

Ueber die Anwendung einer Formel von Tchebychew zur Entwicklung der Störungsfunction.

Von O. Backlund.

In seiner Abhandlung »Ueber angenäherte Darstellung einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche« giebt Tchebychew folgende Formel:

$$(I) \quad \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{k' \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1}}{x k'^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2mk}{2n+1} + \operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}} \right\}}{l^{2\theta} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1} \right\}}$$

mit der Bedingung:

$$1 \leq x \leq \frac{1}{k'^2}$$

$k' = 1 - k^2$ ist der complementäre Modul der in der Formel auftretenden elliptischen Functionen, n bezeichnet eine ganze Zahl und θ einen echten Bruch, l wird durch die Formel

$$l^4 = 1 - 16 q^{2n+1} \left(\frac{1 + q^{4n+2}}{1 + q^{2n+1}} + \frac{q^{12n+6}}{q^{6n+3}} + \dots \right)^8$$

bestimmt. Die übrigen Bezeichnungen brauchen keine besondere Erklärung.

Tchebychew hat selbst darauf aufmerksam gemacht, dass die angeführte Formel u. a. zur Entwicklung der Störungsfunction angewandt werden kann. In der That führt sie dann auf eine ebenso elegante wie originelle Methode, die gleichzeitig praktische Vorzüge bietet.

In dieser Mittheilung wollen wir uns beschränken, die Anwendung auf die folgende Parthie der Entwicklung der Störungsfunction zu zeigen, nämlich:

$$\sqrt{\frac{1}{a'^2 + a^2 - 2a'a \cos \varphi}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i \cos i \varphi,$$

wo a' und a Constanten sind. Etwas bequemer wird es jedoch sein die Form

$$\sqrt{\frac{1}{1 - x \cos \varphi}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos i \varphi$$

vorzunehmen.

Führen wir in (I)

$$x = \frac{1 - x \cos \varphi}{1 - x}$$

ein und bemerken, dass x sein Minimum, die Einheit, für $\varphi = 2p\pi$ und sein Maximum, $\frac{1+x}{1-x}$, für $\varphi = (2p+1)\pi$ erhält, so wird

$$(II) \quad \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x \cos \varphi}} = \frac{k' \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(1-x) \operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1}}{(1-x \cos \varphi) k'^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2mk}{2n+1} + (1-x) \operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}} \right\}}{l^{2\theta} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1} \right\}}$$

mit der Bedingung:

(a)

$$\frac{1+x}{1-x} \leq \frac{1}{k'^2}$$

Für den praktischen Gebrauch kommt es offenbar darauf an, den möglichst kleinen ganzzahligen Werth von n zu wählen, für welchen man einer gegebenen Aufgabe gemäss $l = 1$ setzen kann. Da der kleinste Werth des Moduls sich aus der Gleichung

$$k^2 = \frac{2x}{1+x}$$

ergiebt, so hängt die Wahl der Zahl n von x ab. In jedem bestimmten Fall aber k durch diese Gleichung abzuleiten und dann mit Hülfe der Formel (II) die verlangte Entwicklung auszuführen, würde wegen der Berechnung der elliptischen Functionen eine grössere Arbeit erfordern als die gewöhnlichen Methoden. In Folge der Bedingung (a) können aber die elliptischen Functionen für eine kleine Anzahl Werthe des Moduls tabulirt werden, wodurch die Anwendung der Formel (II) wesentlich vereinfacht wird. In Bezug auf die Planeten dürfte $n = 3$ und $n = 4$ in den meisten Fällen ausreichen, und höchst selten würde es wohl nöthig sein $n > 5$ zu nehmen.

