Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden*).

Von F. E. Eckardt †.

Auf jeder allgemeinen Fläche dritten Grades liegen bekanntlich 27 gerade Linien, und zwar sind dieselben so vertheilt, dass sich durch jede Gerade 5 Ebenen legen lassen, deren jede noch zwei weitere Gerade der Fläche enthält. Drei so in einer Ebene liegende gerade Linien bilden nun im Allgemeinen ein Dreieck, und nur bei speciellen Flächen durchschneiden sich dieselben in einem Punkte. Die Betrachtung dieser besonderen Flächen nun ist der Zweck der nachstehenden Abhandlung. Dieselbe beginnt mit einer allgemeinen Untersuchung derjenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich *einmal* drei gerade Linien in einem Punkte schneiden; sie wendet sich dann vorzugsweise den Flächen zu, auf welchen dieser Fall *sechsmal* eintritt, und schliesst mit einer Betrachtung von 3 speciellen Flächen der letzteren Art. Literaturnachweise konnten nur an wenigen Stellen beigefügt werden, da dem Verfasser ausser den allgemeinen Werken über Flächen dritten Grades von Cremona und Sturm und ausser Salmon's analytischer Geometrie des Raumes für seine specielle Arbeit nur die Abhandlung von Clebsch: „Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits" (Bd. IV der mathematischen Annalen) zu Gebote stand. In der letzteren ist aber nur von einer ganz speciellen der zu behandelnden Flächen, der sogenannten Diagonalfläche, die Rede.

1. *Wenn sich auf irgend einer Fläche drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, ohne dabei in einer Ebene zu liegen, so muss der Schnittpunkt nothwendig ein Knotenpunkt der Fläche sein.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich synthetisch sofort, wenn man bedenkt, dass jede durch zwei der geraden Linien gelegte Ebene die Fläche in einer zusammengesetzten Linie durchschneidet, von welcher

---

*) Wir entnehmen diese letzte Arbeit des verstorbenen Verfassers dem Osterprogramm 1875 der Realschule I. Ordnung zu Chemnitz. Die Red.

jene Linien einen Theil ausmachen, und welche daher in dem fraglichen Punkte einen Doppelpunkt besitzt. Da nun jede Ebene, welche aus einer Fläche eine Linie mit Doppelpunkt ausschneidet, als eine Tangentialebene der Fläche in demselben angesehen werden muss, so besitzt der betreffende Punkt im vorliegenden Falle drei verschiedene Tangentialebenen, was nur dann eintreten kann, wenn er ein Knotenpunkt der Fläche ist.

Analytisch folgt derselbe Satz sofort aus der allgemeinen Gleichung

$$\beta\gamma f_1 + \gamma\alpha f_2 + \alpha\beta f_3 = 0$$

derjenigen Flächen, welche durch die drei Schnittlinien der Ebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gehen. Es bedeuten in dieser Gleichung die Grössen f homogene Functionen gleichhohen Grades der vier Coordinaten α, β, γ und δ.

Bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte gehen durch denselben nicht nur drei, sondern sechs gerade Linien der Fläche. Denn die allgemeine Gleichung einer Fläche dritten Grades, welche den Punkt $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ zu einem Knotenpunkt hat, darf weder die dritte, noch die zweite Potenz der vierten Coordinate δ enthalten, und muss also sein

$$\delta K_2 + K_3 = 0,$$

wobei in K_2 und K_3 δ nicht mehr vorkommt. Durch

$$K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

werden aber zwei Kegel zweiten und dritten Grades dargestellt, welche den Knotenpunkt zum gemeinsamen Scheitel besitzen und deren aus sechs Geraden bestehende Durchschnittslinie der Gleichung zufolge auf der Fläche liegen muss. Auf Flächen höheren Grades gehen dagegen nur ausnahmsweise gerade Linien durch einen Knotenpunkt.

Wir werden im Folgenden die Flächen dritten Grades mit Knotenpunkten nur insoweit berücksichtigen, als sich auf denselben zugleich anderweit drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und werden uns infolge dessen auf den Fall beschränken, in welchem sich die drei geraden Linien in einem Punkte schneiden und ihr gemeinsamer Schnittpunkt ein einfacher Punkt der Fläche ist.

2. Zur Ermittelung der allgemeinen Gleichung einer Fläche dieser Art bedürfen wir noch des folgenden Lehrsatzes:

Wenn sich auf einer Fläche n^{ten} Grades n in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden, so zerfällt die erste Polarfläche des Schnittpunktes in Bezug auf die gegebene Fläche in jene Ebene und in eine Fläche $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades.

Sind nämlich die Coordinaten des fraglichen Punktes und ist $\alpha = 0$ die Gleichung der Ebene, in welcher jene Geraden liegen, so ist die Gleichung der Fläche

$$f_n(\beta, \gamma) + \alpha f_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

wobei die beiden f homogene Functionen resp. n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der innerhalb der Klammer stehenden Coordinaten sind. Setzt man nämlich in dieser Gleichung $\alpha = 0$, so wird dieselbe zu

$$f_n(\beta, \gamma) = 0$$

und stellt n gerade Linien dar. Die Gleichung der ersten Polarfläche des Schnittpunktes wird nun durch den gleich Null gesetzten Differentialquotienten der Flächengleichung nach δ dargestellt und ist somit:

$$\alpha \frac{d f_{n-1}}{d\delta} = 0 .$$

Hiernach ist das Behauptete evident. Leicht zu beweisen ist, dass auch die Umkehrung desselben gilt:

Wenn die erste Polarfläche eines Punktes in Bezug auf eine Fläche n^{ten} Grades in eine durch ihn gehende Ebene und eine Fläche $(n-2)^{ten}$ Grades zerfällt, so liegt jener Punkt auf der Fläche, die Ebene ist die Tangentialebene der Fläche in ihm und schneidet die Fläche in n durch den Punkt gehenden geraden Linien.

Jede Ebene, welche durch einen derartigen Punkt geht, schneidet die Fläche in einer Curve, deren Tangente in jenem Punkte mit der Curve n zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich hat.

Ist die Fläche eine solche dritten Grades, so geht der erste allgemeine Satz in den folgenden speciellen über:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden, so zerfällt die erste Polare dieses Punktes in Bezug auf die Fläche in zwei Ebenen, deren eine jene Tangentialebene ist.

Während also im Allgemeinen der Berührungskegel einer Fläche dritten Grades, welcher seinen Scheitel in einem beliebigen Punkt derselben hat, vom vierten Grade ist, wird er für den Schnittpunkt von drei Geraden der Fläche nur vom dritten Grade. Es hängt dies damit zusammen, dass jede durch diesen Schnittpunkt gehende, auf der Fläche liegende ebene Curve in ihm einen Wendepunkt besitzt, und folgt unmittelbar aus dem Satze, dass man von einem Wendepunkte aus an eine ebene Curve dritten Grades drei Tangenten legen kann, deren Berührungspunkte in einer Geraden liegen.

3. Clebsch hat zuerst (Crelle's Journal, Bd. 59, vergl. auch Salmon's analytische Geometrie des Raumes, deutsch von Fiedler, p. 397) den Beweis geliefert, dass die allgemeine Gleichung einer Fläche dritten Grades in nur einer Weise auf die Form gebracht werden kann:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ u. s. w. die Gleichungen von Ebenen und die in diesen enthaltenen Constanten so gewählt sind, dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

Diese fünf Ebenen bilden ein Pentaeder. Die 10 Ecken desselben, und zwar im Allgemeinen diese allein, besitzen nun die Eigenschaft, dass ihre erste Polaren in Bezug auf die Fläche dritten Grades in zwei Ebenen zerfallen. So ergiebt sich aus obiger Gleichung durch Differenziren derselben nach α oder β unter gleichzeitiger Berücksichtigung der zwischen den 5 Grössen α, β u. s. w. bestehenden Relation die Gleichung der ersten Polaren des Eckpunktes $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$:

$$A\alpha^2 - B\beta^2 = 0.$$

Diese Polare zerfällt also in die zwei Ebenen

$$\alpha\sqrt{A} \pm \beta\sqrt{B} = 0.$$

Sollen somit auf unsrer Fläche dritten Grades sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, so muss nach § 2. eine der 10 Ecken des Pentaeders in der Fläche liegen. Dies tritt aber für die eben als Beispiel gewählte Ecke nur dann ein, wenn

$$A = B.$$

Sind somit in der allgemeinen auf das Pentaeder bezogenen Gleichung einer Fläche dritten Grades zwei Coefficienten gleich, so liegen auf der Fläche drei sich in einer Pentaederecke schneidende Gerade. Aus der Gleichung der Fläche, welche infolge der Gleichheit zweier Coefficienten die Form annimmt:

$$A(\alpha^3 + \beta^3) + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

ergiebt sich sofort, dass die Ebene

$$\alpha + \beta = 0$$

diejenige der drei Geraden ist. Substituirt man nämlich

$$\alpha = -\beta$$

in die Gleichung der Fläche; so erhält man wegen

$$\varepsilon = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

die Gleichung

$$C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\gamma + \delta)^3 = 0,$$

welche in Verbindung mit

$$\alpha + \beta = 0$$

drei Gerade darstellt, welche sich in einem Punkte treffen. Diese Ebene ist aber eine Diagonalebene des Pentaeders, da aus der Gleichung derselben hervorgeht, dass sie durch die Schnittlinie der zwei Pentaederebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ geht, und da ausserdem nach dem Vorigen die Pentaederecke $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ in ihr enthalten ist. Daher:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei Gerade in einem Punkte treffen, so ist die Ebene derselben eine Diagonalebene und der Schnittpunkt eine Ecke des Pentaeders der Fläche.

Zu bemerken ist noch, dass die Gleichung der Ebene, welche mit derjenigen der drei Geraden die erste Polare der Pentaederecke

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

ausmacht,

$$\alpha - \beta = 0$$

ist, und dass somit die Berührungsebene des von jener Ecke aus an die Fläche zu legenden Berührungskegels dritten Grades durch die nämliche Pentaederkante geht, wie die Ebene der drei Geraden, und mit dieser den von den beiden darin zusammenstossenden Pentaederebenen gebildeten Winkel harmonisch theilt.

4. Durch Betrachtung aller möglichen Fälle ergiebt sich zunächst, dass auf einer Fläche dritten Grades 1, 2, 3, 4, 6 und 10mal der Fall eintreten kann, dass sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Die diesen Fällen entsprechenden Gleichungen der Fläche haben die folgenden Formen:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,\\
&2)\quad \alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3 + \delta^3) + l\varepsilon^3 = 0,\\
&3)\quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + k\delta^3 + l\varepsilon^3 = 0,\\
&4)\quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + k(\delta^3 + \varepsilon^3) = 0,\\
&5)\quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + k\varepsilon^3 = 0,\\
&6)\quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichung 2) geht hervor, *dass, wenn sich auf einer Fläche dritten Grades zweimal, aber nicht öfter, drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, die Verbindungslinie beider Schnittpunkte, hier die Gerade*

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma + \delta = 0,$$

der Fläche angehört.

Wenn dagegen, wie bei der Fläche 3), *dreimal, aber nicht öfter, drei gerade Linien der Fläche sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Schnittpunkte auf einer und derselben Pentaederkante*, hier

$$\delta = 0, \quad \varepsilon = 0.$$

Die Fälle 5) und 6), deren letzterer die von Clebsch so genannte *Diagonalfläche* liefert, sollen später ausführlicher betrachtet werden.

5. Die vorigen Betrachtungen haben jedoch gewisse Flächen nicht mit ergeben, auf welchen sich theilweise noch öfter, als 10mal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, dass die oben aufgestellte Behauptung, es könnten nur die ersten Polaren der 10 Pentaederecken in ein Ebenenpaar zerfallen, nur

im Allgemeinen richtig und für specielle Flächen dritten Grades nicht mehr zutreffend ist.

Unter der Hesse'schen Fläche einer beliebigen Fläche versteht man bekanntlich den geometrischen Ort aller Punkte, deren quadratische Polare (Polarfläche 2. Grades) zu einem Kegel wird. Für die allgemeine Fläche dritten Grades ist dieselbe vom vierten Grade und ihre Gleichung nimmt, falls die ursprüngliche Fläche wie früher auf das Pentaeder bezogen ist, die einfache Gestalt an:

$$\frac{1}{A\alpha}+\frac{1}{B\beta}+\frac{1}{C\gamma}+\frac{1}{D\delta}+\frac{1}{E\varepsilon}=0\,.$$

Die 10 Ecken des Pentaeders sind Knotenpunkte dieser Hesse'schen Fläche und haben als solche die Eigenschaft, dass ihre quadratische Polare in Bezug auf die Fläche dritten Grades in zwei Ebenen zerfällt. Hätte die Hesse'sche Fläche jedoch ausser diesen und den etwaigen Knotenpunkten der ursprünglichen Fläche, welche ihr bekanntlich auch als solche angehören, noch weitere Knotenpunkte, so würden diese die nämliche Eigenschaft besitzen. Dieser Fall kann allerdings eintreten, aber nur dann, wenn die Hesse'sche Fläche in Flächen niedrigeren Grades zerfällt und daher Doppellinien besitzt.

Wenn von den fünf Ebenen des Pentaeders vier durch einen und denselben Punkt gehen, so kann wohl die Gleichung der Fläche auch fernerhin auf die Form:

$$A\alpha^3+B\beta^3+C\gamma^3+D\delta^3+E\varepsilon^3=0$$

gebracht werden, es ist aber nicht mehr möglich, die Summe der fünf Coordinaten gleich Null zu setzen, sondern nur diejenige von vier Coordinaten, so dass etwa:

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon=0$$

wäre. Der gemeinsame Schnittpunkt der vier Pentaederebenen $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\varepsilon=0$ besitzt die Eigenschaft, dass von ihm aus ein osculirender Kegel dritten Grades an die Fläche gelegt werden kann, eine Eigenschaft, durch welche die Fläche vollständig charakterisirt ist. Die ebene Berührungscurve dieses Kegels liegt in der Ebene $\delta=0$ und besitzt die Gleichung:

$$\delta=0\,,\quad A\alpha^3+B\beta^3+C\gamma^3+E\varepsilon^3=0\,.$$

Bekanntlich kann die Gleichung einer Curve dritten Grades auf unendlich viele Weise in diese Form gebracht werden, so dass von dem Pentaeder der Fläche eine Ebene ($\delta=0$) und der Schnittpunkt der vier übrigen Ebenen bestimmt, diese vier Ebenen selbst aber unbestimmt sind. Man kann daher auch als Gleichung der Fläche die folgende wählen:

$$\delta^3+K=0\,,$$

wo $K = 0$ einen Kegel dritten Grades vom Scheitel $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ darstellt.

