Ueber Kronecker's Definition der Gruppe einer Gleichung.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Die Untersuchungen, welche Kronecker*) in § 11 der *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* entwickelt, enthalten eine neue Definition der Gruppe einer Gleichung. Diese „Kronecker'sche Definition" und ihr Zusammenhang mit der Definition von Galois und Jordan bilden den Gegenstand der folgenden Betrachtungen.

Es sei

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören, und deren n Wurzeln $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ von einander verschieden sind.

Mit n *unbestimmten Grössen* $u_1, u_2, \ldots u_n$ bilde man die $n!$-werthige Function

$$V = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \cdots + u_n \xi_n \tag{2}$$

ihre $n!$ verschiedenen Werthe sind die Wurzeln einer Resolvente des Grades $n!$

$$G(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n) = 0 \tag{3}$$

wo G eine ganze Function von V; $u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören.

Sei $g(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$ derjenige *irreductible* Factor von G, welcher die Wurzel

$$V = V_1 = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \cdots + u_n \xi_n$$

besitzt.

$g(V;\ u_1, u_2, \ldots u_n)$ ist ebenfalls eine ganze Function von

$$V;\ u_1, u_2, \ldots u_n,$$

deren Cofficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$ angehören.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92.

Als Function der n unbestimmten Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ betrachtet gehört $g(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ zu einer ganz bestimmten Gruppe Γ von Substitutionen zwischen den Elementen $u_1, u_2, \dots u_n$. Es soll nun gezeigt werden:

Ersetzt man in den Substitutionen von Γ überall den Buchstaben u durch den Buchstaben ξ, so erhält man gerade die Galois'sche Gruppe der Gleichung (1).

Beweis:

a) Die sämmtlichen Wurzeln der irreductibeln Gleichung

$$(4) \qquad g(V; u_1, u_2, \dots u_n) = 0$$

ergeben sich aus einer derselben, z. B.

$$V_1 = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \dots + u_n \xi_n$$

durch Anwendung gewisser Substitutionen

$$(5) \qquad 1, a, b, \dots l$$

zwischen den Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, sodass

$$(6) \qquad g(V) \equiv (V - V_1)(V - V_a)(V - V_b) \dots (V - V_l).$$

Statt dessen kann man aber auch die Wurzeln von (4) *aus* V_1 *ableiten durch Anwendung gewisser Substitutionen*

$$(7) \qquad 1, \alpha, \beta, \dots \lambda$$

zwischen den Elmenten $u_1, u_2, \dots u_n$; denn ist

$$a = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \xi_{i_1} & \xi_{i_2} & \dots & \xi_{i_n} \end{pmatrix},$$

so hat die Substitution

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \dots & u_{i_n} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix},$$

also die inverse derjenigen Substitution die aus a durch Vertauschung der Buchstaben u und ξ hervorgehen würde, dieselbe Wirkung auf V_1 wie a:

$$(8) \qquad V_\alpha = V_a,$$

und bei analoger Bezeichnung:

$$V_\beta = V_b, \dots V_\lambda = V_l;$$

also kann man auch schreiben

$$(9) \qquad g(V) \equiv (V - V_1)(V - V_\alpha)(V - V_\beta) \dots (V - V_\lambda).$$

b) *Die Substitutionen* (7) *bilden eine Gruppe.*

Zum Beweis wende man auf die Function $g(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ irgend eine Substitution σ zwischen den Elementen $u_1, u_2, \dots u_n$ an; so ist die resultirende Function $g_\sigma(V; u_1, u_2, \dots u_n)$ wieder *irreductibel*, Denn wäre g_σ in rationale Factoren zerlegbar, so würde durch Anwendung der inversen Substitution σ^{-1} folgen, dass auch g selbst reductibel wäre, was gegen die Annahme ist. Man beachte, dass für diesen Schluss die *Unbestimmtheit* der Grössen u wesentlich ist.

