Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen.

Von

L. Kiepert in Hannover.

In meiner Abhandlung „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade" (Math. Ann., Band 32, S. 1—135) habe ich *Parameter* von der Form

$$\xi = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \ldots$$

eingeführt, welche den Vorzug besitzen, dass ihr *Charakter* eine verhältnissmässig kleine Zahl ist, d. h. man kann die Exponenten δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$ so bestimmen, dass der Grad einer Gleichung zwischen zwei solchen Parametern ξ und η in Bezug auf jeden von ihnen wesentlich niedriger wird als z. B. der Grad der Jacobi'schen Modulargleichungen.

Die Vereinfachung, welche sich daraus für die Transformation n^{ten} Grades ergiebt, kann noch weiter geführt werden, wenn man bei der Wahl der Exponenten δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$ erst in *zweiter* Linie darauf achtet, dass der *Charakter* möglichst klein wird, während man es in *erster* Linie zu erreichen sucht, dass zwischen den verschiedenen Wurzeln der Parametergleichung *Relationen* bestehen. Dadurch gelingt es dann, die Parametergleichung zwischen ξ und η durch eine Gleichung zwischen x und y zu ersetzen, wobei x eine rationale Function von ξ, und y eine rationale Function von η ist. Diese Gleichung zwischen x und y ist bedeutend einfacher und kann deshalb auch viel leichter gefunden werden. Der tiefere Einblick in den Bau der Parametergleichung, welcher sich von selbst daraus ergiebt, fördert auch beträchtlich die Anwendungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Aus dem Gesagten ersieht man schon, dass die hier folgenden Untersuchungen eine Fortsetzung der oben citirten Abhandlung sind. Um den Anschluss zu erleichtern, empfiehlt es sich daher wohl, fortlaufende Nummern der Abschnitte, Paragraphen und Gleichungen zu benutzen und beide Abhandlungen am Schlusse durch ein kurz gefasstes Inhaltsverzeichniss zu einer zu verschmelzen.

Dritter Theil.

Vereinfachung der Parametergleichungen.

XII. Abschnitt.

Beziehungen zwischen den verschiedenen Wurzeln einer Parametergleichung.

§ 54.

Vereinfachungen bei beliebiger Zusammensetzung des Transformationsgrades.

Es sei D' irgend ein Theiler von n, und der Parameter ξ mit dem Charakter ch habe die Eigenschaft, dass er in

$$\xi' = \frac{a}{\xi} \tag{517}$$

übergeht, wenn man ω mit $\frac{\omega}{D'}$ vertauscht. Dass es solche Parameter wirklich giebt, wird in den späteren Paragraphen gezeigt werden. Ferner habe der Parameter η mit dem Charakter 2β die Eigenschaft, dass er bei dieser Vertauschung *unverändert* bleibt, dass also

$$\eta' = \eta \tag{518}$$

wird. Die Parametergleichung zwischen ξ und η hat dann die Form

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} (c_{\nu,2\beta}\xi^{2\beta} + c_{\nu,2\beta-1}\xi^{2\beta-1} + \cdots + c_{\nu,1}\xi + c_{\nu,0})\eta^{\nu} = 0, \tag{519}$$

oder wenn man durch ξ^{β} dividirt,

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} \left(c_{\nu,2\beta}\xi^{\beta} + c_{\nu,2\beta-1}\xi^{\beta-1} + \cdots + \frac{c_{\nu,1}}{\xi^{\beta-1}} + \frac{c_{\nu,0}}{\xi^{\beta}}\right)\eta^{\nu} = 0. \tag{519a}$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn man ξ mit ξ' und η mit η' vertauscht, weil ξ' und η' zu demselben primitiven Periodenpaare $\frac{2\omega}{D'}$, $2\omega'$ gehören; d. h. die Gleichung (519a) bleibt noch richtig, wenn man ξ mit $\frac{a}{\xi}$ vertauscht. Dies giebt

$$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0} \left(c_{\nu,2\beta}\frac{a^{\beta}}{\xi^{\beta}} + c_{\nu,2\beta-1}\frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu,1}\xi^{\beta-1}}{a^{\beta-1}} + \frac{c_{\nu,0}\xi^{\beta}}{a^{\beta}}\right)\eta^{\nu} = 0. \tag{520}$$