Die Hesse'sche Fläche dieser Oberfläche zerfällt nun in zwei Theile, und zwar in die Ebene $\delta = 0$ und in den Hesse'schen Kegel des Kegels $K = 0$, der wie dieser vom dritten Grade ist. Diese beiden Theile durchschneiden sich in einer Curve dritten Grades, welche als Doppellinie der Hesse'schen Fläche angesehen werden muss und zugleich die Hesse'sche Curve der Linie:

$$\delta = 0\,, \quad K = 0$$

darstellt. *Diese Doppellinie begegnet der Fläche dritten Grades in 9 Punkten, den 9 Wendepunkten der Curve, in welcher die Fläche von ihrem osculirenden Kegel berührt wird, und diese 9 Punkte sind zugleich solche, in denen sich drei gerade Linien der Fläche in einem Punkte schneiden.*

Die 9 Ebenen, in welchen je drei sich in einem Punkte treffende Linien liegen, gehen sämmtlich durch denselben Punkt, den Scheitel des Kegels K. Die übrigen 36 Dreiecksebenen der Fläche schneiden sich 12mal zu je dreien in den 12 geraden Linien, welche durch je drei Wendepunkte der Berührungscurve gehen.

6. Wenn die Ebene ε durch die Schnittlinie der Ebenen α und β geht, so würde die Gleichung der Fläche sein:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$\alpha + \beta + \varepsilon = 0\,.$$

Man kann aber jede binäre cubische Form, also auch die folgende:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 - E(\alpha + \beta)^3$$

auf die Summe zweier Cuben:

$$m(\alpha + k\beta)^3 + n(\alpha + l\beta)^3$$

reduciren. Setzt man nun wieder für $\alpha + k\beta$ und $\alpha + l\beta$ resp. α und β, sowie für m und n A und B, so findet man, dass die Gleichung der Fläche immer auf die Form:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 = 0$$

gebracht werden kann, oder auf die noch einfachere:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0\,,$$

wenn man die Constanten in die Coordinaten selbst mit einschliesst. Für diese Fläche, deren Gleichung somit auf die Summe von vier Cuben zurückgeführt werden kann, wird die Hesse'sche Fläche einfach von der Gleichung:

$$\alpha\beta\gamma\delta = 0;$$

sie zerfällt also in die vier Ebenen eines Tetraeders, dessen Kanten Doppellinien derselben sind.

Jeder Punkt auf einer dieser Kanten hat nun in der That die Eigenschaft, dass seine erste Polarfläche in Bezug auf die Fläche dritten Grades zu einem Ebenenpaar wird. So ist die Gleichung dieser Polaren für den Punkt:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, \quad \delta_1 = 0:$$
$$\alpha_1 \alpha^2 + \beta_1 \beta^2 = 0.$$

Jede der vier Tetraederecken speciell hat die Eigenschaft, dass ihre Polare in zwei zusammenfallende Ebenen zerfällt; wird z. B. noch $\beta_1 = 0$, so geht vorige Gleichung über in:

$$\alpha^2 = 0.$$

Von jeder der vier Ecken aus ist daher nur ein Tangentialkegel dritten Grades an die Fläche möglich, dessen Erzeugenden die Fläche osculiren.

Die Punkte dagegen, in welchen die 6 Tetraederkanten der Fläche dritten Grades begegnen, sind solche, durch welche zugleich drei in einer Ebene liegende Gerade der Fläche gehen. Solcher Punkte giebt es 18. — Auch auf diese Fläche kommen wir später ausführlicher zurück.

Weitere Flächen dritten Grades, deren Hesse'sche Flächen in solche niedrigeren Grades zerfallen, würde man erhalten, wenn man zwei der fünf Pentaederebenen zusammenfallen liesse. Die Gleichung einer solchen Fläche geht hervor, wenn man in der auf das Pentaeder bezogenen Gleichung etwa α und β durch:

$$\alpha + \frac{\beta}{k} \text{ und } \alpha - \frac{\beta}{k}$$

ersetzt, sowie statt A und B resp. Ak und $-Ak$ einführt und sodann k unendlich gross werden lässt. Sie hat daher die Form:

$$A\alpha^2\beta + C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\alpha+\gamma+\delta)^3 = 0.$$

Wir gehen jedoch hier auf diese Flächen, auf denen sich stets ein uniplanarer Knotenpunkt nachweisen lässt und deren Hesse'sche Fläche aus zwei zusammenfallenden Ebenen und einem Kegel zweiten Grades besteht, nicht näher ein, da sich im Allgemeinen auf ihnen ausser den durch den Knotenpunkt gehenden Geraden keine weiteren vorfinden, die sich zu dreien in einem Punkte schneiden.

Wollte man ausser zwei Pentaederebenen noch einmal zwei derselben zusammenfallen lassen, so würde die entstehende Fläche eine *Regelfläche* dritten Grades sein. Auf dieser schneiden sich gewissermassen in jedem Punkte der Doppellinie drei gerade Linien, von denen allerdings zwei zusammenfallen.

7. Besonders beachtenswerth sind diejenigen unter den von uns zu betrachtenden Flächen, welche *Knotenpunkte* besitzen. Soll ein solcher Punkt in der allgemeinen Fläche dritten Grades:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

wobei

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$$

ist, auftreten, so muss zwischen den Coefficienten A, B u. s. w. eine gewisse Relation bestehen, deren Aufsuchung leicht ist. Es können nämlich für jede Fläche nur solche Punkte Knotenpunkte werden, für welche die vier Differentialquotienten der Flächengleichung nach den vier Coordinaten verschwinden. Der Punkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ wird daher für die obige Fläche dann ein Knotenpunkt sein, wenn:

$$A\alpha_1{}^2 = B\beta_1{}^2 = C\gamma_1{}^2 = D\delta_1{}^2 = E\varepsilon_1{}^2,$$

oder

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 : \varepsilon_1 = A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Flächengleichung ein, so erhält man als die gesuchte Relation zwischen den Coefficienten:

$$A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Quadratwurzeln können dabei sowohl in voriger Proportion, als auch in dieser Gleichung das positive und negative Vorzeichen besitzen, doch müssen die Vorzeichen derselben Wurzel in beiden Fällen übereinstimmen. Da sonach noch vier der Coefficienten willkührlich sind, so kann man, dieselben gleichsetzend, bewirken, dass auf der Fläche sechsmal drei gerade Linien durch einen und denselben Punkt gehen und zwar ohne dass dabei die sechs Geraden betheiligt sind, welche sich in dem Knotenpunkte schneiden. Auch auf diese specielle interessante Fläche, deren Gleichung die Form hat:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 = 0,$$

kommen wir später zurück.

Soll die Fläche zwei Knotenpunkte besitzen, so muss für die Coordinaten beider Punkte die obige Proportion erfüllt sein, was nur dann möglich ist, wenn bei beiden gewisse Vorzeichen verschieden sind. Sollen nun etwa die beiden Punkte:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = A^{-\frac{1}{2}} : -B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = -A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}$$

Knotenpunkte der Fläche sein, so können die beiden zu erfüllenden Gleichungen:

$$A^{-\frac{1}{2}} - B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

und

$$-A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

nur dann gleichzeitig bestehen, wenn:

$$A = B$$

und

$$C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Der ersten Gleichung zufolge muss nach § 3. die Ebene

$$\alpha + \beta = 0,$$

die Flächen in drei geraden Linien schneiden, welche sich in einem Punkte treffen. In der That enthält eine Fläche dritten Grades mit zwei Knotenpunkten die gerade Verbindungslinie beider Punkte und besitzt längs derselben in allen Punkten dieselbe Berührungsebene. Diese Ebene nun schneidet daher die Fläche in zwei zusammenfallenden Linien und einer weiteren Geraden und ist also eine Ebene der angegebenen Art. Aus ihrer Gleichung und aus den zwischen den Coordinaten der Knotenpunkte bestehenden Proportionen ergiebt sich noch der folgende Satz:

Hat eine Fläche dritten Grades zwei Knotenpunkte, so liegen beide in einer Diagonalebene des Pentaeders und ihre Verbindungslinie geht durch eine Ecke desselben.

Die Bedingung

$$C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

wird unter Anderem erfüllt, wenn:

$$C = D = k, \quad E = 4k$$

ist. Bei der sich unter dieser Voraussetzung ergebenden Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3 + \delta^3 + 4\varepsilon^3) = 0$$

schneiden sich überdies drei gerade Linien, deren keine durch einen Knotenpunkt geht, in einem Punkte. Mehr als einmal kann dieser Fall bei Flächen dritten Grades mit zwei Knotenpunkten nicht eintreten.

Auf gleiche Weise stellt:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 4(\delta^3 + \varepsilon^3) = 0$$

eine Fläche mit drei Knotenpunkten dar, auf welcher die einzigen drei geraden Linien, welche nicht durch einen Knotenpunkt gehen, sich in einem Punkte schneiden. Die Coordinaten der drei Knotenpunkte sind bei dieser Fläche die folgenden:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 : \varepsilon_1 &= 2 : -2 : -2 : 1 : 1, \\
\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2 : \varepsilon_2 &= -2 : 2 : -2 : 1 : 1, \\
\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 : \delta_3 : \varepsilon_3 &= -2 : -2 : 2 : 1 : 1,
\end{aligned}$$

und die Ebene der drei Punkte ist:

$$\delta - \varepsilon = 0.$$

Endlich wird durch die Gleichung:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \frac{1}{4}\,\varepsilon^3 = 0$$

eine Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten dargestellt.

8. Bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte, deren Untersuchung oben durchgeführt worden ist, kann es auffallend erscheinen, dass unter den Geraden, welche sich zu dreien in einem Punkte schneiden, nie eine durch den Knotenpunkt gehende vorkommt. In der That aber sind, wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden und eine derselben durch einen Knotenpunkt geht, nur zwei Fälle möglich. Entweder hat die Fläche noch einen zweiten Knotenpunkt, die Gerade ist die Verbindungslinie beider und die Ebene der drei geraden Linien ist die Berührungsebene längs derselben, welcher Fall bereits oben erledigt ist, oder die zwei anderen Geraden gehen durch den nämlichen Knotenpunkt und dieser ist ein *biplanarer* oder *uniplanarer*.

Die Flächen dieser Art haben wir im vorigen § von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen, da wir ein vollständig bestimmtes Pentaeder voraussetzten, welches für diese Flächen nicht existirt. Es sei dagegen jetzt die Gleichung der Fläche:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0.$$

Soll für diese Fläche der Punkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1)$ ein Knotenpunkt sein, so sind die Bedingungen:

$$A\alpha_1^2 = B\beta_1^2 = C\gamma_1^2 = E\varepsilon_1^2$$

und

$$D\delta_1^2 = 0$$

zu erfüllen, der Knotenpunkt muss daher in der Ebene $\delta = 0$ liegen und seine Cordinaten müssen sein:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \varepsilon_1 = A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}},$$

während zwischen den Coefficienten noch die Verbindung bestehen muss:

$$A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Gleichung des Berührungskegels in dem Knotenpunkte ist:

$$A^{\frac{1}{2}}\alpha + B^{\frac{1}{2}}\beta^2 + C^{\frac{1}{2}}\gamma^2 + E^{\frac{1}{2}}\varepsilon^2 = 0.$$

Ein Scheitel dieses Kegels liegt also in dem Punkte:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

ein weiterer Scheitel muss aber offenbar der Knotenpunkt selbst sein, was nur dann zugleich mit jenem möglich ist, wenn der Kegel in zwei Ebenen zerfällt, der Knotenpunkt also *biplanar* wird.

Hat somit eine Fläche dritten Grades mit einem osculirenden Kegel dritten Grades einen Knotenpunkt, so ist dieser biplanar und liegt in der Berührungsebene jenes Kegels.

Nach § 5. schneiden sich in jedem Wendepunkte der Berührungscurven drei gerade Linien der Fläche. Da nun eine ebene Curve dritten Grades mit Doppelpunkt drei Wendepunkte besitzt, so folgt, dass auf der vorliegenden Fläche mit einem biplanaren Knotenpunkte die 9 geraden Linien, welche nicht durch denselben gehen, sich dreimal zu je dreien in einem Punkte treffen. Die Gleichung einer Fläche dieser Art kann stets auf die Form:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - \frac{1}{9}(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 0$$

gebracht werden; die Gleichungen der drei Ebenen, in welchen jene geraden Linien liegen, sind dann:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0.$$

Setzt man in der Gleichung:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 0$$
$$A = B = 1, \quad B = E = k,$$

so erhält man in:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3 - (\alpha+\beta+\gamma)^3) + D\delta^3 = 0$$

die Gleichung einer Fläche mit zwei biplanaren Knotenpunkten, welche auch auf die Form:

$$\delta^3 + pK = 0$$

gebracht werden kann, wo $\delta = 0$ und $p = 0$ Ebenen darstellen, sowie $K = 0$ einen Kegel zweiten Grades, der seinen Scheitel in der Ebene $p = 0$ hat.

Wird endlich:

$$A = B = C = E$$

gesetzt, so erhält man eine Fläche mit drei biplanaren Knotenpunkten, deren Gleichung man auch zu:

$$\delta^3 + pqr = 0$$

vereinfachen kann. Bei dieser und der vorigen Fläche gehen sämmtliche Geraden durch einen oder zwei der Knotenpunkte; sie können uns daher zunächst nicht weiter interessiren.

