

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen.

Von

LEO KOENIGSBERGER in Heidelberg.

Sei

$$(1) \quad y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} y' + p_m y$$

eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten; es soll die Frage erörtert werden, ob ein Integral derselben eine algebraische Function eines anderen Integrales und der $m - 2$ ersten Ableitungen von der Form

$$(2) \quad y_2 = F(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(m-2)})$$

sein kann, wenn y_1 nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} genügen soll.

Da bekanntlich in symbolischer Bezeichnungsweise

$$(3) \quad y_2^{(x)} = \sum_{n_1+2n_2+\dots+xn_x=x} \frac{x!}{n_1! n_2! \dots n_x!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \dots (x!)^{n_x}} \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m-1)} \right)^{n_1} \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m)} \right)^{n_2} \\ \dots \dots \dots \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} y_1^{(x)} + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1^{(x+1)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m+x-2)} \right)^{n_x}$$

ist, so wird sich durch Einsetzen von $y_2, y_2', \dots, y_2^{(m)}$, nachdem $y_1^{(m)}, y_1^{(m+1)}, \dots$ vermöge (1) herausgeschafft sind, in die Differentialgleichung (1) eine Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung in y_1 ergeben, und diese muss der für y_1 gemachten Annahme gemäss eine identische sein. Da aber in F die $m - 1^{\text{te}}$ Ableitung von y_1 nicht vorkommt, so werden die Coefficienten der mit der $m - 1^{\text{ten}}$ Ableitung behafteten Posten der eben erwähnten identischen Gleichung Be-

dingungen für die Function $F(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-2)})$ liefern, welche die Form derselben festzustellen gestatten werden.

Werde z. B. verlangt, dass ein Integral eine algebraische Function eines anderen Integrales und der unabhängigen Variablen sei, dass also die Gleichung (2) in

$$(4) \quad y_2 = F(x, y_1)$$

übergehe, so wird nach (3)

$$(5) \quad y_2^{(x)} = \sum_{n_1+2n_2+\dots+x n_x=x} \frac{x!}{n_1! n_2! \dots n_x!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \dots (x!)^{n_x}} \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' \right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+\dots+n_x} F}{\partial y_1^{n_2+\dots+n_x}} y_1''^{n_2} y_1'''^{n_3} \dots y_1^{(x)n_x},$$

und diese Werthe in (1) eingesetzt liefern die identisch zu erfüllende Gleichung

$$(6) \quad \sum_{n_1+2n_2+\dots+m n_m=m} \frac{m!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \dots (m!)^{n_m}} \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' \right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+\dots+n_m} F}{\partial y_1^{n_2+\dots+n_m}} y_1''^{n_2} \dots y_1^{(m-1)n_{m-1}} \\ \times (p_1 y_1^{(m-1)} + \dots + p_m y_1)^{n_m} \\ = p_1 \sum_{n_1+2n_2+\dots+(m-1)n_{m-1}=m-1} \frac{(m-1)!}{n_1! n_2! \dots n_{m-1}!} \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \dots (m-1!)^{n_{m-1}}} \\ \times \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' \right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+\dots+n_{m-1}} F}{\partial y_1^{n_2+\dots+n_{m-1}}} y_1''^{n_2} \dots y_1^{(m-1)n_{m-1}} \\ + p_2 \sum \dots + \dots + p_m F.$$

Ist nun auf der linken Seite dieser Gleichung $n_m = 1$, so dass $n_1 = n_2 = \dots = n_{m-1} = 0$ werden, so lautet der Coefficient von $y_1^{(m-1)} : p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}$; ist dagegen $n_m = 0$, so wird, wenn auf der linken Seite $y_1^{(m-1)}$ in einem Posten vorkommen soll, $n_{m-1} = 1$ sein müssen und somit $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \dots = n_{m-2} = n_m = 0$, so dass der Coefficient von $y_1^{(m-1)}$

$$m \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' \right) \frac{\partial F}{\partial y_1}$$

wird; wir erhalten somit für den Coefficienten von $y_1^{(m-1)}$ auf der linken Seite der Gleichung (6) den Ausdruck