Die beiden Gleichungen (519a) und (520) müssen, von einem constanten Factor C abgesehen, mit einander übereinstimmen, es muss also

$$c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa}=C\cdot c_{\nu,\varkappa}\quad\text{und}\quad\frac{c_{\nu,\varkappa}}{a^{\beta-\varkappa}}=C\cdot c_{\nu,2\beta-\nu}$$

sein. Daraus folgt durch Multiplication

(521) $$C^2=1,\quad\text{oder}\quad C=\pm 1.$$

Die Gleichung (519a) reducirt sich daher auf

(522) $$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}\Big[c_{\nu,2\beta}\Big(\xi^\beta\pm\frac{a^\beta}{\xi^\beta}\Big)+c_{\nu,2\beta-1}\Big(\xi^{\beta-1}\pm\frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}}\Big)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{c_{\nu,\beta}}{2}(1\pm 1)\Big]\eta^\nu=0.$$

Wenn in dieser Gleichung das *untere* Vorzeichen zu nehmen wäre, so könnte man den Factor $\xi-\frac{a}{\xi}$ absondern. Dadurch würde aber der Grad der Parametergleichung in Bezug auf ξ um *zwei* Einheiten verkleinert, und η hätte nicht den Charakter 2β sondern $2\beta-2$. Dies widerstreitet der Voraussetzung, folglich gilt das *obere* Vorzeichen, und die Gleichung (522) geht über in eine Gleichung zwischen

$$x=\xi+\frac{a}{\xi}\quad\text{und}\quad\eta,$$

welche in Bezug auf x nur noch den Grad β hat. Setzt man nämlich

(523) $$\xi+\frac{a}{\xi}=x,\quad\xi^2+\frac{a^2}{\xi^2}=x_2,\quad\xi^3+\frac{a^3}{\xi^3}=x_3,\;\cdots,$$

so ist bekanntlich $x_\varkappa$ eine ganze rationale Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x, und die Gleichung (522) geht über in

(522a) $$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}(c_{\nu,2\beta}x_\beta+c_{\nu,2\beta-1}x_{\beta-1}+\cdots+c_{\nu,\beta+1}x+c_{\nu,\beta})\eta^\nu=0.$$

Es kann auch der Fall vorkommen, dass bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D'}$ die Parameter ξ und η bezw. in

$$\xi'=\frac{a}{\xi}\quad\text{und}\quad\eta'=-\eta$$

übergehen; dann wird die Gleichung (519a) die Form

(524) $$\sum_{\nu=ch}^{\nu=0}(-1)^\nu\Big(c_{\nu,2\beta}\frac{a^\beta}{\xi^\beta}+c_{\nu,2\beta-1}\frac{a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}}+\cdots+\frac{c_{\nu,1}\xi^{\beta-1}}{a^{\beta-1}}+\frac{c_{\nu,0}\xi^\beta}{a^\beta}\Big)\eta^\nu=0$$

erhalten. Daraus folgt

$$(-1)^\nu c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa}=C\cdot c_{\nu,\varkappa},\quad(-1)^\nu\frac{c_{\nu,\varkappa}}{a^{\beta-\varkappa}}=C\cdot c_{\nu,2\beta-\varkappa},$$

also

(525) $$C^2=1,\quad C=\pm 1,\quad(-1)^\nu c_{\nu,2\beta-\varkappa}\cdot a^{\beta-\varkappa}=\pm c_{\nu,\varkappa}.$$

Die Gleichung (519a) reducirt sich daher in diesem Falle auf

$$(526)\qquad \sum_{\nu=ch}^{\nu=0}\left[c_{\nu,2\beta}\left(\xi^{\beta}\pm\frac{(-1)^{\nu}a^{\beta}}{\xi^{\beta}}\right)+c_{\nu,2\beta-1}\left(\xi^{\beta-1}\pm\frac{(-1)^{\nu}a^{\beta-1}}{\xi^{\beta-1}}\right)+\cdots\right]\eta^{\nu}=0.$$

Setzt man jetzt

$$(527)\qquad \xi-\frac{a}{\xi}=\bar{x},\quad \xi^2-\frac{a^2}{\xi^2}=\bar{x}_2,\quad \xi^3-\frac{a^3}{\xi^3}=\bar{x}_3,\cdots$$

und bezeichnet man in dem Folgenden mit $F_{\lambda,\mu}(u,v)$ eine ganze rationale Function von u und v, welche in Bezug auf u höchstens vom Grade λ und in Bezug auf v höchstens vom Grade μ ist, so nimmt die Gleichung (526) für $ch=2\alpha$ entweder die Form

$$(528)\qquad F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)+\bar{x}\eta F_{\beta-1,\alpha-1}(x,\eta^2)=0,$$

oder

$$(528\text{a})\qquad \bar{x}F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)+\eta F_{\beta,\alpha-1}(x\eta^2)=0$$