Um schliesslich eine Fläche zu erhalten, welche einen uniplanaren Knotenpunkt besitzt und auf welcher sich die drei geraden Linien, die durch denselben nicht gehen, in einem Punkte treffen, ist es nur nöthig, bei einer Fläche, deren Gleichung sich auf die Summe von vier Cuben reduciren lässt, zwei Tetraederebenen zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung einer Fläche dieser Art ist von der Form:

$$\alpha^2\beta + \gamma^3 + \delta^3 = 0.$$

Die Coordinaten des uniplanaren Knotenpunktes sind $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$; die Berührungsebene desselben ist $\alpha=0$ und die Ebene der drei übrigen geraden Linien $\beta=0$.

9. Die Berührungspunkte sämmtlicher Tangentialebenen, welche man von dem Punkte:

$$\gamma=\delta=\varepsilon=0$$

der Fläche

$$\alpha^3+\beta^3+k\gamma^3+l\delta^3+m\varepsilon^3=0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0)$$

aus an dieselbe legen kann, liegen in der Ebene:

$$\alpha-\beta=0,$$

welche mit der Berührungsebene der Fläche in jenem Punkte zusammen die erste Polare des bezeichneten Punktes in Bezug auf die Fläche bildet. In dieser Ebene liegt daher auch der Berührungspunkt jeder Tangentialebene, welche durch eine der in jenem Punkte sich schneidenden geraden Linien der Fläche an dieselbe gelegt werden kann. Es gilt daher der Satz:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende Gerade derselben in einem Punkte schneiden, so liegen die Berührungspunkte der 12 *Tangentialebenen der Fläche, deren jede durch eine jener Geraden geht, in einer Ebene.*

Ebenso ist die Umkehrung dieses Satzes richtig:

Wenn die Berührungspunkte von vier der Tangentialebenen, welche man durch eine auf einer Fläche dritten Grades liegende gerade Linie an dieselbe legen kann, in einer Ebene liegen, so schneidet die fünfte Tangentialebene die Fläche in weiteren zwei geraden Linien, welche jene Linie in dem nämlichen Punkte treffen.

Wenn dagegen unter den 5 *Ebenen, welche im Allgemeinen durch eine Gerade einer Fläche dritten Grades so gelegt werden können, dass sie die Fläche in weiteren zwei Geraden durchschneiden, zwei sind, für welche der Durchschnittspunkt der letzteren auf die ursprüngliche Gerade fällt,* was z. B. bei der Fläche:

$$\alpha^3+\beta^3+k(\gamma^3+\delta^3)+l\varepsilon^3=0$$

bei den beiden durch die Gerade:

$$\alpha+\beta=0,\quad \gamma+\delta=0$$

gehenden Ebenen:

$$\alpha+\beta=0,$$
$$\gamma+\delta=0$$

eintritt, *so liegen die Berührungspunkte der drei übrigen Ebenen in einer Geraden,* hier:

$$\alpha-\beta=0,\quad \gamma-\delta=0.$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes, welche sich sehr leicht bilden lässt, ist richtig.

10. Zu den Lehrsätzen des vorigen § kann man auch auf die folgende Weise gelangen:

Nach der dritten Steiner'schen Erzeugungsweise der Fläche dritten Grades (vergl. Sturm, Synthetische Unterschungen von Flächen dritter Ordnung, § 10. und 11.) ist dieselbe der geometrische Ort für die Berührungscurven aller Tangentialkegel, welche man von einem bestimmten Punkte aus an die Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung legen kann.

Wählt man nun die vier Scheitel des Tetraeders, welches in Bezug auf alle Flächen des Büschels sich selbst conjugirt ist (zugleich die Scheitel der vier zu dem Büschel gehörigen Kegel), zu Eckpunkten des Fundamentaltetraeders, so ist die Gleichung des Büschels von der Form:

$$m\alpha^2 + n\beta^2 + p\gamma^2 + q\delta^2 + k(m_1\alpha^2 + n_1\beta^2 + p_1\gamma^2 + q_1\delta^2) = 0.$$

Ist ferner der Scheitel des Tangentialkegels gegeben durch:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = A : B : C : D,$$

so ist die Gleichung des Büschels, welches von den Polarebenen desselben in Bezug auf die Flächen zweiter Ordnung gebildet wird:

$$Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta + k(Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta) = 0.$$

Der geometrische Ort der Durchschnittscurven entsprechender Flächen beider Büschel ist dann die Fläche dritten Grades:

$$\begin{aligned}(m\alpha^2 + n\beta^2 + p\gamma^2 + q\delta^2)\,(Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta)\\ = (m_1\alpha^2 + n_1\beta^2 + p_1\gamma^2 + q_1\delta^2)\,(Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta).\end{aligned}$$

Auf dieser Fläche liegt die Schnittlinie:

$$\begin{aligned}Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta &= 0,\\ Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta &= 0\end{aligned}$$

der Ebenen des Polarbüschels; ferner sind die vier Fundamentalpunkte, sowie der Scheitel der Tangentialkegel die 5 Berührungspunkte der Ebenen, welche durch jene Gerade gehend, die Fläche noch anderweit berühren und somit aus derselben noch je zwei Gerade ausschneiden. Soll nun jene Gerade durch einen Fundamentalpunkt, z. B. $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ gehen, so dass sich in diesem Punkte dann drei gerade Linien der Fläche schneiden, so muss eine der Grössen A, B u. s. w., z. B. A verschwinden, d. h. der Berührungspunkt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = 0 : B : C : D$$

muss in einer Tetraederebene liegen. Liegen umgekehrt vier Berührungspunkte in einer Ebene, so verschwindet eine jener Constanten und die

Schnittlinie der Polarebenen geht durch eine Tetraederecke. Hieraus aber ergeben sich ohne Weiteres die Lehrsätze des vorigen §.

11. Auch die Hesse'sche Fläche der Fläche dritten Grades:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,$$

auf welcher sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, besitzt eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Die Gleichung jener Fläche ist:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0.$$

Bekanntlich enthält die Hesse'sche Fläche die 10 Pentaederkanten und besitzt längs jeder derselben eine einzige Tangentialebene. Eine dieser Ebenen ist nun die folgende:

$$\alpha + \beta = 0.$$

Dieselbe berührt die Hesse'sche Fläche längs der Kante:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

und durchschneidet sie ausserdem in einer Linie zweiten Grades, welche auf dem Kegel:

$$\frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0$$

liegen, und, da jene Ebene durch den Scheitel dieses Kegels geht, in zwei gerade Linien zerfallen muss. Es gilt daher der Satz:

Wenn sich drei gerade Linien einer Fläche dritten Grades in einem Punkte treffen, so berührt die Ebene dieser Geraden die Hesse'sche Fläche längs einer Pentaederkante und durchschneidet dieselbe in zwei geraden Linien.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese geraden Linien nur dann mit zwei von den zugleich in jener Ebene liegenden drei geraden Linien der Fläche dritten Grades zusammenfallen, wenn:

$$k^{-\frac{1}{2}} + l^{-\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

also wenn nach § 7. die Fläche zwei Knotenpunkte besitzt. In diesem Falle aber fallen die zwei betreffenden Linien selbst zusammen und bilden die Verbindungslinie der Doppelpunkte. *Hat daher eine Fläche dritten Grades zwei Knotenpunkte, so wird ihre Hesse'sche Fläche durch diejenige Diagonalebene des Pentaeders, in welcher diese Punkte liegen, längs zweier geraden Linien berührt.*

12. Unter der *Polarfläche einer Ebene E* in Bezug auf eine beliebige Fläche versteht man bekanntlich den geometrischen Ort aller Punkte, deren erste Polarflächen jene Ebene berühren oder auch die Umhüllende der Polarebenen aller Punkte, welche in E liegen. Für eine beliebige Fläche dritten Grades und eine beliebige Ebene ist diese Polarfläche im Allgemeinen eine Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten (vergl. u. A. Sturm, § 39.). Beide Erklärungen liefern jedoch nur

so lange genau das nämliche Resultat, als E keine der 20 Ebenen ist, in welche die Polarflächen der 10 Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche in Bezug auf die Fläche dritten Grades zerfallen. Ist dagegen E eine dieser Ebenen, so besteht die Umhüllende der sämmtlichen Polarebenen, deren Pole in E liegen, in einem einzigen Punkt, dem zu E gehörigen Pol. Liegt nämlich ein Punkt in der ersten Polare eines andern, so liegt umgekehrt dieser in der Polarebene von jenem. Da nun z. B. die erste Polarfläche des Punktes:

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

in Bezug auf die Fläche:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

in zwei Ebenen zerfällt, so muss umgekehrt die Polarebene jedes Punktes, der in einer dieser beiden Ebenen liegt, durch jenen Punkt gehen.

Erklärt man dagegen die Polarfläche der Ebene E als Ort eines Punktes, so ergiebt sich für dieselbe unter der für E gemachten Voraussetzung ein Kegel dritten Grades, welcher den vorher erhaltenen Punkt zum Scheitel hat.

Ist nun die Fläche dritten Grades eine solche, auf welcher sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und ist E die Ebene dieser Linien, so zerfällt dieser Kegel in jene Ebene und in einen Kegel zweiten Grades, der den Schnittpunkt jener geraden Linien zum Scheitel hat.

Sei die Gleichung der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,$$

also

$$\alpha + \beta = 0$$

die Gleichung der fraglichen Ebene. Dann ist die erste Polarfläche eines beliebigen Punktes (α_1, β_1 u. s. w.) in Bezug auf die Fläche gegeben durch:

$$\alpha^2\alpha_1 + \beta^2\beta_1 + k\gamma^2\gamma_1 + l\delta^2\delta_1 + m\varepsilon^2\varepsilon_1 = 0.$$

Die Durchschnittslinie dieser Fläche mit jener Ebene hat die Gleichung:

$$\alpha^2(\alpha_1+\beta_1) + \gamma^2(k\gamma_1+m\varepsilon_1) + \delta^2(l\delta_1+m\varepsilon_1) + 2m\varepsilon_1\gamma\delta = 0$$

und muss, falls die Fläche und die Ebene sich berühren sollen, in zwei gerade Linien zerfallen. Die Bedingung, unter welcher dies geschieht, also die Gleichung der zur Ebene E gehörigen Polarfläche, ist:

$$(\alpha_1+\beta_1)\left[\frac{1}{k\gamma_1} + \frac{1}{l\delta_1} + \frac{1}{m\varepsilon_1}\right] = 0.$$

Diese Fläche zerfällt also, wie bereits oben gesagt wurde, in die gegebene Ebene selbst und in den Kegel zweiten Grades:

$$\frac{1}{k\gamma_1} + \frac{1}{l\delta_1} + \frac{1}{m\varepsilon_1} = 0,$$

welcher die Hesse'sche Fläche in ihrem Knotenpunkte $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ berührt.

Die ersten Polarflächen aller Punkte in der Ebene:

$$\alpha + \beta = 0$$

berühren dieselbe, also auch sich gegenseitig, in dem Punkte, in welchem sich die drei in jener Ebene liegenden Geraden der Fläche dritten Grades schneiden. Dagegen liegen die Punkte, in welchen die ersten Polarflächen aller Punkte der Kegelfläche:

$$\frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0$$

die nämliche Ebene berühren, sämmtlich in der Pentaederkante $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Die Ebene und die Kegelfläche durchschneiden sich in zwei geraden Linien, welche nach dem vorigen § zugleich auf der Hesse'schen Fläche liegen. Die Polarflächen aller Punkte dieser geraden Linien werden demnach Kegel sein, die jene Ebene längs einer geraden Linie berühren; die Berührungslinien gehen dabei sämmtlich durch den nämlichen Punkt.

Wählt man die Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

zur Ebene E, so ergiebt eine ähnliche Rechnung, wie die vorige, als die Polarfläche dieser Ebene den Kegel dritten Grades:

$$\frac{4}{\alpha + \beta} + \frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0\,.$$

Auch dieser hat eine einfache Bedeutung. Er ist nämlich der Hesse'sche Kegel zu dem Kegel dritten Grades, welchen man vom Punkte $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ aus berührend an die Fläche legen kann, und dessen Gleichung ist:

$$\frac{(\alpha + \beta)^3}{4} + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0.$$

13. Wir werden uns im Nachstehenden etwas eingehender mit einigen der interessantesten unter den betrachteten Flächen beschäftigen und zwar zunächst mit denjenigen Flächen, auf welchen sich *sechsmal* drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und deren Gleichung wir stets in der Form:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + k\varepsilon^3 = 0$$

oder:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - k(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^3 = 0$$

voraussetzen wollen. *Für diese Flächen hängt das Problem des Pentaeders mit demjenigen der 27 geraden Linien so zusammen, dass, falls das erstere gelöst ist, das letztere nur die Auflösung von quadratischen Gleichungen erforderlich macht.*

Die sechs Ebenen:

$$\alpha + \beta = 0\,,\quad \alpha + \gamma = 0\,,\quad \alpha + \delta = 0\,,$$
$$\beta + \gamma = 0\,,\quad \beta + \delta = 0\,,\quad \gamma + \delta = 0$$

sind für diese Flächen diejenigen, in welchen die jedesmaligen sich in einem Punkte treffenden drei geraden Linien liegen; die sechs Durchschnittspunkte von je drei geraden Linien sind bestimmt durch:

$$\alpha = -\beta\,,\quad \gamma = 0\,,\quad \delta = 0 \text{ u. s. w.},$$

und liegen somit sämmtlich in der Pentaederebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0\,.$$

Sie sind in derselben die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits und zwar desjenigen, welches aus ihr durch die vier übrigen Pentaederebenen ausgeschnitten wird. Die Diagonalen dieses Vierseits:

$$\alpha + \beta = 0\,,\quad \gamma + \delta = 0\,,$$
$$\alpha + \gamma = 0\,,\quad \beta + \delta = 0\,,$$
$$\alpha + \delta = 0\,,\quad \beta + \gamma = 0$$

gehören vollständig der Fläche an. Somit gilt der folgende Satz:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades sechsmal, aber im Allgemeinen nicht öfter, drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, so bilden die sechs Schnittpunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits und liegen in einer Pentaederebene, während die drei Diagonalen in der Fläche selbst liegen.