Es sei

$$A_m = \frac{\operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1}}{\operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}$$

$$B_m^2 = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}{\operatorname{cn}^2 \frac{2mk}{2n+1}}$$

$$M = 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \operatorname{dn} \frac{2mk}{2n+1}$$

$$\alpha^2 = \frac{1-x}{k'^2}$$

Mit Rücksicht hierauf kann die Formel (II) geschrieben werden:

$$(III) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x \cos \varphi}} = \frac{1}{\alpha M} \left\{ 1 + 2 \alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{A_m}{\alpha^2 + B_m^2} \left(1 - \frac{B_m^2 x}{\alpha^2 + B_m^2} \cos \varphi \right)^{-1} \right\}.$$

Wird

$$\frac{B_m x}{\alpha^2 + B_m^2} = \sin \theta_m = \frac{2 \eta_m}{1 + \eta_m^2}$$

gesetzt, so ergibt sich leicht

$$\frac{1}{\sqrt{1-x \cos \varphi}} = \frac{1}{\alpha M} \left\{ 1 + 2 \alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{A_m}{\alpha^2 + B_m^2} \sec \theta_m \eta_m^i \cos i \varphi \right\},$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1-x \cos \varphi}} = \frac{1}{\alpha M} \left\{ 1 + 4 \alpha^2 \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_m}{\alpha^2 + B_m^2} \sec \theta_m \eta_m^i \cos i \varphi \right\},$$

wenn für $i = 0$ das entsprechende Glied durch 2 dividirt wird.

Hiermit ist die verlangte Entwicklung gegeben. Wie man sieht, gestalten sich die Rechenvorschriften höchst einfach, wenn die A_m und B_m tabulirt sind. Für

$$k = 0.95, \quad n = 4; \quad k = 0.92, \quad n = 3$$

geben die folgenden Tafelchen die Werthe von A_m , B_m^2 und M :

	$k = 0.95$			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\log A_m$	0.0768124	0.2940636	0.6812890	1.5937932
$\log B_m^2$	9.5731478	0.3407786	1.0181718	2.0797020
$\log M$	0.7370610			
	$k = 0.92$			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	
$\log A_m$	0.1133668	0.4604148	1.3539094	
$\log B_m^2$	9.7430846	0.6137378	1.7319856	
$\log M$	0.6649936			

Ein Beispiel zur Beleuchtung der auseinandergesetzten Methode mag noch angeführt werden.

Es wird

$$\log x = 9.9042551$$

angenommen. Die Bedingung

$$\frac{1+x}{1-x} \leq \frac{1}{k'^2}$$

ergibt dann, dass das 'Täfelchen für $k = 0.95$ angewandt werden kann. Die Rechnung stellt sich nun wie folgt:

$$\log k'^2 = 8.9890046; \quad \log \alpha^2 = 0.3073334$$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\log \frac{A_m}{\alpha^2 + B_m^2}$	9.6959723	9.6686557	9.5858917	9.5068172
$\log \sec \theta_m$	0.0034142	0.0413735	0.1301656	0.2113955
$\log \eta_m$	8.7972366	9.3387901	9.5862238	9.6889116