an, jenachden das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Für $ch=2\alpha+1$ würde man erhalten entweder

$$(529)\qquad \bar{x}\eta F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)+F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)=0,$$

oder

$$(529\text{a})\qquad \eta F_{\beta,\alpha}(x,\eta^2)+\bar{x}F_{\beta-1,\alpha}(x,\eta^2)=0.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo *gleichzeitig* auf den zweiten Parameter η ähnliche Schlüsse angewendet werden können wie auf ξ. Dabei möge der Charakter von ξ eine *gerade* Zahl sein; es sei also

$$ch=2\alpha.$$

Ist dann D'' gleichfalls ein Theiler von n, und haben die Parameter ξ und η bezw. die Eigenschaft, dass sie bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D''}$ in

$$\xi''=+\xi \text{ und } \eta''=\frac{b}{\eta}$$

übergehen, so reducirt sich die Gleichung (519) auf eine Gleichung zwischen ξ und $y=\eta+\frac{b}{\eta}$, welche in Bezug auf y nur noch den Grad α hat.

Gehen dagegen bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{D''}$ die Parameter ξ und η bezw. in

$$\xi''=-\xi \text{ und } \eta''=\frac{b}{\eta}$$

über, und setzt man

$$(530)\quad \begin{cases} \eta + \frac{b}{\eta} = y, & \eta^2 + \frac{b^2}{\eta^2} = y_2, \quad \eta^3 + \frac{b^3}{\eta^3} = y_3, \cdots, \\ \eta - \frac{b}{\eta} = \bar{y}, & \eta^2 - \frac{b^2}{\eta^2} = \bar{y}_2, \quad \eta^3 - \frac{b^3}{\eta^3} = \bar{y}_3, \cdots, \end{cases}$$

so reducirt sich die Gleichung (519) entweder auf

$$(531)\qquad F_{\beta,\alpha}(\xi^2, y) + \xi\bar{y}F_{\beta-1,\alpha-1}(\xi^2, y) = 0,$$

oder auf

$$(531\text{a})\qquad \bar{y}F_{\beta,\alpha-1}(\xi^2, y) + \xi F_{\beta-1,\alpha}(\xi^2, y) = 0.$$

Man hat daher die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I.}\qquad \xi' = \frac{a}{\xi},\quad \eta' = +\eta;\quad \xi'' = +\xi,\quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$$

$$\text{II.}\qquad \xi' = \frac{a}{\xi},\quad \eta' = -\eta;\quad \xi'' = +\xi,\quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$$

$$\text{III.}\qquad \xi' = \frac{a}{\xi},\quad \eta' = +\eta;\quad \xi'' = -\xi,\quad \eta'' = \frac{b}{\eta};$$

$$\text{IV.}\qquad \xi' = \frac{a}{\xi},\quad \eta' = -\eta;\quad \xi'' = -\xi,\quad \eta'' = \frac{b}{\eta}.$$

Im Falle I kann man die Parametergleichung zwischen ξ und η auf die Form

$$(532)\qquad F_{\beta,\alpha}(x, y) = 0$$

bringen; in den Fällen II, III und IV tritt eine entsprechende Vereinfachung ein, die Form der Gleichung ist aber noch davon abhängig, ob α und β gerade oder ungerade sind. Ausserdem bleibt es bei den allgemeinen Betrachtungen noch unentschieden, ob für $\xi' = \frac{a}{\xi}$ und $\eta' = -\eta$ die Gleichung (528) oder die Gleichung (528a) gilt; und ebenso bleibt es unentschieden, ob für $\xi'' = -\xi$, $\eta'' = \frac{b}{\eta}$ die Gleichung (531) oder die Gleichung (531a) gilt. Dadurch findet man

im Falle	II	4	mögliche Formen der Gleichung,
„ „	III	4	„ „ „ „ ,
„ „	IV	16	„ „ „ „ .

Es würde zu weit führen, alle diese Formen hier anzugeben; es möge nur noch erwähnt werden, dass diese Unentschiedenheit bei den hier folgenden Anwendungen von selbst fortfällt. Es ergeben sich nämlich aus der Entwickelung von x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}}$ noch weitere Reductionen, und zwar verschwinden, wie man schon aus dem *ersten* Gliede dieser Entwickelungen erkennt, so viele Coefficienten in der Parametergleichung, dass immer nur eine einzige passende Gleichungsform übrig bleibt.

§ 55.

Anwendung auf den Fall $n = a^2$.