Sobald das Pentaeder reell ist, sind selbstverständlich diese drei Diagonalen auch reell; die übrigen 12 betheiligten geraden Linien, von denen die in:

$$\alpha + \beta = 0$$

liegenden durch die Gleichung:

$$\gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 - k\,(\gamma + \delta)^2 = 0$$

oder:

$$(\gamma + \delta)^2\,(1 - k) - 3\gamma\delta = 0$$

dargestellt werden, sind es dagegen nur, sobald:

$$k > \frac{1}{4}\,.$$

Für

$$k = \frac{1}{4}$$

fallen je zwei gerade Linien zusammen; die Fläche ist dann die mehrfach erwähnte Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten.

14. Bei der Untersuchung unserer Fläche, insbesondere bei der Aufsuchung der 12 geraden Linien, welche ausser den in § 13. nachgewiesenen 15 Linien sich noch auf der Fläche vorfinden, sind etliche andere Gleichungen derselben, welche sich bei Zugrundelegung anderer Fundamentaltetraeder ergeben, von besonderem Nutzen.

Wählt man die 4 Ebenen:

$$\begin{aligned} X &= -\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,, \\ Y &= \alpha-\beta+\gamma+\delta=0\,, \\ Z &= \alpha+\beta-\gamma+\delta=0\,, \\ W &= \alpha+\beta+\gamma-\delta=0 \end{aligned}$$

zu Fundamentalebenen, so ergiebt sich durch eine leichte Rechnung als Gleichung der Fläche in Bezug auf das neue Tetraeder:

$$(4k-1)(X+Y+Z+W)^3+12(YZW+ZWZ+WXY+XYZ)=0.$$

Das Tetraeder ist hier ein solches, dessen sechs Kanten mit der Fläche je drei zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich haben; die sechs Berührungspunkte liegen in einer Ebene. Die letztere Eigenschaft kommt allen Tetraedern der gedachten Art auch bei der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu, da sich die Gleichung einer solchen auf unendlich viele Weisen auf die Form bringen lässt:

$$Ap^3+Brst+Cstq+Dtqr+Eqrs=0\,,$$

wo $p=0$, $q=0$ u. s. w. die Gleichungen von Ebenen sind. Werden dagegen die vier Ebenen:

$$\begin{aligned} X &= \alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,, \\ Y &= \alpha+\beta-\gamma-\delta=0\,, \\ Z &= \alpha-\beta+\gamma-\delta=0\,, \\ W &= \alpha-\beta-\gamma+\delta=0 \end{aligned}$$

zu Fundamentalebenen gewählt, so geht die Flächengleichung über in

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)+6YZW=0\,.$$

Besonders einfach gestaltet sich die Gleichung derjenigen Fläche, für welche:

$$k=\frac{1}{16}\,,$$

einer Fläche mit einem Knotenpunkte. Diese und die sich für:

$$k=\frac{1}{4}$$

ergebende Fläche mit vier Knotenpunkten sind die einzigen in dem Büschel:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3-k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=0$$

enthaltenen Flächen mit Knotenpunkten. Die Flächen dieses Büschels osculiren sich übrigens sämmtlich längs der drei Diagonalen des auf der Ebene:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

durch die vier übrigen Pentaederebenen ausgeschnittenen vollständigen Vierseits.

15. Wir legen im Folgenden die gefundene Gleichung:

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)+6YZW=0$$

zu Grunde und untersuchen, welche unter den durch die auf der Fläche liegende gerade Linie:

$$X=0, \quad Y=0$$

gelegten Ebenen

$$X=lY$$

die Fläche noch in einem Geradenpaare schneiden. Substituirt man diesen Werth von X in die Gleichung der Fläche, so erhält man:

$$l^3Y^2(1-16k)+3l(Y^2+Z^2+W^2)+6ZW=0\,.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen einen Kegelschnitt dar, der aber in fünf Fällen in zwei gerade Linien zerfällt. Diese sind:

1) $l=0$. Es ergiebt sich hierbei die schon mehrfach erwähnte, die Fläche in drei geraden Linien schneidende Ebene $X=0$.

2) $l=\pm 1$. Man erhält hier die in § 13. besprochenen geraden Linien. Die Gleichungen derselben sind übrigens unter Zugrundelegung der neuen Coordinaten, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{16k-4}{3}}=f$$

setzt, die folgenden:

$$\begin{aligned}
X &= Y, & fY+Z+W&=0\,;\\
X &= Y, & fY-Z-W&=0\,;\\
X &= -Y, & fY+Z-W&=0\,;\\
X &= -Y, & fY-Z+W&=0\,.
\end{aligned}$$

3) Zwei gerade Linien erhält man endlich auch, wenn:

$$l^2(1-16k)+3=0\,,$$

also

$$l=\pm\sqrt{\frac{3}{16k-1}}\,.$$

Die zwei hierdurch bestimmten Ebenen, welche aber nur reell sind, sobald

$$k>\frac{1}{16}\,,$$

schneiden die Fläche in je zwei geraden Linien, deren Schnittpunkte nicht mehr, wie im zweiten Falle, auf der Kante $X=0$, $Y=0$, sondern auf der gegenüberliegenden Kante $Z=0$, $W=0$ liegen. Die Gleichungen dieser beiden Geraden sind:

$$l(Y^2+Z^2)+2WZ=0\,.$$

Wird nun, wie im Folgenden stets geschehen soll:

$$\sqrt{\frac{3}{16k-1}}=l\,,$$

$$\frac{-1+\sqrt{1-l^2}}{l} = \frac{\sqrt{16k-4}-\sqrt{16k-1}}{\sqrt{3}} = f - \frac{1}{l} = \varrho$$

gesetzt, so sind die Gleichungen der vier auf der Fläche liegenden geraden Linien, welche hiernach noch die Gerade $X=0$, $Y=0$ schneiden:

$$\begin{array}{llll} X = & lY, & Z = & \varrho W, \\ X = & lY, & W = & \varrho Z, \\ X = & -lY, & Z = & -\varrho W, \\ X = & -lY, & W = & -\varrho Z. \end{array}$$

Ein reelles Pentaeder vorausgesetzt, sind diese Geraden nur reell, wenn

$$k > \frac{1}{4}.$$

In gleicher Weise erhält man vier gerade Linien, welche der Geraden $X=0$, $Z=0$, und vier weitere, welche $X=0$, $W=0$ begegnen; die jetzt gefundenen 12 und die bereits früher nachgewiesenen 15 geraden Linien machen die 27 Geraden der Fläche aus.

16. Die 12 Geraden des vorigen § lassen sich in folgender Weise in zwei Gruppen von je sechs Linien zerlegen:

$$\begin{array}{llll|llll} X = & lY, & Z = & \varrho W; & X = & -lY, & W = & -\varrho Z; \\ X = & -lY, & Z = & -\varrho W; & X = & lY, & W = & \varrho Z; \\ X = & lZ, & W = & \varrho Y; & X = & -lZ, & Y = & -\varrho W; \\ X = & -lZ, & W = & -\varrho Y; & X = & lZ, & Y = & \varrho W; \\ X = & lW, & Y = & \varrho Z; & X = & -lW, & Z = & -\varrho Y; \\ X = & -lW, & Y = & -\varrho Z. & X = & lW, & Z = & \varrho Y. \end{array}$$

Bei dieser Zusammenstellung durchschneidet jede Gerade der einen Gruppe die übrigen Geraden derselben Gruppe und die nebenstehende Gerade der andern Gruppe nicht; dagegen durchschneidet sie die übrigen 5 Geraden der andern Gruppe. Die 12 geraden Linien bilden daher das, was Schläfli zuerst eine *Doppelsechs* genannt hat und es gilt somit der Satz:

Schneiden sich auf einer Fläche dritten Grades sechsmal drei gerade Linien in einem Punkte, so sind hierbei 15 *gerade Linien der Fläche betheiligt und die* 12 *unbetheiligten Linien bilden eine Doppelsechs.*

Die übrigen 35 Doppelsechsen der Fläche enthalten theils gerade Linien der einen, theils solche der andern Art.

17. Die 45 Dreiecksebenen, welche die Fläche besitzt, theilen sich in zwei Gruppen. Bei der ersten Gruppe, welche 30 Ebenen umfasst, sind in jeder Ebene zwei Gerade der eben gefundenen Doppelsechs und eine weitere von den 15 übrigen Linien enthalten; bei der zweiten Gruppe liegen in jeder Ebene drei von diesen 15 Geraden.

Zu der ersten Gruppe gehören die sechs Ebenen:

$$X = \pm lY, \quad X = \pm lZ, \quad X = \pm lW,$$

und ausser ihnen noch 24 weitere Ebenen, von denen durch jede der 12 Geraden der Doppelsechs vier gehen. Die durch die Gerade:

$$X = lY, \quad Z = \varrho W$$

z. B. gehenden vier Ebenen sind, wie sich sehr leicht aus dem vorigen § ergiebt:

$$\begin{aligned} X - lY + lZ - l\varrho W &= 0, \\ X - lY - lZ + l\varrho W &= 0, \\ X - lY - l\varrho^{-1} Z + lW &= 0, \\ X - lY + l\varrho^{-1} Z - lW &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung einer jeder von diesen 24 Ebenen kann überhaupt auf die eine oder die andere der beiden nachstehenden Formen gebracht werden:

$$\begin{aligned} X \pm l(P+Q) + l\varrho^{\pm 1} R &= 0, \\ X + l(P-Q) + l\varrho^{\pm 1} R &= 0, \end{aligned}$$

wobei P, Q, R mit den drei Werthen Y, Z, W, nur in beliebiger Aufeinanderfolge, übereinstimmen.

Die zweite Gruppe von 15 Ebenen enthält zunächst die Ebene

$$X = 0,$$

sodann die sechs Ebenen:

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

und endlich 8 weitere Ebenen, von denen durch jede der 12 geraden Linien, die in den letzteren Ebenen ausser ihren Durchschnittslinien mit $X = 0$ noch liegen, zwei gehen. Die Gleichungen dieser acht Ebenen sind:

$$\begin{aligned} (1 \pm f) X + P + Q - R &= 0, \\ (1 \pm f) X - Y - Z - W &= 0. \end{aligned}$$

Geht man zu den früheren Coordinaten zurück, so stellt sich heraus, dass die Gleichungen der oben zusammengestellten 24 Ebenen sämmtlich die Form:

$$2(p+q+lr-ls) \pm fl(p+q-r-s) = 0,$$

diejenigen der letzten 8 Ebenen dagegen die andere:

$$2(p+q+r-s) \pm f(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$$

haben, wobei die Grössen p, q, r, s die vier Coordinaten in beliebiger Reihenfolge darstellen.

Es würde in gleicher Weise nicht schwer sein, die Coordinaten aller 135 Eckpunkte der 45 auf der Fläche liegenden Dreiecke zu finden.

18. Die in den vorigen § ausgeführten Rechnungen sind unter Anderem auch aus dem Grunde von Wichtigkeit, weil sich mit Hülfe derselben leicht die Frage nach der Realität der auf der Fläche liegenden 27 geraden Linien und der zugehörigen Dreiecksebenen entscheiden lässt. Die Untersuchung wird sich dabei nicht allein auf den oben nahezu erledigten Fall zu beschränken haben, in welchem die sämmtlichen vier Ebenen α, β, γ, δ reell sind, da auch in gewissen Fällen bei imaginären Ebenen reelle Flächen hervorgehen. Man erhält solche überhaupt in folgenden drei Fällen:

I. Sämmtliche vier Ebenen α, β, γ, δ sind reell.

II. Zwei Ebenen sind reell, die übrigen conjugirt imaginär.

III. Die vier Ebenen sind paarweise conjugirt imaginär.

In jedem dieser drei Fälle ist die Ebene X reell; die übrigen sind im ersten Falle auch sämmtlich reell; im zweiten Falle sind zwei conjugirt imaginär und die dritte ist reell, z. B.

$$Y = L + Mi = 0\,,$$
$$Z = L - Mi = 0\,.$$

Im dritten Falle endlich sind zwar auch sämmtliche Ebenen Y, Z, W reell, aber die Gleichungen von zweien unter ihnen erscheinen mit einem rein imaginären Factor multiplicirt, z. B.

$$Y = Li = 0,$$
$$Z = Mi = 0.$$

Nach § 15. werden wir sodann zu unterscheiden haben, ob die Grösse k grösser ist als $\frac{1}{4}$, ob sie zwischen $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{16}$ liegt, oder ob sie endlich kleiner ist als $\frac{1}{16}$. Die beiden Grenzfälle $k = \frac{1}{4}$ und $k = \frac{1}{16}$ liefern Flächen mit resp. vier oder einem Knotenpunkt, welche sogenannte binäre Gerade besitzen. Wir untersuchen diese beiden Fälle hier nicht näher und nur den zweiten später.

Die für die Grössen l, ϱ und f gegebenen Bestimmungsgleichungen zeigen, dass für

$$k > \frac{1}{4}$$

l, ϱ und f reell, für

$$\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$$

l reell, ϱ complex und f imaginär und für

$$k < \frac{1}{16}\,\cdot$$

l, ϱ und f imaginär sind. Wir gehen nun die einzelnen möglichen Fälle der Reihe nach durch:

I. *Sämmtliche Ebenen* α, β, γ, δ, *und somit auch die vier Ebenen* X, Y, Z, W *sind reell.*

A. $k > \frac{1}{4}\cdot$ Sämmtliche 27 gerade Linien und die 45 Dreiecksebenen sind reell.

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$. Reell sind nur drei gerade Linien, nämlich diejenigen, welche in der Ebene $X = 0$ liegen; von den Dreiecksebenen sind 13 reell, und zwar die Ebene $X = 0$, die sechs Ebenen

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

sowie die weiteren sechs Ebenen

$$X = \pm lY, \quad X = \pm lZ, \quad X = \pm lW.$$

C. $k < \frac{1}{16}\cdot$ Reell sind wieder die nämlichen drei Geraden, wie unter B.; von den Dreiecksebenen sind ausser der Ebene $X = 0$ nur die folgenden 6:

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

also im Ganzen 7 reell.