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1' \right);$$

bemerkt man nun aber, dass $y_1^{(m-1)}$ auf der rechten Seite der Gleichung (6) nur in der ersten Summe und zwar nur in der Combination

$$n_{m-1} = 1, \quad n_1 = n_2 = \dots = n_{m-2} = 0$$

vorkommt, also den Coefficienten $p_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}$ hat, so folgt durch Vergleichung der Coefficienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1' = 0,$$

und daraus wieder vermöge der obigen Annahme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = 0,$$

woraus sich

$$(7) \quad F(x, y_1) = cy_1 + Q(x) \quad \text{oder} \quad y_2 = cy_1 + Q(x)$$

ergibt, wenn c eine Constante und $Q(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet; da aber in diesem Falle die gegebene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein algebraisches Integral haben würde, und umgekehrt, wenn die Differentialgleichung ein solches Integral besitzt, die Verbindung (7) immer wieder ein Integral von (1) liefert, so erhalten wir den nachfolgenden Satz:

In einer linearen homogenen Differentialgleichung ist dann und nur dann ein Fundamentalintegral y_2 eine algebraische Function eines anderen y_1 und der unabhängigen Variablen — vorausgesetzt dass dieses letztere nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niedriger Ordnung Genüge leistet —, wenn die lineare Differentialgleichung ein algebraisches Integral η besitzt, und zwar ist dann die Beziehung von der Form

$$y_2 = cy_1 + \eta,$$

wenn c eine Constante bedeutet;

daraus folgt, dass für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung nie eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen und der unabhängigen Variablen bestehen kann.

Lassen wir nunmehr in die Beziehung (2) auch die Ableitungen eintreten, so wird die Frage schwieriger, aber auch interessanter, und ich will dieselbe hier für Differentialgleichungen 3^{ter} Ordnung erledigen

$$(8) \quad y''' = p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y,$$

für welche nach (2) die algebraische Beziehung stattfinden soll

$$(9) \quad y_2 = F(x, y_1, y_1'),$$

wobei ich bemerke, dass die allgemeinere Annahme einer algebraischen Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen in einer im Journal für Mathematik nächstens erscheinenden Arbeit wenigstens für irreductible Differentialgleichungen ihre Erledigung findet.

Für diesen Fall geht die Gleichung (6) über in:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y_1} y_1' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'} y_1'' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'^2} y_1'^2 \\
 & + 6 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1 \partial y_1'} y_1' y_1'' + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} y_1'' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'^2} y_1'' \\
 & + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1'} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3} y_1'^3 \\
 & + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^2 \partial y_1'} y_1'^2 y_1'' + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1' y_1'' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y_1 \partial y_1'^2} y_1' y_1''^2 \\
 & + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1''^2 + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1' (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \\
 & + \frac{\partial F}{\partial y_1} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1'^3} y_1''^3 \\
 & + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} y_1'' (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \\
 & + \frac{\partial F}{\partial y_1'} [p_1 (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) + p_2 y_1'' + p_3 y_1'] \\
 & + \frac{\partial F}{\partial y_1'} (p_1' y_1'' + p_2' y_1' + p_3' y_1) \\
 & = p_1 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1} y_1' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_1'} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y_1'^2 \right. \\
 & \quad + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} y_1' y_1'' + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} y_1''^2 \\
 & \quad \left. + \frac{\partial F}{\partial y_1'} (p_1 y_1'' + p_2 y_1' + p_3 y_1) \right] \\
 & + p_2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'} y_1'' \right) + p_3 F,
 \end{aligned}$$