Es sei a eine Primzahl und $n = a^2$, dann wird

$$\xi = L(a)^{\delta_1} L(n)^{\delta_2} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^{\delta_1} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\delta_2}}{Q(\varpi, \varpi')^{\delta_1+\delta_2}}. \tag{533}$$

Der Charakter von ξ ergiebt sich dabei nach den Angaben in § 10 aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -a(a-1)\delta_1 - (a^2-1)\delta_2 &= 24k_0, \\ +(a-1)^2\delta_1 + \quad 0 \quad &= 24k_1, \\ +(a-1)\delta_1 + (a^2-1)\delta_2 &= 24k_2. \end{aligned}$$

Setzt man $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \varkappa$, so wird

$$\xi = L(n)^{\varkappa} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\varkappa}}{Q(\varpi, \varpi')^{\varkappa}}, \tag{534}$$

$$-(a^2-1)\varkappa = 24k_0, \quad 0 = 24k_1, \quad (a^2-1)\varkappa = 24k_2. \tag{535}$$

Für positive Werthe von $\varkappa$ hat also ξ den Charakter

$$ch = k_2. \tag{536}$$

Dies giebt

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{für} & a = 2, & \varkappa = 8, & ch = 1, \\ \text{,,} & a = 3, & \varkappa = 3, & ch = 1, \\ \text{,,} & a = 12\nu + 1, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2 + \nu, \\ \text{,,} & a = 12\nu + 5, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2 + 5\nu + 1, \\ \text{,,} & a = 12\nu + 7, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2 + 7\nu + 2, \\ \text{,,} & a = 12\nu + 11, & \varkappa = 1, & ch = 6\nu^2 + 11\nu + 5. \end{array}\right. \tag{537}$$

Setzt man dagegen $\delta_1 = 2\lambda$, $\delta_2 = -\lambda$, so erhält man den Parameter

$$\eta = \frac{L(a)^{2\lambda}}{L(n)^{\lambda}} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^{2\lambda}}{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\lambda} Q(\varpi, \varpi')^{\lambda}}, \tag{538}$$

$$\left\{\begin{aligned} -\quad (a-1)^2\lambda &= 24k_0, \\ +2(a-1)^2\lambda &= 24k_1, \\ -\quad (a-1)^2\lambda &= 24k_2. \end{aligned}\right. \tag{539}$$

Bezeichnet man also den Charakter von η mit 2β, so erhält man

$$(540)\quad \begin{cases} \text{für } a = 2, & \lambda = 24, & \beta = 1, \\ \;\;„\;\; a = 3, & \lambda = 6, & \beta = 1, \\ \;\;„\;\; a = 12\nu + 1, & \lambda = 1, & \beta = 6\nu^2, \\ \;\;„\;\; a = 12\nu + 5, & \lambda = 3, & \beta = 18\nu^2 + 12\nu + 2, \\ \;\;„\;\; a = 12\nu + 7. & \lambda = 2, & \beta = 12\nu^2 + 12\nu + 3, \\ \;\;„\;\; a = 12\nu + 11, & \lambda = 6, & \beta = 36\nu^2 + 60\nu + 25. \end{cases}$$

Setzt man in dem Folgenden

$$(541)\qquad \varpi = \omega', \quad \varpi' = -\omega, \quad h^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2\omega'\pi i}{n\omega}} = r$$

und entwickelt man ξ und η nach steigenden Potenzen von r, so findet man

$$(542)\qquad \xi = r^{-ch} + \cdots, \quad \eta = r^{-\beta} + \cdots.$$

Nun gilt ganz allgemein, was auch m sein mag, die Gleichung

$$(543)\qquad Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich gehen bei der Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ die Parameter ξ und η in

$$(544)\qquad \bar{\xi} = \frac{a^{\varkappa} Q(\omega, \omega')^{\varkappa}}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^{\varkappa}} = \frac{a^{\varkappa}}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)^{2\lambda}}{Q(\omega, \omega')^{\lambda}\, Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^{\lambda}} = \eta$$

über. (Eine solche Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ wurde bereits in § 11 angewendet; sie führte zu den *complementären* Parametern). Die Gleichung zwischen ξ und η reducirt sich also in diesem Falle auf eine Gleichung zwischen $x = \xi + \frac{a^{\varkappa}}{\xi}$ und η, welche in Bezug auf x nur noch den Grad β hat.

§ 56.

Beispiele für den Fall $n = a^2$.