II. *Die zwei Ebenen α und β sind reell, die beiden anderen γ und δ conjugirt imaginär.* Alsdann sind auch die beiden Ebenen

$$X = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$
$$Y = \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0$$

reell, die beiden anderen dagegen

$$Z = \alpha - \beta + \gamma - \delta = 0,$$
$$W = \alpha - \beta - \gamma + \delta = 0$$

conjugirt imaginär, also

$$Z = L + Mi = 0,$$
$$W = L - Mi = 0.$$

A. $k > \frac{1}{4}\cdot$ Reell sind nur die drei geraden Linien:

$$X = 0, \quad Y = 0;$$
$$X = Y, \quad fY + Z + W = 0,$$
$$X = Y, \quad fY - Z - W = 0,$$

welche in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte durchschneiden.

Von den Dreiecksebenen sind 13 reell, nämlich die folgenden:

$$X = 0,$$
$$X = \pm Y,$$
$$X = \pm lY,$$
$$X + l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z + W) = 0;$$
$$(1 \pm f)X - Y + Z + W = 0;$$
$$(1 \pm f)X - Y - Z - W = 0.$$

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$. Reell sind 7 gerade Linien, nämlich ausser den drei folgenden:

$$\begin{aligned} &X = 0, &&X = 0, \\ &X = -Y, &&fY + Z - W = 0, \\ &X = -Y, &&fY - Z + W = 0, \end{aligned}$$

noch die vier in den Ebenen

$$X = \pm lY$$

liegenden Linien. Die letzteren sind es, weil wegen

$$\varrho = f - \frac{1}{l}$$

z. B. die Gleichung

$$Z = -\varrho W$$

übergeht in

$$L\left(1 + f - \frac{1}{l}\right) + Mi\left(1 - f + \frac{1}{l}\right) = 0,$$

woraus durch Multiplication mit

$$1 - f - \frac{1}{l}$$

entsteht:

$$L\left(1 - \frac{2}{l} + \frac{1}{l^2} - f^2\right) + Mi\left(1 - 2f + f^2 - \frac{1}{l^2}\right) = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{l^2} - f^2 = 1,$$

weshalb diese Gleichung sich vereinfacht zu:

$$L\left(\frac{1}{l} - 1\right) + fMi = 0.$$

Diese Gleichung ist aber reell, weil l reell und f rein imaginär ist. Unter den Dreiecksebenen sind 5 reelle vorhanden, nämlich:

$$X = 0, \quad X = \pm W, \quad X = \pm lW.$$

C. $k < \frac{1}{16}$. Reell sind die drei unter B. zuerst aufgeführten geraden Linien, sowie die 7 Dreiecksebenen:

$$\begin{aligned} &X = 0, \\ &X = \pm Y, \\ &X - l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z - W) = 0. \end{aligned}$$

III. *Die Ebenen α und β, sowie γ und δ sind conjugirt imaginär.* Alsdann sind zwar sämmtliche vier Ebenen X, Y, Z, W reell, aber zwei von ihnen, nämlich Z und W, enthalten in ihren Gleichungen einen auszuscheidenden rein imaginären Factor, also

$$\begin{aligned} Z &= Li = 0, \\ W &= Mi = 0. \end{aligned}$$

A. $k > \frac{1}{4}\cdot$ Reell sind 7 gerade Linien, nämlich die drei in $X=0$ liegenden und die vier, welche sich in den beiden Ebenen
$$X = \pm\, l Y$$
vorfinden. Von den Dreiecksebenen sind die folgenden 5 reell:
$$X=0, \quad X=\pm\, Y, \quad X=\pm\, l\, Y.$$

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}\cdot$ Reell sind wieder 7 gerade Linien, nämlich die die drei Linien in $X=0$ und die vier in den Ebenen
$$X=\pm\, Y,$$
reell sind ferner die nämlichen 5 Dreiecksebenen, wie unter A.

C. $k < \frac{1}{16}\cdot$ Reell sind 15 gerade Linien, nämlich die drei in $X=0$, die vier in $X=\pm\, Y$, sowie 8 Gerade der in § 16. erwähnten Doppelsechs. Reell sind ferner 15 Ebenen, und zwar:
$$\begin{gathered} X=0, \\ X=\pm\, Y, \\ X=\pm\, lZ, \\ X=\pm\, l W, \\ X+l\varrho^{\pm 1} X \pm l(Z+W)=0, \\ X-l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z-W)=0. \end{gathered}$$

Man erkennt somit, dass sämmtliche von Schläfli gefundenen 5 Arten von Flächen 3. Grades auch unter den betrachteten speciellen Flächen vertreten sind. Es haben sich ergeben die Art:

I. (27 Gerade und 45 Ebenen reell) in I. A.
II. (15 Gerade und 15 Ebenen reell) in III. C.
III. (7 Gerade und 5 Ebenen reell) in II. B., III. A. und B.
IV. (3 Gerade und 13 Ebenen reell) in I. B. und II. A.
V. (3 Gerade und 7 Ebenen reell) in I. C. und II. C.

19. Wir haben bereits früher (§ 11.) dargethan, dass jede Ebene, welche aus einer Fläche dritten Grades drei sich in einem Punkte treffende gerade Linien ausschneidet, ihre Hesse'sche Fläche längs einer Pentaederkante berührt und in zwei geraden Linien durchschneidet. Auf der Hesse'schen Fläche, welche zu der in den letzten § betrachteten Fläche gehört, liegen daher ausser den 10 Pentaederkanten noch 12 gerade Linien, die sich zu je zweien in einer Pentaederecke durchschneiden. Damit man diese Linien bequem untersuchen könne, ist es zweckmässig, auch in die Gleichung der Hesse'schen Fläche
$$k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1$$

die neuen Coordinaten X, Y, Z, W einzuführen. Geschieht dies, oder bestimmt man die Gleichung der Hesse'schen Fläche direct aus der Gleichung der Fläche dritten Grades, so erhält man:

$$(1-16k)X[X^3-X(Y^2+Z^2+W^2)+2WYZ]+Y^4+Z^4+W^4$$
$$-2(Y^2Z^2+Z^2W^2+W^2Y^2)-X^2(Y^2+Z^2+W^2)+6XYZW=0.$$

Wird nun in dieser Gleichung

$$X=Y$$

gesetzt, so geht hervor:

$$-(1-16k)Y^2(Z-W)^2+(Z^2-W^2)^2-3Y^2(Z-W)^2=0.$$

Diese Gleichung, welche durch $(Z-W)^2$ theilbar ist, zeigt, dass die durch $X=Y$ dargestellte Ebene die Hesse'sche Fläche längs der geraden Linie

$$X=Y,\quad Z=W$$

berührt und überdies in der Curve

$$(16k-4)Y^2+(Z+W)^2=0,$$

d. i. in zwei geraden Linien durchschneidet, deren Gleichungen getrennt

$$fY\sqrt{-3}+Z+W=0,$$
$$fY\sqrt{-3}-Z-W=0$$

sind. Die Gleichungen der 12 geraden Linien, welche hiernach auf der Fläche ausser den Pentaederkanten liegen, sind auf eine der folgenden Formen zu bringen:

$$X=P,\qquad \pm fP\sqrt{-3}+Q+R=0;$$
$$X=-P,\quad \pm fP\sqrt{-3}+Q-R=0,$$

wo P, Q, R die aus § 17. bekannte Bedeutung haben.

Jede dieser 12 Geraden durchschneidet fünf andere, ohne dass sich deshalb dieselben zu einer Art Doppelsechs zusammenstellen lassen. Sie geben Veranlassung zu sechs Ebenen, den bereits betrachteten

$$X=\pm P,$$

in denen je zwei, und zu acht Ebenen, in denen je drei dieser Linien liegen.

Die Gleichungen dieser letzteren Ebenen können auf die eine oder die andere der beiden folgenden Formen gebracht werden:

$$(1\pm fi\sqrt{3})X+P+Q-R=0,$$
$$(1\pm fi\sqrt{3})X-Y-Z-W=0.$$

Bemerkenswerth ist, dass bei einem reellen Pentaeder die 12 geraden Linien der Hesse'schen Fläche imaginär sind, sobald die in den mehrfach erwähnten sechs Ebenen liegenden geraden Linien der Fläche dritten Grades reell sind und umgekehrt. Die fraglichen 12 geraden Linien der Fläche

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3-k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=0$$

fallen mit den 12 Geraden der Hesse'schen Fläche

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{(k-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}=0$$

zusammen, denn f ist für die erste Fläche genau dasselbe, was $fi\sqrt{3}$ für die zweite Fläche ist. Beide Flächen durchschneiden sich daher in 12 geraden Linien.

20. Jede gerade Linie, welche auf einer Fläche n^{ten} Grades liegt, berührt die Hesse'sche Fläche in sämmtlichen Punkten, welche sie mit derselben gemeinschaftlich hat, also in $2(n-2)$ Punkten. Für die Fläche dritten Grades sind die sich auf diese Weise ergebenden 54 Punkte von Steiner mit dem Namen „*Asymptotenpunkte*“ bezeichnet worden.

Die Bestimmung dieser Punkte ist eine sehr einfache für diejenigen geraden Linien, welche in einer Diagonalebene des Pentaeders liegen. Jede dieser Linien geht durch eine Ecke des Pentaeders und schneidet die gegenüberliegende Kante desselben; es sind daher, da die Kanten und Ecken des Pentaeders der Hesse'schen Fläche angehören, jene Ecke und jener Schnittpunkt die Asymptotenpunkte der betreffenden geraden Linie.

Für die übrigen 12 geraden Linien der Fläche wird am zweckmässigsten die Rechnung benutzt. Substituirt man z. B. in die Gleichung der Hesse'schen Fläche

$$X=lY,\quad Z=\varrho W$$

und reducirt hinreichend, indem man besonders die Identität

$$l^2(1-16k)=-3$$

benutzt, so erhält man schliesslich

$$(lY^2-\varrho W^2)^2=0,$$

so dass für die beiden Asymptotenpunkte jener geraden Linie

$$Y\sqrt{l}\pm W\sqrt{\varrho}=0$$

ist. Genau dieselbe Bestimmungsgleichung würde man für die beiden Asymptotenpunkte der Linie

$$X=-lY,\quad Z=-\varrho W$$

erhalten.

Die Coordinaten für die beiden Asymptotenpunkte der zuerst betrachteten geraden Linie sind hiernach gegeben durch die beiden Proportionen:

$$X:Y:Z:W=1:l^{-1}:\quad l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{1}{2}}:\quad l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{-\frac{1}{2}},$$
$$X:Y:Z:W=1:l^{-1}:-l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{1}{2}}:-l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{-\frac{1}{2}}.$$

Geht man von den neuen Coordinaten zu den alten α, β, γ, δ über, so findet man für den ersten Asymptotenpunkt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \frac{\left(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)\left(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{1}{2}}\right)}{4} : \frac{\left(l^{-\frac{1}{2}}-\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)\left(l^{-\frac{1}{2}}-\varrho^{\frac{1}{2}}\right)}{4}$$

$$: \frac{\left(\varrho^{-\frac{1}{2}}-l^{-\frac{1}{2}}\right)\left(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{1}{2}}\right)}{4} : \frac{\left(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\varrho^{\frac{1}{2}}-l^{-\frac{1}{2}}\right)}{4}.$$

Für den anderen Asymptotenpunkt ergeben sich die nämlichen Werthe, nur dass $l^{\frac{1}{2}}$ darin negativ zu setzen ist. Bemerkenswerth ist, dass das Product aus je zwei gleichbenannten Coordinaten der beiden Asymptotenpunkte einer und derselben geraden Linie constant ist und zwar gleich k. Die vier oben gefundenen Werthe α, β, γ, δ kann man als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung auffassen. Bildet man diese Gleichung wirklich, so erhält man das einfache Resultat:

$$x^4 - x^3 + \frac{2k+1}{3} x^2 - kx + k^2 = 0,$$

also eine Gleichung, welche sich als eine reciproke Gleichung allgemeinerer Art auffassen lässt. Das besonders Eigenthümliche an dieser Gleichung ist aber, dass diese Gleichung weder l noch ϱ enthält und dass sie sich also ebenfalls ergeben würde, wenn man die Coordinaten irgend eines andern Asymptotenpunktes als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung auffassen wollte. Die 24 Asymptotenpunkte, um deren Bestimmung es sich handelte, sind danach gegeben durch

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = p : q : r : s,$$

worin p, q, r und s die vier Wurzeln der oben aufgestellten biquadratischen Gleichung in beliebiger Aufeinanderfolge bedeuten.

Zu jeder Wurzel giebt es eine andere, welche mit ihr multiplicirt das Product k giebt; der Punkt

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = kp^{-1} : kq^{-1} : kr^{-1} : ks^{-1}$$

liefert mit dem durch die vorhergehende Proportion bestimmten Punkt verbunden eine gerade Linie der Fläche.

Für $k = 1$, d. i. für die zuerst von Clebsch untersuchte Diagonalfläche, wird die biquadratische Gleichung:

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

und die Grössen p, q, r, s werden fünfte Wurzeln der Einheit. Wir kommen auf diesen Fall später ausführlicher zurück.

Für die allgemeinere Fläche liegen, da für jeden der 24 Asymptotenpunkte

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{2k+1}{3},$$

diese Punkte sämmtlich auf der Fläche zweiten Grades:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\frac{4k-1}{3}\varepsilon^2=0$$

oder

$$4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+f^2\varepsilon^2=0,$$

wo f die frühere Bedeutung hat.

Ebenso liegen dieselben auf der Fläche dritten Grades

$$\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta+\alpha\beta\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3,$$

welche nach § 14. von derselben Art ist wie die ursprüngliche Fläche.