$$\frac{A_m}{\alpha^2 + B_m^2} \sec \theta_m (1 + 2\eta_m \cos \varphi + 2\eta_m^2 \cos 2\varphi + \dots) \quad (1 - x \cos \varphi)^{-1/2}$$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	I	II	
$\cos 0 \varphi$	0.5004798	0.5128959	0.5200646	0.5226520	1.2018041	1.2018050	$\cos 0 \varphi$
$\cos \varphi$	0.0627557	0.2237944	0.4011539	0.5106864	0.6255098	0.6255104	$\cos \varphi$
$\cos 2 \varphi$	0.0039346	0.0488247	0.1547159	0.2494974	0.2385206	0.2385208	$\cos 2 \varphi$
$\cos 3 \varphi$	0.0002467	0.0106520	0.0596704	0.1218926	0.1004570	0.1004570	$\cos 3 \varphi$
$\cos 4 \varphi$	0.0000155	0.0023239	0.0230135	0.0595510	0.0443163	0.0443164	$\cos 4 \varphi$
$\cos 5 \varphi$	0.0000010	0.0005070	0.0088757	0.0290938	0.0200836	0.0200836	$\cos 5 \varphi$
$\cos 6 \varphi$	0.0000001	0.0001106	0.0034232	0.0142139	0.0092636	0.0092636	$\cos 6 \varphi$
$\cos 7 \varphi$		0.0000241	0.0013202	0.0069442	0.0043262	0.0043264	$\cos 7 \varphi$
$\cos 8 \varphi$		0.0000060	0.0005092	0.0033926	0.0020397	0.0020394	$\cos 8 \varphi$
$\cos 9 \varphi$		0.0000011	0.0001964	0.0016575	0.0009682	0.0009682	$\cos 9 \varphi$
$\cos 10 \varphi$		0.0000002	0.0000757	0.0008098	0.0004623	0.0004624	$\cos 10 \varphi$
$\cos 11 \varphi$		0.0000001	0.0000292	0.0003956	0.0002218	0.0002218	$\cos 11 \varphi$
$\cos 12 \varphi$			0.0000113	0.0001937	0.0001068	0.0001068	$\cos 12 \varphi$
$\cos 13 \varphi$			0.0000043	0.0000944	0.0000515	0.0000516	$\cos 13 \varphi$
$\cos 14 \varphi$			0.0000017	0.0000461	0.0000250	0.0000250	$\cos 14 \varphi$
$\cos 15 \varphi$			0.0000006	0.0000225	0.0000121	0.0000120	$\cos 15 \varphi$
$\cos 16 \varphi$			0.0000002	0.0000110	0.0000059	0.0000060	$\cos 16 \varphi$
$\cos 17 \varphi$			0.0000001	0.0000054	0.0000029	0.0000028	$\cos 17 \varphi$
$\cos 18 \varphi$				0.0000026	0.0000014	0.0000014	$\cos 18 \varphi$
$\cos 19 \varphi$				0.0000013	0.0000007	0.0000008	$\cos 19 \varphi$
$\cos 20 \varphi$				0.0000006	0.0000003	0.0000004	$\cos 20 \varphi$
$\cos 21 \varphi$				0.0000003	0.0000002	0.0000002	$\cos 21 \varphi$
$\cos 22 \varphi$				0.0000001	0.0000001	0.0000001	$\cos 22 \varphi$

Die Entwicklung I ist das Resultat der Rechnungen nach der hier auseinandergesetzten Methode, II ist nach der Hansen'schen Methode ermittelt worden (kleine Planeten). Die Unterschiede der einzelnen Coefficienten von einander sind nicht grösser, als dass sie durch die Ungenauigkeiten der Rechnungen mit siebenstelligen Logarithmen erklärt werden können. Ausnahme bilden jedoch die beiden ersten Coefficienten, die wohl nahezu um den Unterschied un-

genau sind. Dies stimmt auch ziemlich gut mit dem theoretischen Fehler, der aus der Annahme $n = 4$ hervorgeht. Mit Hilfe der Formel für l kann man nämlich a priori den Fehler ermitteln, der von einer bestimmten Annahme über n herrührt.

Die vorstehenden Rechnungen sind sämtlich von Herrn *Rodin* ausgeführt, mit Ausnahme der Reihe II, die Gylén's »Recueil de Tables«, Th. I, entnommen ist.

Zur Berechnung der Coefficienten der Entwicklung

$$(1 - x \cos \varphi)^{-1/2} = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \varphi + b_2 \cos 2 \varphi + \dots$$

kann man sich der bekannten Recursionsgleichungen

$$\frac{1}{2}(b_i + b_{i+1}) = (2i+1) \frac{a_i - a_{i+1}}{2(1-\beta)^2(1+\beta^2)}$$

$$\frac{1}{2}(b_i - b_{i+1}) = (2i+1) \frac{a_i - a_{i+1}}{2(1+\beta)^2(1+\beta^2)}$$

bedienen, wo

$$\frac{2\beta}{1+\beta^2} = \alpha.$$

St. Petersburg 1894 Febr. 22.