Da man den Grad kennt, den die Gleichung zwischen x und η besitzt, so kann man sie ohne Weiteres mit unbestimmten Coefficienten aufschreiben, die man dann mit leichter Mühe findet, indem man x und η nach steigenden Potenzen von r entwickelt und einsetzt. Es sei z. B.

$$(545)\qquad a = 5, \; n = 25, \; \text{also } \xi = L(25), \; \eta = \frac{L(5)^6}{L(25)^3}, \; ch = 1, \; \beta = 2,$$

dann wird

$$(546)\qquad \begin{cases} \eta = r^{-2}(1 + 3r + 9r^2 + 22r^3 + \cdots), \\ x = \xi + 5\xi^{-1} = r^{-1}(1 - r + 4r^2 + \cdots), \\ x_2 = \xi^2 + 25\xi^{-2} = x^2 - 10 = r^{-2}(1 - 2r - r^2 + 2r^3 + \cdots). \end{cases}$$

Die Gleichung zwischen x und η muss die Form

(547) $$(a_1 x_2 + a_2 x + a_3)\eta + (b_1 x_2 + b_2 x + b_3) = 0$$

haben; aus dem ersten Gliede in den Entwickelungen von η, x und x_2 nach steigenden Potenzen von r erkennt man aber, dass sie sich auf

(547a) $$\eta - x_2 + b_2 x + b_3 = 0$$

reducirt. Nun ist

$$\eta - x_2 = 5r^{-1}(1 + 2r + 4r^2 + \cdots),$$

also in Uebereinstimmung mit Gleichung (236)

(548) $$\eta = x_2 + 5x + 15, \quad \text{oder} \quad \eta = x^2 + 5x + 5.$$

In dieser Weise findet man leicht die folgende Tabelle:

I. $a = 2,\quad n = 4,\quad \xi = L(4)^8,\quad \eta = \frac{L(2)^{48}}{L(4)^{24}},\quad x = \xi + \frac{256}{\xi},$

(549) $$\eta = x + 32;$$

II. $a = 3,\quad n = 9,\quad \xi = L(9)^3,\quad \eta = \frac{L(3)^{12}}{L(9)^6},\quad x = \xi + \frac{27}{\xi},$

(550) $$\eta = x + 9;$$

III. $a = 5,\quad n = 25,\quad \xi = L(25),\quad \eta = \frac{L(5)^6}{L(25)^3},\quad x = \xi + \frac{5}{\xi},$

(551) $$\eta = x^2 + 5x + 5;$$

IV. $a = 7,\quad n = 49,\quad \xi = L(49),\quad \eta = \frac{L(7)^4}{L(49)^2},\quad x = \xi + \frac{7}{\xi},$

(552) $$\eta^2 - 7(x + 5)\eta - (x^3 + 7x^2 - 49) = 0,$$

oder

(552a) $$2\eta = 7(x + 5) + (x + 7)\sqrt{4x + 21}.$$

Diese Beispiele mögen genügen, um die angegebene Methode zunächst auf den leichter verständlichen Fall anzuwenden, wo sich die Reduction der Parametergleichung nur auf den *einen* Parameter erstreckt. Noch grösser wird der Grad der Vereinfachung, wenn man für *beide* Parameter in der angegebenen Weise neue Hülfsgrössen x und y einführen kann. Wie dies geschieht, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§ 57.

Anwendung auf den Fall $n = n'n''$.

Es sei $n = n' . n''$, wobei n' und n'' zwei von einander verschiedene Primzahlen sein mögen. Dann kann man zwei ganze Zahlen ν' und ν'' finden, für welche

(553) $$\nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Jetzt setze man

$$(554)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{L(n)^{\varkappa} L(n')^{\varkappa}}{L(n'')^{\varkappa}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\varkappa} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\varkappa}}{Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\varkappa} Q(\varpi, \varpi')^{\varkappa}}, \\[2ex] \eta = \dfrac{L(n')^{\lambda} L(n'')^{\lambda}}{L(n)^{\lambda}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\lambda} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\lambda} Q(\varpi, \varpi')^{\lambda}}, \\[2ex] \zeta = \dfrac{L(n)^{\mu} L(n'')^{\mu}}{L(n')^{\mu}} = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^{\mu} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right)^{\mu}}{Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right)^{\mu} Q(\varpi, \varpi')^{\mu}} \end{cases}$$

und bestimme die Exponenten $\varkappa$, λ, μ so, dass ξ, η, ζ Parameter werden. Zu diesem Zweck benutze man die Auseinandersetzungen in § 10, nach denen $L(n')^{\delta_1} L(n'')^{\delta_2} L(n)^{\delta_3}$ nur dann ein Parameter werden kann, wenn in den Gleichungen

$$(555)\quad \begin{cases} (n''-n)\,\delta_1 + (n'-n)\,\delta_2 + (1-n)\,\delta_3 = 24k_0, \\ (n-n'')\,\delta_1 + (1-n'')\,\delta_2 + (n'-n'')\,\delta_3 = 24k_1, \\ (1-n')\,\delta_1 + (n-n')\,\delta_2 + (n''-n')\,\delta_3 = 24k_2, \\ (n'-1)\,\delta_1 + (n''-1)\,\delta_2 + (n-1)\,\delta_3 = 24k_3 \end{cases}$$

die Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 ganze Zahlen sind.