21. Zwei Flächen der von uns betrachteten Art wollen wir *conjugirt* nennen, wenn die Ebenen α, β, γ, δ der einen bei der andern durch die Ebenen

$$-\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \text{ u. s. w.}$$

ersetzt, die Coefficienten k aber für beide Flächen gleich sind. Es ist somit die zu

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3-k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=0$$

conjugirte Fläche bestimmt durch

$$(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3+(\alpha-\beta+\gamma+\delta)^3+(\alpha+\beta-\gamma+\delta)^3+(\alpha+\beta+\gamma-\delta)^3$$
$$=8k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3.$$

Durch Einführung der Coordinaten X, Y, Z, W gehen diese Gleichungen über in

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)+6\,YZW=0$$

und

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)-6\,YZW=0.$$

Man erkennt somit, da beide Gleichungen nur in dem Vorzeichen des letzten Gliedes verschieden sind, dass die Durchschnittslinie beider Flächen in den drei Ebenen

$$Y=0,\quad Z=0,\quad W=0$$

liegen muss. Jede dieser drei Ebenen schneidet aber eine jede der beiden Flächen in einer geraden Linie und in einem Kegelschnitt; der gegenseitige Durchschnitt der beiden conjugirten Flächen besteht hiernach aus drei geraden Linien, welche in der Ebene

$$X=0$$

liegen und ein Dreieck bilden, und aus drei Kegelschnitten, welche auf der Fläche zweiten Grades

$$X^2(1-16k)+3(Y^2+Z^2+W^2)=0$$

oder

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\frac{8k+1}{6}\varepsilon^2=0$$

liegen. Die sechs Ebenen, deren jede aus der Fläche dritten Grades drei sich in einem Punkte treffende gerade Linien schneidet, sind für die beiden conjugirten Flächen dieselben.

Auch die Hesse'schen Flächen der beiden conjugirten Flächen sind nur wenig in ihren Gleichungen verschieden, indem diese nur in dem Vorzeichen des Gliedes $XYZW$ differiren. Beide Gleichungen sind nämlich

$$(1-16k)X[X^3-X(Y^2+Z^2+W^2)\pm 2YZW]+Y^4+Z^4+W^4$$
$$-2(Y^2Z^2+Z^2W^2+W^2Y^2)-X^2(Y^2+Z^2+W^2)\pm 6XYZW=0.$$

Sonach liegt der gesammte Durchschnitt der beiden Hesse'schen Flächen in den vier Ebenen

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad W=0.$$

Der in der ersteren Ebene liegende Theil besteht aus den vier geraden Linien

$$Y\pm Z\pm W=0,$$

welche nichts Anderes sind, als die Seiten des auf der Ebene $X=0$ durch die vier Ebenen α, β, γ, δ ausgeschnittenen vollständigen Vierseits. Die in den übrigen drei Ebenen Y, Z und W enthaltenen Theile der Durchschnittslinie sind Curven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten. Für den speciellen Fall

$$k=\frac{1}{4}$$

werden die Gleichungen der beiden Hesse'schen Flächen vollständig identisch, da hier der Coefficient von $XYZW$ verschwindet; *die beiden conjugirten Flächen besitzen somit dieselbe Hesse'sche Fläche.*

22. Clebsch hat im 65. Bande von Crelle's Journal von der Grassmann'schen Erzeugungsweise der Flächen dritten Grades ausgehend analytisch gezeigt, wie eine solche Fläche eindeutig auf eine Ebene abgebildet werden kann, d. h. so, dass jedem Punkte der Fläche ein einziger Punkt der Ebene und umgekehrt entspricht. Später hat er im 5. Bande der mathematischen Annalen rein geometrische Mittel für die Ausführung dieser Abbildung gegeben.

Sind nämlich A und B zwei gerade Linien auf der Fläche dritten Grades, welche sich nicht treffen, und ist C eine gerade Linie der Fläche, welche A und B durchschneidet, so geschieht die Abbildung auf eine beliebige Ebene, welche durch C geht und die projicirende Linie irgend eines Punktes der Fläche ist die Gerade, welche durch diesen Punkt geht und A und B durchschneidet. — Ausser der Linie C giebt es noch vier gerade Linien, welche sowohl A als auch B durchschneiden; für jeden Punkt einer derartigen Linie ist diese selbst die projicirende Gerade, so dass sich diese vier geraden Linien als Punkte abbilden. Ferner bilden sich auch diejenigen zwei Linien als Punkte ab, welche mit A und C, resp. mit B und C ein Dreieck bilden, und zwar liegen die Bilder da, wo resp. B und A der Bildebene begegnen.

Die vier geraden Linien, welche weder A noch B durschneiden, bilden sich als Kegelschnitte ab, da für sie der geometrische Ort der projicirenden Linien ein Hyperboloid ist. Auch die zwei Linien A und B bilden sich als Kegelschnitte ab, da z. B. die geraden Linien, welche die Fläche dritten Grades in einem Punkte von A berühren und zugleich die Linie B durchschneiden, ein Hyperboloid bilden. Die 12 Geraden nun, welche sich in Punkten und Kegelschnitten abbilden, lassen sich stets zu einer Doppelsechs gruppiren, so dass die sich in Punkten abbildenden die eine Hälfte, die übrigen die andere Hälfte derselben ausmachen. Daraus geht ohne Weiteres hervor, dass jeder Kegelschnitt fünf der Fundamentalpunkte enthält, da ja jede Gerade der einen Sechs 5 Gerade der anderen Sechs durchschneidet. Die übrigen 15 geraden Linien der Fläche bilden sich als gerade Linien ab, deren jede zwei der 6 Fundamentalpunkte verbindet.

Wählt man nun für die Abbildung der in den letzten § betrachteten speciellen Fläche dritten Grades die beiden Geraden A und B aus derselben Hälfte der schon mehrfach erwähnten Doppelsechs, so ergeben sich sechs Fundamentalpunkte, welche die specielle Eigenschaft besitzen, dass sechsmal je drei ihrer Verbindungslinien sich in einem Punkte schneiden, *dass sie also sechsmal in verschiedener Reihenfolge zu einem Brianchon'schen Sechseck angeordnet werden können.*

Legt man bei der Abbildung eine andere Doppelsechs zu Grunde, so bekommen die Fundamentalpunkte eine vollständig andere Lage zu einander; es werden sich dann weniger als sechsmal drei gerade Verbindungslinien derselben in einem Punkte schneiden, dafür wird einigemal ein Kegelschnitt, welcher durch 5 Fundamentalpunkte geht, durch eine Gerade berührt, welche einen dieser Punkte mit dem sechsten Fundamentalpunkt verbindet.

23. Wir wenden uns nun der Untersuchung einiger speciellen Flächen zu und betrachten zunächst *die Fläche dritten Grades mit einem Knotenpunkte, auf welcher sich sechsmal drei unäre* (nicht durch den Knotenpunkt gehende) *gerade Linien in einem Punkte treffen.* (Vergl. § 7. und 14.) Dieselbe entspricht dem speciellen Werthe $k = \frac{1}{16}$ und hat somit die Gleichung

$$16(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3) - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 = 0,$$

oder, wenn die Coordinaten X, Y, Z, W eingeführt werden:

$$X(Y^2+Z^2+W^2) + 2\,YZW = 0.$$

Bemerkenswerth ist die Fläche zunächst wegen eines einfachen Zusammenhanges mit der *Steiner'schen Fläche.* In einem Aufsatze, welcher zuerst im Programme der Realschule zu Reichenbach 1869 und später im Auszuge im 5. Bande der mathematischen Annalen veröffentlicht worden ist, habe ich für räumliche Gebilde diejenige Transformation untersucht, welche man erhält, wenn man in der homogenen Gleichung eines Gebildes die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Es ist dies, beiläufig bemerkt, dieselbe Transformation, welche Cayley als *Inversion der Coordinaten* bezeichnet und in einem Aufsatze, welcher der neuesten Auflage von Salmon's analytischer Geometrie der höheren ebenen Curven einverleibt worden ist, mit besonderem Erfolge bei der Untersuchung der Curven vierten Grades mit drei Doppelpunkten verwendet hat. Wird diese Transformation in der obigen Gleichung vorgenommen, so erhält man

$$Y^2Z^2 + Z^2W^2 + W^2Y^2 + 2XYZW = 0,$$

also die Gleichung einer Steiner'schen Fläche, welche die Schnittlinien der drei Ebenen Y, Z und W als Doppellinien besitzt. Aus der bekannten Eigenthümlichkeit dieser Fläche, durch jede Tangentialebene in zwei Kegelschnitten getroffen zu werden, lässt sich ohne Schwierigkeit auch eine Eigenschaft unsrer Fläche dritten Grades ableiten, die allerdings nicht ihr allein zukommt.

Bei Anwendung der oben angegebenen Transformation entspricht im Allgemeinen einer beliebigen Ebene eine Fläche dritten Grades, welche die vier Fundamentalpunkte zu Knotenpunkten hat. Einem beliebig im Raume liegenden Kegelschnitt entspricht im Allgemeinen eine Curve sechsten Grades, welche in den vier Fundamentalpunkten Doppelpunkte besitzt. Sobald aber der Kegelschnitt eine Kante des Fundamentaltetraeders schneidet, so erniedrigt sich der Grad der entsprechenden Curve um 1, während die beiden Endpunkte derjenigen Kante, welche der getroffenen gegenüber liegt, nur einfache Punkte der Curve sind. Wenn daher der Kegelschnitt drei in einem Punkte zusammenstossende Kanten des Tetraeders trifft, so entspricht ihm eine Curve dritten Grades, welche jenen Punkt zum Doppelpunkt haben und daher eben sein muss. Da nun die zwei Kegelschnitte, in welchen die Steiner'sche Fläche durch eine Tangentialebene geschnitten wird, die drei Doppelgeraden der Fläche schneiden, so ergiebt sich aus vorstehenden Betrachtungen der Satz:

Jede Fläche dritten Grades, welche die vier Ecken des Tetraeders X, Y, Z, W zu Knotenpunkten hat und dabei unsere Fläche berührt, durchschneidet dieselbe zugleich in zwei ebenen Curven dritten Grades mit einem Doppelpunkte (und in drei geraden Linien). *Vier derartige Flächen giebt es, welche unsere Fläche längs einer Curve dritten Grades berühren.*

Diese Eigenschaft gilt, wie bereits oben gesagt, auch für eine allgemeinere Classe von Flächen dritten Grades, nämlich für diejenigen, deren Gleichung sich auf die Form bringen lässt:

$$XK + YZW = 0,$$

wo $K = 0$ die Gleichung eines Kegels zweiten Grades ist, welcher die Ecke $Y = 0$, $Z = 0$, $W = 0$ zum Scheitel hat. Diese Classe aber umfasst alle Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte, da die Gleichung einer derartigen Fläche sich sofort auf die obige Form bringen lässt, sobald man nur zur Ebene X eine Dreiecksebene wählt, welche allein unäre Gerade enthält, und zu den Ebenen Y, Z, W diejenigen Ebenen, welche diese drei Linien mit dem Knotenpunkte verbinden.

Da es 15 Dreiecksebenen giebt, welche nur unäre Gerade enthalten, so giebt es auch 15 Schaaren von Flächen dritten Grades mit vier Knotenpunkten, welche die oben erwähnte Eigenschaft besitzen.

24. Die sechs Geraden der einen Hälfte der in § 16. erwähnten Doppelsechs fallen mit den sechs Geraden der andern Hälfte zusammen und gehen sämmtlich durch den Knotenpunkt, welcher durch

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

bestimmt ist. Es sind dies die sogenannten *binären geraden Linien* der Fläche, und jede von ihnen vertritt die Stelle von zwei Geraden. Sie liegen zu je zweien in den drei Ebenen Y, Z, W vertheilt und haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y &= 0, \quad Z \pm Wi = 0, \\ Z &= 0, \quad Y \pm Wi = 0, \\ W &= 0, \quad Y \pm Zi = 0, \end{aligned}$$

wo

$$i = \sqrt{-1}.$$

Die 15 übrigen geraden Linien der Fläche sind diejenigen, in welchen die 15 durch je zwei binäre Gerade zu legenden Ebenen der Fläche weiter begegnen. Drei davon sind die Linien in $X = 0$; die Gleichungen der übrigen 12 lassen sich sämmtlich auf die Form bringen:

$$p + q = 0, \quad i(r+s) + 2(r-s) = 0,$$

wo p, q, r, s die vier Coordinaten α, β, γ, δ in beliebiger Reihenfolge bedeuten. Bei Entscheidung der Frage nach der Realität der 21 auf der Fläche liegenden geraden Linien hat man dieselben drei Fälle zu unterscheiden, wie bei der allgemeinen Fläche.

1) Die vier Ebenen α, β, γ, δ, also auch die Ebenen X, Y, Z, W sind reell. Dann können nur drei unäre Gerade reell sein, nämlich diejenigen in der Ebene $X = 0$. Der Knoten ist also isolirt und sein Tangentialkegel ist imaginär. Die Fläche enthält 10 reelle Dreiecksebenen, von denen drei, weil in ihnen zwei binäre Gerade liegen, doppelt zu zählen sind; sie ist daher ein besonderer Fall der Flächen mit drei reellen geraden Linien und 13 reellen Dreiecksebenen.

2) Sind α und β conjugirt imaginär, also

$$\alpha = \varphi + \psi i = 0,$$
$$\beta = \varphi - \psi i = 0,$$

so sind X und Y reell, Z und W dagegen conjugirt imaginär:

$$Z = L + Mi = 0,$$
$$W = L - Mi = 0,$$

Von den binären Geraden sind die in $Y = 0$ liegenden reell, da

$$Z \pm Wi = (L \pm M)(1 + i).$$

Reell sind ferner die unären Geraden

$$X = 0, \quad Y = 0;$$
$$\gamma + \delta = 0, \quad i(\alpha + \beta) \pm 2(\alpha - \beta) = 0.$$

Die Fläche ist daher ein specieller Fall der Flächen mit 7 reellen geraden Linien. Der Knoten ist reell, ebenso sein Tangentialkegel.

3) Sind α und β, sowie γ und δ conjugirt imaginär, so sind X und Y reell und Z und W ebenfalls, die Gleichungen der letzteren aber mit einem rein imaginären Factor multiplicirt, also

$$Z = Li = 0, \quad W = Mi = 0.$$

Auf der Fläche

$$X(Y^2 - L^2 - M^2) - 2LMY = 0$$

sind dann vier binäre Gerade reell, nämlich die in $L = 0$ und $M = 0$ liegenden, reell sind ferner die drei unären Geraden in $X = 0$ und die vier Geraden in den Ebenen

$$\alpha + \beta = 0$$

und

$$\gamma + \delta = 0.$$

Die Fläche gehört danach zu denen mit 15 reellen geraden Linien; ihr Knoten ist reell, wie derjenige im vorigen Falle.