und somit, da y_1 nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niedriger Ordnung als der 3^{ten} genügen sollte, durch Identificirung der Coefficienten von $y_1''^3$, $y_1' y_1''^2$, $y_1'^2 y_1''$, $y_1 y_1''$, $y_1''^2$, $y_1' y_1''$ die nothwendig zu erfüllenden Beziehungen

$$(11) \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1'^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1 \partial y_1'^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^2 \partial y_1'} = 0, \quad p_3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1'^2} + 2 p_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0, \\
 & 6 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y_1 \partial y_1'} + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + p_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'} + 3 p_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Da wir die Annahme $p_3 = 0$ ausschliessen dürfen, weil dies auf den früher erledigten Fall der Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt, so folgt, wie man leicht sieht, aus den Gleichungen (11) und (12)

$$(13) \quad F(x, y_1, y_1') = f y_1' + g y_1 + h,$$

worin f, g, h algebraische Functionen von x bedeuten; setzt man nun diese Form in die Gleichung (10) ein, so ergeben sich durch Identifizierung der Coefficienten von y_1'', y_1', y_1 und der freien Glieder die vier Bedingungsgleichungen

$$(14) \quad h''' - p_1 h'' - p_2 h' - p_3 h = 0,$$

$$(15) \quad 3f'' + 3g' + p_1 f'' + p_1' f = 0,$$

$$(16) \quad f''' + 3g' + 2p_2 f' + p_2' f - p_1 f'' - 2p_1 g' = 0,$$

$$(17) \quad g''' + 3p_3 f' + p_3' f - p_1 g'' - p_2 g' = 0;$$

da nun die erste dieser Beziehungen aussagt, dass die vorgelegte lineare Differentialgleichung dritter Ordnung ein algebraisches Integral besitzt, so wird, wenn wir diesen Fall hier ausschliessen, weil er nachher im allgemeinen Falle zur Untersuchung kommt (für irreductible Differentialgleichungen kann er überhaupt nicht eintreten), $h = 0$ sein müssen, und somit (13) in

$$(18) \quad y_2 = f y_1' + g y_1$$

übergehen, worin f und g mit p_1, p_2, p_3 durch die Gleichungen (15), (16), (17) verbunden sind.

Wir finden somit, dass, wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung ein Fundamentalintegral eine algebraische Function eines anderen, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, dessen erster Ableitung und der unabhängigen Variablen sein soll, diese Beziehung eine homogene lineare sein muss von der Form $y_2 = f y_1' + g y_1$, worin f und g mit den Coefficienten p_1, p_2, p_3 durch die Gleichungen (15), (16), (17) verbunden sind, und umgekehrt sieht man sofort, dass, wenn zwei algebraische Functionen f und g mit p_1, p_2, p_3 durch jene Gleichungen verbunden sind, auch stets eine solche Integralbeziehung stattfindet,

wie sich unmittelbar durch Einsetzen von (18) in die Differentialgleichung (8) ergibt.

Um nun die Differentialgleichungen näher zu untersuchen, deren Coefficienten mit zwei algebraischen Functionen f und g durch die Gleichungen (15), (16), (17) verbunden sind, setze man den durch Integration von (15) gewonnenen Werth von

$$(19) \quad p_1 f = c - 3g - 3f'$$

in (16) und (17) ein, so erhält man durch Integration dieser Gleichungen die Werthe von p_2 und p_3 in der Form

$$(20) \quad p_2 f^2 = c_1 + 2cg - 3g^2 + cf' - 3gf' - 3g'f - ff'' - f'^2$$

und

$$(21) \quad p_3 f^3 = c_2 + cf'g' + c_1 g + cg^2 - g^3 - 3fgg' - g'f^2 - ff'g',$$

und es handelt sich somit um die Untersuchung der Differentialgleichung

$$(22) \quad y''' = \frac{c-3g-3f'}{f} y'' + \frac{c_1+2cg-3g^2+cf'-3gf'-3g'f-ff'-f^2}{f^2} y' \\ + \frac{c_2+cf g'+c_1g+cg^2-g^3-3fgg'-g''f^2-ff'g'}{f^3} y,$$

in welcher c, c_1, c_2 willkürliche Constante, f und g beliebige algebraische Functionen von x sind.