Um ξ zu erhalten, setze man daher $\delta_1 = +\varkappa$, $\delta_2 = -\varkappa$, $\delta_3 = +\varkappa$. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'-1)(n''+1)\varkappa = 24k_0 = 24k_2,$$
$$+(n'-1)(n''+1)\varkappa = 24k_1 = 24k_3.$$

Bezeichnet man also mit α die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft hat, dass 24α durch $(n'-1)(n''+1)$ theilbar ist, so findet man

$$(556)\quad \varkappa = \frac{24\alpha}{(n'-1)(n''+1)}, \quad k_0 = k_2 = -\alpha, \quad k_1 = k_3 = +\alpha.$$

Der Charakter von ξ ist deshalb gleich 2α.

Um η zu erhalten, setze man $\delta_1 = +\lambda$, $\delta_2 = +\lambda$, $\delta_3 = -\lambda$ und bezeichne mit β die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie durch $(n'-1)(n''-1)$ theilbar ist. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'-1)(n''-1)\lambda = 24k_0 = 24k_3,$$
$$+(n'-1)(n''-1)\lambda = 24k_1 = 24k_2,$$

$$(557)\quad \lambda = \frac{24\beta}{(n'-1)(n''-1)}, \quad k_0 = k_3 = -\beta, \quad k_1 = k_2 = +\beta.$$

Der Charakter von η ist deshalb gleich 2β.

Um endlich ζ zu erhalten, setze man $\delta_1 = -\mu$, $\delta_2 = +\mu$, $\delta_3 = +\mu$ und bezeichne mit γ die kleinste ganze Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, dass 24γ durch $(n'+1)(n''-1)$ theilbar ist. Dadurch gehen die Gleichungen (555) über in

$$-(n'+1)(n''-1)\mu = 24k_0 = 24k_1,$$
$$+(n'+1)(n''-1)\mu = 24k_2 = 24k_3,$$

$$(558)\quad \mu = \frac{24\gamma}{(n'+1)(n''-1)},\quad k_0 = k_1 = -\gamma,\quad k_2 = k_3 = +\gamma.$$

Der Charakter von ζ ist deshalb gleich 2γ.

Die Bedingungen, welche soeben für $\varkappa$, λ, μ aufgefunden wurden, sind *nothwendig*, wenn ξ, η, ζ Parameter werden sollen; sie sind auch ohne Weiteres *hinreichend*, wenn $\varkappa$, λ, μ *gerade* Zahlen sind, denn $\Sigma D(D-1)(D-2)\delta$ hat bezw. die Werthe

$$[+n'(n'-1)(n'-2) - n''(n''-1)(n''-2) + n(n-1)(n-2)]\varkappa,$$
$$[+n'(n'-1)(n'-2) + n''(n''-1)(n''-2) - n(n-1)(n-2)]\lambda,$$
$$[-n'(n'-1)(n'-2) + n''(n''-1)(n''-2) + n(n-1)(n-2)]\mu$$

und ist in allen drei Fällen durch 24 theilbar, gleichviel ob n gerade oder ungerade ist.*)

Aber auch in dem Falle, wo $\varkappa$, λ oder μ *ungerade* Zahlen sind, kann man zeigen, dass ξ, η, ζ unter den angegebenen Bedingungen Parameter sind.

Nach den Angaben in § 4 (vergleiche die Formeln (58) Nr. 5) ist nämlich

$$R = \prod \wp'(lw)$$

eine Transformationsgrösse, wenn sich n in zwei theilerfremde Factoren a und b zerlegen lässt, die beide grösser als 2 sind. Dabei durchläuft l alle Werthe, welche zu n theilerfremd und kleiner sind als $\frac{n}{2}$. Ist $n = 2m+1$ das Product zweier ungeraden Primzahlen $n' = 2m'+1$ und $n'' = 2m''+1$, so wird