Ist nun insbesondere σ eine der Substitutionen (7) z. B. $\sigma = \alpha$, so haben die beiden irreductibeln Functionen $g(V)$ und $g_\alpha(V)$ die Wurzel V_α gemeinsam, sie sind also identisch

$$g_\alpha(V) \equiv g(V). \tag{10}$$

Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Substitutionen (7) eine Gruppe bilden, Γ'; und aus der allgemeinen Theorie*) ergiebt sich dann weiter, dass die Gruppe Γ der Function $g(V;\, u_1, u_2, \ldots u_n)$ mit der Gruppe Γ' identisch ist:

$$\Gamma' = \Gamma. \tag{11}$$

c) Mit den Substitutionen (7) bilden gleichzeitig auch die Substitutionen

$$1,\ a^{-1},\ b^{-1}, \ldots l^{-1}, \tag{12}$$

die sich von ihnen nur durch die Bezeichnung unterscheiden, eine Gruppe, G; also auch die inversen Substitutionen (5) und zwar ist die letztere Gruppe mit der Gruppe G identisch.

Die Substitutionen (5) bilden aber nach Jordan's Definition**) die Gruppe der Gleichung (1), und damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Der wesentliche *Unterschied* zwischen der Kronecker'schen und Jordan'schen Definition besteht hiernach in folgendem:

Herr Jordan beweist zunächst, dass das System der Substitutionen (5) die beiden Galois'schen Fundamentaleigenschaften besitzt und zeigt dann mit Hilfe eben dieser Eigenschaften, dass die Substitutionen (5) eine Gruppe bilden. Dagegen gestattet die Einführung der Unbestimmten u einen directen Beweis hierfür ohne Benutzung des Galois'schen Fundamentaltheorems.

Eine weitere Eigenthümlichkeit der Kronecker'schen Definition besteht darin, dass sie eine directe Methode zur practischen Bestimmung der Gruppe einer Gleichung durch rationale Operationen enthält, und zwar wiederum ohne Benutzung des Galois'schen Fundamentaltheorems.

Zum Schluss werfen wir noch einen Blick auf *die übrigen irreductiblen Factoren von* $G(V)$.

Wenn die Substitution σ nicht zur Gruppe Γ gehört, so ist $g_\sigma(V)$ einer der andern irreductibeln Factoren von $G(V)$. Ist daher ν der Index der Gruppe und

*) Z. B. Netto, Substitutionentheorie, § 30.

**) Jordan, Traité des Substitutions Nr. 353, 354; vgl. auch meine Arbeit *On the theory of substitution-groups etc.* Nr. 63, American Journal of Mathematics Vol. 13.

(13) $$\sigma_1 = 1, \; \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$$

ein System von Substitutionen, mittels deren die sämmtlichen $n!$ Substitutionen aus den Substitutionen von Γ durch rechtsseitige Multiplication abgeleitet werden können, so sind

(14) $$g(V), \; g_{\sigma_2}(V), \ldots g_{\sigma_\nu}(V)$$

die sämmtlichen irreductibeln Factoren von $G(V)$. Sie gehören als Functionen der Elemente $u_1, u_2, \ldots u_n$ nach der allgemeinen Theorie beziehungsweise zu den Gruppen

(15) $$\Gamma_1 = \Gamma, \; \Gamma_2 = \sigma_2^{-1}\Gamma\sigma_2, \ldots \Gamma_\nu = \sigma_\nu^{-1}\Gamma\sigma_\nu.$$

Es ist ferner

$$g_\sigma(V) = (V - V_\sigma)(V - V_{\alpha\sigma})(V = V_{\beta\sigma}) \ldots (V - V_{\lambda\sigma}).$$

Nun ist aber bei der oben benutzten Bezeichnungsweise, da

$$(\alpha\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\alpha^{-1},$$

$$V_{\alpha\sigma} = V_{s a}; \quad \text{also}$$

(16) $$g_\sigma(V) = (V - V_s)(V - V_{sa})(V - V_{sb}) \ldots (V - V_{sl}).$$

Die Wurzeln des irreductibeln Factors $g_\sigma(V)$ gehen also aus V_s ebenfalls durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe G hervor.

Freiburg i. Br., im November 1892.