, das die wesentlichen und guten Gedanken zurückhält und die wertlosen Beimengungen fallen läßt.

A. Gerstel.

Lehrbuch der Thetafunktionen von Adolf Krazer. (Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Band XII. Leipzig, B. G. Teubner 1903. [XXIV + 563 gr. 8⁰]).

Eine systematische Darstellung dieses Gebietes war nach jeder Richtung hin zu wünschen, schon darum, weil die Bezeichnungen hier vielfach abweichen und der Vergleich der Ergebnisse verschiedener Untersuchungen dadurch erschwert wird. Außerdem hängt die Theorie der Thetafunktionen mit Algebra, Funktionentheorie, Zahlentheorie, Geometrie in so vieler Beziehung zusammen und hat ihrerseits so viel zur Förderung dieser Gebiete beigetragen, daß ein Buch, welches die Kenntnis des heutigen Standes der Theorie vermittelt und ein verläßliches Nachschlagewerk für die weitverzweigte Literatur in weitergehenden Fragen bietet, gewiß zu begrüßen ist.

Dazu kommt noch, daß in formaler Hinsicht die große Zahl der Thetarelationen aus zwei allgemeinen Umformungsprinzipien unendlicher Reihen einheitlich hergeleitet wird und die zugehörigen arithmetischen und algebraischen Hilfstheorien ausreichend entwickelt werden. Das ist insbesondere ein Vorteil für die Theorie der Transformation und der komplexen Multiplikation.