O. Backlund.

Osservazioni della nuova variabile T Andromedae

0^h 14^m 48^s3 +26° 10'3 (1855).

Di Francesco Porro.

Credo opportuno pubblicare senza indugio* i primi risultati delle mie osservazioni intorno alla variabile recentemente scoperta dal Rev. Anderson, avendo letto nel No 3213 delle A.N. due note dei professori Pickering e Hartwig, che arrivano a conclusioni affatto opposte. Infatti, mentre il primo assegna alla variabile un periodo di 281 giorni, il secondo, basandosi sopra un massimo di 8^m2 osservato il 28 Dicembre 1893, ridurrebbe il periodo a soli 74 giorni. Ecco le mie osservazioni, fatte al nuovo cercatore di Steinheil collocato a Soperga:

1893 Dic.	5	d 2 T 3 e
	6	d 2 T 3 e
	7	d 3 T 3 e
	8	d 3 T 2 e
	16	d > T (difficili a vedersi; e invisibile; ☾ vicina)
	27	d 4 e 5,6 T (cielo caliginoso)
	28	d > e > T (cielo limpidissimo)
1894 Febb.	27	b 2 T 2 c
Mar.	7	a 1 T 2 b

Le stelle di comparazione adoperate sono:

Torino 1894 Marzo 9.

a	=	BD. +26°47 (9 ^m 1)	0 ^h 15 ^m 50 ^s 4	+26° 18'4
b	=	BD. +26°48 (9 ^m 5)	16 9.8	12.1
c	=	BD. +26°46 (9 ^m 4)	15 47.4	22.9
d	=	Anonima (11 ^m)	14 20	9 } (posiz.
e	=	Anonima (12 ^m)	15 0	15 } (stimate)
T	=	BD. +26°43 (var.)	14 48.3	10.3

Le conclusioni che si possono ricavare da questi risultati sembrano piuttosto favorevoli al periodo del Prof. Pickering, che a quello del Prof. Hartwig. In tutto il Dicembre la stella mi è sempre sembrata inferiore alla decima grandezza, con tendenza piuttosto decrescente; ed il minimo osservato coincide per l'appunto con la data che l'Hartwig assegna al massimo. È ancora a notare che la grandezza 12.7 rilevata da una fotografia presa il 7 Gennajo ad Harvard College (e corrispondente, secondo il Pickering, a 10.7 nella scala di Argelander), si accorda meglio con i miei risultati che con un massimo di 8.2 avvenuto dieci giorni prima. Finalmente giova considerare che, se le mie due ultime osservazioni accennano ad un massimo che si avvicina, questo è presumibilmente da attendersi fra alcune settimane, perchè la stella non ha ancora raggiunto la nona grandezza; e ciò è pure in accordo con Pickering, che assegna al massimo imminente la data del 30 Marzo.

Francesco Porro.

Maximum of χ Cygni.

By E. C. Pickering.

A series of photometric observations is in progress with the 15 inch equatorial of the Harvard College Observatory by Mr. O. C. Wendell. The photometer employed is substantially that described in the Harvard Annals vol. XI p. 4 and consists of a double image prism which may be placed at any desired distance from the focus, and a Nicol prism by which the relative brightness of the two images may be varied, and measured by means of a graduated circle and index. The relative brightness of two stars within a few minutes of each other is thus readily and accurately measured. Among the advantages of this method as compared with that of Argelander, and many photo-

metric methods, absolute differences in magnitude are determined directly, and many of the systematic errors affecting other measurements of light are eliminated. The two images compared are precisely alike, and errors due to atmospheric absorption and to the light of the sky are eliminated. The meridian photometer was evolved from this instrument and while possessing many of its advantages is also capable of comparing stars which are not adjacent. It is probable that the photometer described above would be more widely used were its merits known. The following example is accordingly given of a recent determination of the maximum of the variable star χ Cygni. In general six sets of