25. Die eindeutige Abbildung auf eine Ebene geschieht bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte bekanntlich durch Centralprojection vom Knotenpunkte aus. Alsdann entsprechen den sechs binären Geraden der Fläche sechs Punkte der Ebene, die in einem Kegelschnitt liegen. Dieser ist die Spur des im Knotenpunkte an die Fläche gelegten Tangentialkegels und kann somit als *Bild* des Knotenpunktes selbst angesehen werden. Die 15 unären Geraden bilden sich ab als die Verbindungslinien der Fundamentalpunkte.

Für unsere specielle Fläche dritten Grades schneiden sich diese Verbindungslinien sechsmal zu je dreien in einem Punkte, und es geht daher der bemerkenswerthe Satz hervor: *In jedem Kegelschnitte kann man sechs Punkte so wählen, dass sich dieselben sechsmal zu einem*

Brianchon'schen Sechseck verbinden lassen. Auf welche Weise sechs derartige Punkte zu finden sind, ergiebt sich sehr leicht durch folgende Betrachtung:

Die Spuren der drei Ebenen Y, Z und W auf der Bildebene durchschneiden den Kegelschnitt in den sechs Fundamentalpunkten. Nun ist aber das von jenen Ebenen gebildete Trieder in Bezug auf den Tangentialkegel des Knotenpunktes, da dessen Gleichung

$$Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$$

ist, sich selbst conjugirt; folglich besitzt die nämliche Eigenschaft auch das von den Spuren jener Ebenen gebildete Dreieck in Bezug auf den erwähnten Kegelschnitt. *Um daher sechs Punkte in gedachter Lage zu erhalten, durchschneide man den Kegelschnitt durch die Seiten eines in Bezug auf denselben sich selbst conjugirten Dreiecks; die sechs Durchschnittspunkte besitzen die fragliche Eigenschaft.* Freilich ist hierbei zu bemerken, dass niemals sämmtliche sechs Punkte, sondern höchstens vier derselben reell sein können.

Die Fläche

$$X(Y^2+Z^2+W^2) - 2\,YZW = 0,$$

welche wir in § 21. die conjugirte Fläche zu

$$X(Y^2+Z^2+W^2) + 2\,YZW = 0$$

genannt haben, hat mit der letzteren die sechs binären Geraden, sowie die drei Linien in der Ebene $X = 0$ gemeinschaftlich; die geraden Linien beider Flächen werden sich daher als dieselben Punkte und Linien abbilden.

26. Die Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 = 0,$$

wo

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0,$$

auf welcher sich nach § 4. die 27 Geraden 10mal zu je dreien in einem Punkte schneiden, ist von Clebsch im 4. Bande der mathematischen Annalen näher untersucht und die *Diagonalfläche* des Pentaeders

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

genannt worden. Diese Benennung stützt sich auf die Eigenschaft der betreffenden Fläche, dass in ihr die Diagonalen der sämmtlichen vollständigen Vierecke enthalten sind, die auf den Pentaederebenen durch die übrigen ausgeschnitten werden. Denn die Gleichung der Fläche und die zwischen den 5 Coordinaten bestehende Relation werden, da die Summe zweier Cuben stets durch die Summe der Basen theilbar ist, z. B. erfüllt, wenn:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \delta + \varepsilon = 0.$$

Diese drei Gleichungen, von denen die eine eine Folge der beiden andern ist, stellen aber eine gerade Linie dar, welche den Punkt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

mit dem andern:

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

verbindet, also eine Diagonale einer Seitenfläche des Pentaeders. In gleicher Weise liegen auf der Fläche die gleichfalls in der Ebene $\alpha = 0$ befindlichen geraden Linien:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \delta = 0, \quad \gamma + \varepsilon = 0,$$
$$\alpha = 0, \quad \beta + \varepsilon = 0, \quad \gamma + \delta = 0.$$

Ausser der Fläche, deren Gleichung oben angegeben ist, geht durch die 15 Diagonalen der Seitenflächen des Pentaeders keine weitere Fläche dritten Grades, da diese sonst mit jener 15 gerade Linien gemeinsam haben müsste, was unmöglich ist; die Diagonalfläche ist daher durch das Pentaeder vollständig bestimmt.

Bemerkt mag werden, dass man die Gleichung der nämlichen Fläche auch noch in folgender Form schreiben kann:

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon = 0.$$

Ausser den 15 Diagonalen enthält die Fläche noch 12 weitere gerade Linien, welche eine Doppelsechs bilden. Die Gleichungen derselben können aus § 16. direct entnommen werden, wenn man noch folgende Werthe der dort vorkommenden Constanten berücksichtigt:

$$f = 2, \quad l = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varrho = 2 - \sqrt{5}.$$

Man wird dann z. B. durch geeignete Combination der zwei Gleichungen:

$$X = l\,Y, \quad Z = \varrho\,W$$

finden, dass die hierdurch dargestellte gerade Linie der Durchschnitt der 5 Ebenen ist:

$$\omega\,(\gamma + \varepsilon) + \alpha = 0,$$
$$\omega\,(\delta + \varepsilon) + \beta = 0,$$
$$\omega\,(\alpha + \delta) + \gamma = 0,$$
$$\omega\,(\beta + \gamma) + \delta = 0,$$
$$\omega\,(\alpha + \beta) + \varepsilon = 0,$$

wobei

$$\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Clebsch hat diese 12 geraden Linien auf folgende sehr einfache Weise gefunden, indem er zuerst ihre Asymptotenpunkte bestimmte.

Die 3 Gleichungen:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\,\varepsilon=0\,,$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3=0\,,$$
$$\beta\gamma\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon\alpha+\delta\varepsilon\alpha\beta+\varepsilon\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\delta=0\,,$$

von denen die erste die zwischen den Coordinaten bestehende Relation, die zweite die Gleichung der Diagonalfläche, die dritte die Gleichung ihrer Hesse'sche Fläche darstellt, werden sämmtlich erfüllt, sobald man für die 5 Coordinaten die verschiedenen fünften Wurzeln der Einheit setzt, also:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=q_1:q_2:q_3:q_4:q_5\,,$$

wobei die Grössen q eben diese Wurzeln in beliebiger Reihenfolge sind. Da dann auch die Grössen $\frac{1}{q}$ sämmtliche fünfte Wurzel der Einheit darstellen, so folgt, dass auch der Punkt:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=q_1^{-1}:q_2^{-1}:q_3^{-1}:q_4^{-1}:q_5^{-1}$$

auf der Diagonalfläche und der Hesse'schen Fläche liegt. Die Verbindungslinie der beiden durch diese Proportionen dargestellten Punkte gehört dann aber auch ganz der Diagonalfläche an, denn die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Verbindungslinie sind, wenn k und l beliebige Constanten bedeuten, bestimmt durch:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=kq_1+lq_1^{-1}:kq_2+lq_2^{-1}:\cdots\cdots$$

und der Gleichung der Diagonalfläche wird genügt, sobald in derselben diese Werthe eingeführt werden, da:

$$\Sigma\left(kq_n+lq_n^{-1}\right)^3=(k^3+l^3)\,\Sigma q_n^{\,3}+3kl\,(k+l)\,\Sigma q_n=0\,.$$

Es giebt nun 24 verschiedene Punkte, deren Coordinaten sich wie die fünften Wurzeln der Einheit verhalten, also giebt es 12 gerade Linien der eben gefundenen Art und jene 24 Punkte sind, da sie zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, ihre Asymptotenpunkte.

27. Die Dreiecksebenen der Fläche zerfallen in zwei Gruppen. Die eine umfasst die 5 Pentaederebenen und die 10 Diagonalebenen und enthält daher nur solche Ebenen, in welchen nur Diagonalen liegen; die andere dagegen besteht aus 30 Ebenen, deren jede eine Diagonale und zwei der eben bestimmten 12 Linien enthält. Die Gleichungen der letzteren sind von der Form:

$$w\,(p+q)+r=0\,,$$

wo p, q, r drei der Coordinaten α, β u. s. w. sind und:

$$w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Man könnte sie auch auf die Form bringen:

$$w_1(p+q) - r = 0,$$

wobei aber

$$w_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Je zwei dieser Ebenen gehen durch dieselbe Diagonale; und zwar stellen die beiden aufgestellten Gleichungen zwei derartige Ebenen dar, wenn in beiden für p, q und r dieselben Coordinaten eingeführt werden.

Die Anzahl der reellen geraden Linien auf der Diagonalfläche kann direct aus § 18. abgelesen werden, da hier offenbar die dortige Constante:

$$k > \frac{1}{4}$$

ist. Es ergiebt sich daraus: *Sind sämmtliche Pentaederebenen reell, so sind auch sämmtliche* 27 *geraden Linien reell; sind drei Pentaederebenen reell und die übrigen conjugirt imaginär, so hat die Fläche* 3 *reelle gerade Linien und* 13 *reelle Dreiecksebenen; ist endlich nur eine Ebene des Pentaeders reell, während die andern paarweise conjugirt imaginär sind, so hat die Fläche* 7 *reelle gerade Linien.*

Legt man bei der Abbildung der Fläche die mehrerwähnte Doppelsechs zu Grunde, so erhält man, mag man von der einen oder der andern Hälfte derselben ausgehen, die sechs Fundamentalpunkte in der Lage, *dass sie sich* 10*mal zu einem Brianchon'schen Sechseck verbinden lassen.* Die Existenz derartiger, auch vollständig reeller Sechsecke ist durch die Existenz der Diagonalfläche bedingt; Clebsch hat in der bereits citirten Arbeit gezeigt, dass sämmtliche Sechsecke dieser Art aus einander durch Centralprojection abgeleitet werden können.

28. Wir wenden uns endlich zu der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

auf welcher nach § 6. sich 18mal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Die 27 geraden Linien dieser Fläche ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung derselben; sie lassen sich in drei Gruppen zusammenstellen und zwar so, dass die 9 Geraden jeder Gruppe die gegenseitigen Durchschnittslinien zweier Büschel von je drei Ebenen sind, nämlich:

$$\alpha^3 + \beta^3 = 0, \quad \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$
$$\alpha^3 + \gamma^3 = 0, \quad \beta^3 + \delta^3 = 0,$$
$$\alpha^3 + \delta^3 = 0, \quad \beta^3 + \gamma^3 = 0.$$

Die Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

kann natürlich auch hier als die fünfte Pentaederebene angesehen werden; da aber die Gleichung der Fläche sich nicht ändert, wenn α mit

$\alpha\mu'$, β mit $\beta\mu''$ u. s. w. vertauscht wird, wo die Grössen μ dritte Wurzeln der Einheit bedeuten, so sieht man, dass man jene Ebene überhaupt durch eine der Ebenen:

$$\alpha\mu + \beta\mu' + \gamma\mu'' + \delta\mu''' = 0$$

ersetzen kann, wo die Grössen μ beliebige dritte Wurzeln der Einheit sind. Wie nun die Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

drei gerade Linien der Fläche, und zwar:

$$\alpha + \beta = 0\,, \quad \gamma + \delta = 0\,,$$
$$\alpha + \gamma = 0\,, \quad \beta + \delta = 0\,,$$
$$\alpha + \delta = 0\,, \quad \beta + \gamma = 0$$

enthält, so gilt das Gleiche auch für jede dieser Ebenen, deren Gesammtzahl 27 ist. Diese 27 Ebenen bilden mit den 18 anderen, welche zu den sechs oben erwähnten Büscheln gehören, *die* 45 *Dreiecksebenen der Fläche.*

Der Flächengleichung wird ebenfalls genügt, sobald man setzt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = v : v' : v'' : v''',$$

wo zwei der Grössen v dritte Wurzeln der positiven Einheit, die anderen aber solche der negativen Einheit bedeuten. Durch die nämliche Substitution werden aber auch stets die Gleichungen zweier gerader Linien der Fläche identisch, so dass die durch obige Proportionen dargestellten Punkte für unsere Fläche die *Eckpunkte von Liniendreiecken* sind. Es giebt $3^4 = 81$ derartige Punkte; fügt man hierzu die 18 Schnittpunkte von je drei geraden Linien der Fläche, jeden dreifach gerechnet, so erhält man sämmtliche 135 Ecken der auf der Fläche liegenden Dreiecke.

Die Asymptotenpunkte jeder geraden Linie der Fläche liegen offenbar da, wo dieselbe zwei gegenüberstehende Kanten des von den vier Ebenen α, β, γ, δ gebildeten Tetraeders trifft.

29. Die Anzahl der reellen geraden Linien der Fläche ergiebt sich unmittelbar aus § 18. *Die Fläche hat demnach, wenn die vier Ebenen α, β, γ, δ reell oder wenn nur zwei derselben reell und die beiden übrigen conjugirt imaginär sind,* 3 *reelle Gerade und* 7 *reelle Dreiecksebenen, sind aber die vier Ebenen paarweise conjugirt imaginär, so sind* 15 *gerade Linien reell.*

Unter den 27 geraden Linien der Fläche ist im Allgemeinen keine vor den übrigen ausgezeichnet; gleiches gilt von den 36 Doppelsechsen. Es wird daher völlig gleichgiltig sein, welcher Sechs man sich bei der Abbildung bedient. Eine der Doppelsechsen ist die folgende, bei welcher wir entsprechende Gerade neben einander gestellt und mit entsprechenden Ziffern versehen haben und unter μ eine beliebige dritte Wurzel der Einheit verstehen:

1) $\alpha\mu + \delta = 0$,	$\beta\mu + \gamma = 0$.	I) $\alpha + \gamma\mu = 0$,	$\beta + \delta\mu = 0$.
2) $\alpha + \delta\mu = 0$,	$\beta + \gamma\mu = 0$.	II) $\alpha\mu + \gamma = 0$,	$\beta\mu + \delta = 0$.
3) $\alpha\mu + \beta = 0$,	$\gamma\mu + \delta = 0$.	III) $\alpha + \delta\mu = 0$,	$\gamma + \beta\mu = 0$.
4) $\alpha + \beta\mu = 0$,	$\gamma + \delta\mu = 0$.	IV) $\alpha\mu + \delta = 0$,	$\gamma\mu + \beta = 0$.
5) $\alpha\mu + \gamma = 0$,	$\delta\mu + \beta = 0$.	V) $\alpha + \beta\mu = 0$,	$\delta + \gamma\mu = 0$.
6) $\alpha + \gamma\mu = 0$,	$\delta + \beta\mu = 0$.	VI) $\alpha\mu + \beta = 0$,	$\delta\mu + \gamma = 0$.