Einige Transformationen dieser Differentialgleichung, auf die ich hier nicht näher eingehen will, führten zu dem Resultat, dass drei Fundamentalintegrale derselben sich in der Form darstellen

$$(23) \quad \eta_1 = e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_1 - g) \frac{dx}{f}}, \quad \eta_2 = e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_2 - g) \frac{dx}{f}}, \quad \eta_3 = e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_3 - g) \frac{dx}{f}},$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die 3 Lösungen der cubischen Gleichung

$$(24) \quad \alpha^3 - \alpha \left(c_1 + \frac{c^2}{3} \right) - c_2 = 0$$

sind, wobei, wenn zwei oder drei Lösungen dieser Gleichung einander gleich werden, zu der Exponentialgrösse noch Factoren hinzutreten, die entweder algebraische Functionen oder Integrale solcher Functionen sind. Nun genügt jedes dieser Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{c}{3} + \alpha - g \right) \frac{1}{f} \eta,$$

würde also der für y_1 gestellten Bedingung, nicht schon das Integral einer algebraischen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der dritten zu sein, nicht genügen, was jedoch für das Integral

$$(25) \quad y_1 = \kappa_1 e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_1 - g) \frac{dx}{f}} + \kappa_2 e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_2 - g) \frac{dx}{f}} + \kappa_3 e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_3 - g) \frac{dx}{f}}$$

nicht der Fall ist. Umgekehrt sieht man auch sogleich, dass, wenn man

$$y_1' = \kappa_1 \left(\frac{c}{3} + \alpha_1 - g \right) \frac{1}{f} e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_1 - g) \frac{dx}{f}} + \kappa_2 \left(\frac{c}{3} + \alpha_2 - g \right) \frac{1}{f} e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_2 - g) \frac{dx}{f}} \\ + \kappa_3 \left(\frac{c}{3} + \alpha_3 - g \right) \frac{1}{f} e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_3 - g) \frac{dx}{f}}$$

bildet,

$$f y_1' + g y_1 = \kappa_1 \left(\frac{c}{3} + \alpha_1 \right) e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_1 - g) \frac{dx}{f}} + \kappa_2 \left(\frac{c}{3} + \alpha_2 \right) e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_2 - g) \frac{dx}{f}} \\ + \kappa_3 \left(\frac{c}{3} + \alpha_3 \right) e^{\int (\frac{c}{3} + \alpha_3 - g) \frac{dx}{f}}$$

wird, und dass somit, da die rechte Seite wiederum ein Integral der Differentialgleichung (22) ist, welches wir mit y_2 bezeichnen wollen, sich

$$y_2 = f y_1' + g y_1$$

ergibt. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung ein Fundamentalintegral eine algebraische Function eines anderen, das nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niedriger Ordnung als der dritten genügt, dessen erster Ableitung und der unabhängigen Variablen ist, ist die, dass dieselbe drei Fundamentalintegrale von der Form

$$e^{\int(\frac{c}{3} + \alpha_1 - g) \frac{dx}{f}}, \quad e^{\int(\frac{c}{3} + \alpha_2 - g) \frac{dx}{f}}, \quad e^{\int(\frac{c}{3} + \alpha_3 - g) \frac{dx}{f}}$$

besitzt, worin c eine Constante, f und g beliebige algebraische Functionen von x sind, und zwar hat dann jene Beziehung die Form

$$y_2 = f y_1' + g y_1;$$

zugleich folgt, dass irreductible Differentialgleichungen dritter Ordnung nie ein Integral als algebraische Function eines anderen, dessen Ableitung und der unabhängigen Variablen darzustellen gestatten.

Heidelberg, im November 1887.