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=m} \wp'(\alpha w) = R \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m'} \wp'(\alpha n'' w) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m''} \wp'(\alpha n' w),$$

oder nach Gleichung (42)

$$(-1)^m f(n)^{-3} = (-1)^{m'+m''} f(n')^{-3} f(n'')^{-3} \cdot R.$$

Nun ist $m = 2m'm'' + m' + m''$, folglich lässt sich die Transformationsgrösse R auf die Form

*) Vergl. die Auseinandersetzungen in § 10.

$$R = \frac{f(n')^3 f(n'')^3}{f(n)^3} = Q^{-12m'm''} \cdot \frac{L(n')^3 L(n'')^3}{L(n)^3}$$

bringen. Ferner ist nach den Gleichungen (58) Nr. 2

$$f(n')^{6m''} = Q^{12m'm''} L(n')^{6m''}$$

gleichfalls eine Transformationsgrösse. Deshalb wird auch $R \cdot f(n')^{6m''}$ eine Transformationsgrösse und zwar eine von der nullten Dimension; d. h.

$$\frac{L(n')^{3n''} L(n'')^3}{L(n)^3}$$

und ebenso

$$\frac{L(n')^3 L(n'')^{3n'}}{L(n)^3}$$

sind Parameter.

Ist $n = 2a$ und a eine ungerade Primzahl, so ist sogar schon

$$\frac{f(2)^a f(a)}{f(2a)} = \frac{L(2)^a L(a)}{L(2a)}$$

ein Parameter, wie bereits in Nr. 8 der Gleichungen (58) angegeben wurde. Daraus folgt ganz allgemein der Satz:

„*Ist $n = n' \cdot n''$, und sind n', n'' irgend zwei von einander verschiedene Primzahlen, so wird*

$$\xi = L(n')^{\delta_1} L(n'')^{\delta_2} L(n)^{\delta_3}$$

ein Parameter, wenn man die ganzzahligen Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 so bestimmt, dass in den Gleichungen (555) *die Zahlen k_0, k_1, k_2, k_3 ganze Zahlen werden, dass δ_1, δ_2, δ_3 entweder alle drei gerade oder alle drei ungerade sind, und dass $n'(n'-1)(n'-2)\delta_1 + n''(n''-1)(n''-2)\delta_2 + n(n-1)(n-2)\delta_3$ durch* 24 *theilbar ist.*“

Nach diesem Satze werden auch die Grössen ξ, η, ζ, welche durch die Gleichungen (554) erklärt sind, immer Parameter, wenn man die ganzen Zahlen α, β, γ so wählt, dass auch

$$(559) \quad \varkappa = \frac{24\alpha}{(n'-1)(n''+1)}, \quad \lambda = \frac{24\beta}{(n'-1)(n''-1)}, \quad \mu = \frac{24\gamma}{(n'+1)(n''-1)}$$

ganze Zahlen werden.

Diese Parameter ξ, η, ζ besitzen nun die folgenden Eigenschaften:

Setzt man $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ und vertauscht ω mit $\frac{\omega}{n'}$, so gehen mit Rücksicht auf die schon oft benutzte Formel

$$Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega')$$

die Parameter ξ, η, ζ über in

$$(560)\qquad \begin{cases} \xi' = n'^{\varkappa}\,\dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\omega\right)^{\varkappa} Q(\omega', -\omega)_1^{\varkappa}}{Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\frac{\omega}{n'}\right)^{\varkappa} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\varkappa}}, \\[2ex] \eta' = \dfrac{Q(\omega', -\omega)^{\lambda}\, Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\frac{\omega}{n'}\right)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\omega\right)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\lambda}}, \\[2ex] \zeta' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\omega\right)^{\mu} Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\frac{\omega}{n'}\right)^{\mu}}{Q(\omega', -\omega)^{\mu}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\mu}}. \end{cases}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die 24[te] Wurzel der Einheit $e^{\frac{\pi i}{12}}$ mit ϱ und setzt man

$$n''\omega + n'\omega' = \varpi, \quad \nu''\omega + \nu'\omega' = \varpi',$$

so erhält man nach der in den Gleichungen (134) und (134a) meiner vor. Abhandlung (Math. Annalen, Bd. 26, S. 421) gegebenen Tabelle

$$(561)\qquad \begin{cases} Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\frac{\omega}{n'}\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu''n', & 1\\ -\nu'n'', & 1\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \varrho^{-\nu''n'-2}\, Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right), \\[1ex] Q\left(\frac{\omega'}{n''}, -\omega\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu'', & 1\\ -\nu'n'', & n'\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right) = \varrho^{-\nu''+n'-3}\, Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right), \\[1ex] Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu''n', & n''\\ -\nu', & 1\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right) \\[1ex] \qquad = \varrho\begin{pmatrix}-\nu', & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}n'', & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right) \\[1ex] \qquad = \varrho^{-n''-\nu'}\, Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right),^{*)} \\[1ex] Q(\omega', -\omega) = \varrho\begin{pmatrix}-\nu'', & n''\\ -\nu', & n'\end{pmatrix} Q(\varpi, \varpi') = \varrho_1\cdot Q(\varpi, \varpi'), \end{cases}$$