Wird die erste Hälfte dieser Doppelsechs bei der Abbildung der Fläche zu Grunde gelegt, so bilden sich bekanntlich die Geraden derselben als Punkte, die Geraden der andern Hälfte dagegen als Kegelschnitte ab, welche durch fünf dieser Punkte gehen (I durch 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w.). Die übrigen 15 geraden Linien der Fläche finden dagegen ihre Abbildung in den 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte und zwar in folgender Weise:

12)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma + \delta = 0$.
13)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta\mu + \gamma = 0$.
14)	$\alpha\mu + \delta = 0$,	$\beta\mu + \gamma = 0$.
15)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta + \delta\mu = 0$.
16)	$\alpha + \gamma\mu = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
23)	$\alpha + \delta\mu = 0$,	$\beta + \gamma = 0$.
24)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta + \gamma\mu = 0$.
25)	$\alpha\mu + \gamma = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
26)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta\mu + \delta = 0$.
34)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
35)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma\mu + \delta = 0$.
36)	$\gamma + \delta = 0$,	$\alpha\mu + \beta = 0$.
45)	$\gamma + \delta = 0$,	$\alpha + \beta\mu = 0$.
46)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma + \delta\mu = 0$.
56)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta + \gamma = 0$.

Die 27 geraden Linien der Fläche durchschneiden sich aber 18 mal zu je dreien in einem Punkte und die Lage der 6 Fundamentalpunkte ist dadurch besonderen Bedingungen unterworfen. Untersucht man genauer, so findet man, dass sich 6 mal drei gerade Linien in einem Punkte treffen, welche sich ebenfalls als gerade Linien abbilden, und 12 mal solche Linien, von denen sich die eine als Punkt, die andere als Kegelschnitt und die dritte als gerade Linie abbilden. Im ersteren Falle müssen sich dann selbstverständlich auch die drei Abbildungen in einem Punkte schneiden, während im zweiten Falle die gerade Linie den Kegelschnitt in dem betreffenden Punkte berühren muss. Ohne Schwierigkeit findet man, dass sich in einem Punkte die folgenden neben einander stehenden Linien treffen:

12, 35, 46;
12, 36, 45;
34, 15, 26;
34, 16, 25;
56, 13, 24;
56, 14, 23;

so dass drei Linien zweimal, die übrigen dagegen nur einmal betheiligt sind.

Die übrigen 12 Bedingungen lassen sich in folgende 6 zusammenziehen:

1	ist	der	Pol	von	56	in	Bezug	auf I;
2	„	„	„	„	56	„	„	„ II;
3	„	„	„	„	12	„	„	„ III;
4	„	„	„	„	12	„	„	„ IV;
5	„	„	„	„	34	„	„	„ V;
6	„	„	„	„	34	„	„	„ VI.

Ist die zweite Gruppe von Bedingungen erfüllt, so ist es die erste von selbst, da ausser der vorliegenden keine Fläche dritten Grades existirt, auf welcher sich 12mal drei gerade Linien in einem Punkte treffen.

Auch bei dieser Fläche können nie sämmtliche sechs Fundamentalpunkte zu gleicher Zeit reell sein.

30. Durch die Untersuchungen von Geiser (Math. Annalen Bd. I) ist es möglich geworden, aus den Lehrsätzen über die 27 geraden Linien einer Fläche dritten Grades solche über die 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades abzuleiten. An dem angegebenen Orte ist nämlich folgender Lehrsatz erwiesen worden: *Von einem Punkte einer Fläche dritten Grades geht ein allgemeiner Berührungskegel vierten Grades an dieselbe, dessen 28 Doppeltangentialebenen aus der Berührungsebene der Fläche im Scheitel und aus den 27 Ebenen bestehen, welche diesen mit den 27 geraden Linien der Fläche verbinden.* Indem man diesen Lehrsatz zu Grunde legt, kann man aus den in den vorigen § gefundenen Eigenschaften specieller Flächen dritter Ordnung Lehrsätze über specielle ebene Curven vierten Grades ableiten.

Es sei zunächst die Fläche eine solche, auf welcher sich nur einmal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, also ihre Gleichung

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0;$$

die Lage des Kegelscheitels auf der Fläche sei eine willkürliche, ebenso diejenige der Ebene, durch welche die berührende Kegelfläche durchschnitten wird. *Dann schneiden sich vorerst in der entsprechenden Curve vierten Grades drei Doppeltangenten,* die Bilder jener drei geraden Linien der Fläche, *in einem Punkte a.* Die Ebenen, welche den Kegelscheitel mit diesen drei Linien verbinden, schneiden aus der Fläche dritten Grades drei Kegelschnitte aus, durch welche sich bekanntlich eine Fläche zweiten Grades legen lässt; die sechs Punkte, worin diese Fläche jenen drei geraden Linien begegnet, *bilden sich als die Berührungspunkte der Doppeltangenten ab, welche somit in einem Kegelschnitte A liegen.* Die Curve ist also eine solche, bei welcher drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen, sich in einem Punkte schneiden, und zwar ist sie die allgemeinste Curve dieser Art.

In dem Kegelschnitt A liegen auch noch die zwei Berührungspunkte derjenigen Doppeltangente t, welche aus der Berührungsebene im Kegelscheitel entspringt. Jene Fläche zweiten Grades schneidet nämlich aus der Fläche dritten Grades drei Kegelschnitte aus, welche sich im Kegelscheitel treffen, so dass beide Flächen in diesem eine gemeinsame Berührungsebene besitzen. Diese Ebene durchschneidet die Fläche zweiten Grades in zwei geraden Linien, die für die andere Fläche die Inflexionstangenten im Kegelscheitel darstellen und auf denen die Berührungspunkte der Doppeltangente t liegen. Hieraus geht aber die Richtigkeit obiger Behauptung unmittelbar hervor.

Durch den Punkt a gehen an die Curve noch sechs Tangenten, deren Berührungspunkte ebenfalls in einem Kegelschnitt B liegen. Verbindet man nämlich den Kegelscheitel mit dem Schnittpunkt der drei auf der Fläche liegenden geraden Linien, so durchschneidet die Verbindungslinie die Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

in einem Punkte, von welchem aus sich an die in dieser Ebene und der Fläche liegende Curve dritten Grades sechs Tangenten legen lassen, deren Berührungspunkte in der ersten Polaren jenes Punktes, also in einem Kegelschnitte liegen. Jene 6 durch a gehenden Tangenten und der Kegelschnitt B sind nun nichts Anderes als die Centralprojectionen der eben erwähnten Linien. *Auch der Kegelschnitt B geht durch die Berührungspunkte der Doppeltangente t* nach dem Satze: Wenn von den 16 Schnittpunkten zweier Curven vierter Ordnung 8 auf einem Kegelschnitte liegen, so liegen die 8 übrigen ebenfalls auf einem solchen. Man hat, um diesen Satz anwenden zu können, als zweite Curve vierten Grades nur diejenige zu wählen, welche sich aus den ersten Polaren von a in Bezug auf die erste Curve und aus der Doppeltangente t zusammensetzen lässt.

Die Curve dritten Grades selbst, welche in der Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

liegt, bildet sich wieder als eine solche ab; *die Abbildung C berührt die 6 von a ausgehenden einfachen Tangenten in ihren Berührungspunkten und geht überdies nach* § 9. *und* 10. *durch die Schnittpunkte von* 12 *Paaren von Doppeltangenten.*

31. Wesentlich ändern sich die Resultate des vorigen §, wenn der Kegelscheitel in der Curve dritten Grades liegt, welche die mehrerwähnte Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

mit der Fläche gemeinsam hat. Alsdann geht die Berührungsebene der Fläche im Kegelscheitel auch durch den Schnittpunkt der drei geraden Linien auf der Fläche und *es wird somit durch die Projection a dieses Schnittpunktes noch eine vierte Doppeltangente der Curve gehen. Die Projection jener Curve dritten Grades wird zu einer geraden Linie l, so dass die Berührungspunkte der vier einfachen Tangenten, welche durch a gehen, in gerader Linie liegen.* Daraus ergiebt sich, dass die erste Polare des Punktes a in Bezug auf die Curve vierten Grades eine solche dritten Grades sein muss, welche jene gerade Linie l als Theil enthält und daher in diese und einen Kegelschnitt zerfällt. In dem letzteren liegen dann die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten, *so dass unsere Curve vierten Grades eine solche ist, von welcher sich vier Doppeltangenten, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen, in einem Punkte treffen.* Auch sie ist eine allgemeine Curve dieser Art. *Endlich werden* 12 *Schnittpunkte von je zwei Doppeltangenten der Curve in der geraden Linie l liegen.*

Die Fälle, in welchen der Kegelscheitel auf einer oder mehreren geraden Linien der Fläche liegt und die Curve vierten Grades somit einen oder mehrere Doppelpunkte bekommt, übergehen wir und bemerken nur noch, dass die beiden in den letzten § betrachteten Curven auch aus der allgemeinen Fläche dritten Grades erhalten werden können. Eine Curve der ersten Art geht hervor, wenn man drei gerade Linien der Fläche sucht, unter denen sich zwei schneiden, durch den Schnittpunkt und einen Punkt der dritten Linie eine weitere gerade Linie zieht und den Kegelscheitel in den Punkt legt, den diese Linie fernerhin mit der Fläche gemeinsam hat. Eine Curve der zweiten Art erhält man, wenn man durch eine gerade Linie der Fläche zwei Berührungsebenen an dieselbe führt und den Kegelscheitel dahin legt, wo die Verbindungslinie der zwei Berührungspunkte die Fläche durchschneidet.

32. Auch die in § 5. und 6. untersuchten Flächen dritten Grades liefern interessante Curven dritten Grades.

Ist die Gleichung der Fläche:

$$\delta^3 + K = 0,$$

wo $\delta = 0$ eine Ebene und $K = 0$ einen Kegel dritten Grades darstellt, dessen Scheitel nicht in jener Ebene liegt, so entspricht derselben, wenn der Scheitel des Berührungskegels beliebig auf der Fläche liegt, *eine Curve vierten Grades mit sechs Inflexionstangenten, welche sich in einem Punkte schneiden.* Diese sind die Spuren derjenigen Tangentialebenen, welche durch den Kegelscheitel an den osculirenden Kegel gelegt werden können. Die sechs entsprechenden Inflexionspunkte liegen in einem Kegelschnitte; zugleich geht durch dieselben eine Curve dritten Grades, welche in ihnen von den Inflexionstangenten berührt wird. *In jedem der* 9 *Inflexionspunkte dieser Curve schneiden sich drei Doppeltangenten der Curve vierten Grades.* Der Kegelschnitt, in welchem 6 Inflexionspunkte liegen, geht auch durch die Berührungspunkte der 28ten Doppeltangente. Bemerkenswerth ist noch die Hesse'sche Curve der vorerwähnten Curve dritten Grades; *von jedem Punkte derselben aus kann man nämlich an die Curve vierten Grades* 12 *Tangenten legen, deren Berührungspunkte zu je* 6 *in zwei Kegelschnitten liegen.*

Wenn der Kegelscheitel in einem Punkte der Berührungscurve des Osculationskegels liegt, so hat man vorläufig nur *vier sich in einem Punkte treffende Inflexionstangenten, deren Berührungspunkte aber in gerader Linie liegen. In dieser Linie schneiden sich auch* 27 *Doppeltangenten der Curve neunmal zu je dreien; die* 28te *Doppeltangente geht ebenfalls durch den Schnittpunkt der Inflexionstangenten, sie wird aber,* da ihre beiden Berührungspunkte zusammenfallen, *zu einer dreipunktig berührenden oder undulirenden Geraden; der Undulationspunkt liegt ebenfalls auf der oben gedachten geraden Linie.*

Es sei ferner die Gleichung der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0$$

(vergl. § 6., 28., 29.); die Lage des Kegelscheitels auf der Fläche sei willkürlich. *Alsdann lassen sich die* 24 *Inflexionstangenten der entsprechenden Curve vierten Grades so in vier Gruppen zu je sechs anordnen, dass die sechs Tangenten derselben Gruppe sich in einem Punkte schneiden. Durch die Berührungspunkte derselben Gruppe geht ein Kegelschnitt;* die vier so entstehenden Kegelschnitte schneiden die Curve in denselben zwei Punkten, und zwar in den Berührungspunkten der Doppeltangente, welche aus der Tangentialebene des Kegelscheitels entspringt. *Die übrigen* 27 *Doppeltangenten schneiden sich* 18 *mal zu je dreien in einem Punkte; die* 18 *Schnittpunkte liegen zu je dreien auf den sechs Seiten des vollständigen Vierecks, welches seine Ecken in den Schnittpunkten der Inflexionstangenten hat. Von einem jeden Punkte* *dieser sechs Seiten gehen 12 Tangenten an die Curve, deren Berührungspunkte in zwei Kegelschnitten liegen.*

Ist endlich die Gleichung der Fläche:

$$A\alpha^2\beta + \gamma^3 + \delta^3 = 0$$

(vergl. § 8.), so entspricht dem uniplanaren Knotenpunkte der Fläche ein *dreifacher Punkt* der Curve, dessen drei Tangenten die Centralprojectionen derjenigen Geraden der Fläche sind, welche sich im Knotenpunkte schneiden. Den drei übrigen geraden Linien der Fläche entsprechen *drei Doppeltangenten der Curve, sie sich in einem Punkte treffen und deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitte liegen.*

Die Spur der Tangentialebene, welche im Kegelscheitel an die Fläche gelegt wird, ist die vierte Doppeltangente; ihre Berührungspunkte liegen in dem nämlichen Kegelschnitte. *Endlich hat die Curve sechs Inflexionstangenten, welche sich zweimal zu je dreien in einem Punkte treffen; die Verbindungslinie der Schnittpunkte geht dabei durch den dreifachen Punkt.* Die gedachten Eigenschaften kommen allen Curven vierten Grades mit einem dreifachen Punkte zu, bei welchen sich drei Doppeltangenten in einem Punkte treffen.