---

*) Die Substitution $x_2 = -\nu''n'x + n''y = (1-\nu'n'')x + n''y$, $y_2 = -\nu'x + y$ ist hier in die beiden Substitutionen

$$x_1 = -\nu'x + y, \quad y_1 = -x \quad \text{und} \quad x_2 = n''x_1 - y_1, \quad y_2 = x_1$$

zerlegt. Dabei kommt der Werth $q = -1$ vor, während in § 14 und § 15 meiner Abhandlung im 26[ten] Bande der Mathematischen Annalen die Grösse

$$\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}$$

als 24[te] Wurzel der Einheit nur unter der Voraussetzung bestimmt worden war, dass q eine *positive* ganze Zahl ist. Diese Beschränkung kann man aber aufheben. Ist nämlich

$$\varpi = p\omega + q\omega', \quad \varpi' = p'\omega + q'\omega',$$

so wird

$$\omega = q'\varpi - q\varpi', \quad \omega' = -p'\varpi + p\varpi'$$

wo ϱ_1 eine 24$^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist, die man für jeden einzelnen Fall noch besonders bestimmen muss. Deshalb wird

$$
(562)\quad \begin{cases} \xi' = n'^{\varkappa}\cdot\varrho_1^{\varkappa}\cdot\varrho^{\varkappa[(n'-1)(\nu''+1)+n''+\nu']}\cdot\dfrac{1}{\xi}, \\ \eta' = \qquad\varrho_1^{\lambda}\cdot\varrho^{-\lambda[(n'-1)(\nu'+1)-n''-\nu']}\cdot\dfrac{1}{\eta}, \\ \zeta' = \qquad\varrho_1^{-\mu}\cdot\varrho^{-\mu[(n''-1)(\nu'-1)-n'+\nu'+3]}\cdot\zeta. \end{cases}
$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η, ζ dem primitiven Periodenpaare $2\varpi = 2n''\omega + 2n'\omega'$, $2\varpi' = 2\nu''\omega + 2\nu'\omega'$ zugeordnet.

Vertauscht man ω mit $\frac{\omega}{n''}$, nachdem man in den Gleichungen (554) wieder $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ gesetzt hat, so gehen ξ, η, ζ über in

$$
(563)\quad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\varkappa} Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}{Q(\omega', -\omega)^{\varkappa}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}, \\ \eta'' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda} Q(\omega', -\omega)^{\lambda}}{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda}}, \\ \zeta'' = n''^{\mu}\cdot\dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right)^{\mu} Q(\omega', -\omega)^{\mu}}{Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu}}. \end{cases}
$$

Setzt man jetzt

$$
n'\omega + n''\omega' = \varpi, \quad -\nu'\omega - \nu''\omega' = \varpi',
$$

so erhält man

$$
(564)\quad \begin{cases} Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\frac{\omega}{n''}\right) = \varrho\begin{pmatrix}\nu' n'', & 1\\ \nu'' n', & 1\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \varrho^{\nu' n''-2}\, Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right), \\ Q\left(\frac{\omega'}{n'}, -\omega\right) = \varrho\begin{pmatrix}\nu', & 1\\ \nu'' n', & n''\end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right) = \varrho^{\nu'+n''-3}\, Q\left(\frac{\varpi}{n'}, \varpi'\right), \end{cases}
$$

---

die *inverse* Substitution. Aus

$$
Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} Q(\omega, \omega')
$$

folgt daher

$$
Q(\omega, \omega') = \varrho\begin{pmatrix}q', & -q\\ -p', & p\end{pmatrix} Q(\varpi, \varpi'),
$$

und dies giebt

$$
\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}q', & -q\\ -p', & p\end{pmatrix} = +1.
$$

$$(564)\quad \begin{cases} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right) = \varrho\begin{pmatrix} \nu' n'', & n' \\ \nu'', & 1 \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right) \\ \qquad = \varrho\begin{pmatrix} \nu'', & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \varrho\begin{pmatrix} n', & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right) \\ \qquad = \varrho^{-n'+\nu''} Q\left(\frac{\varpi}{n''}, \varpi'\right), \\ Q(\omega', -\omega) = \varrho\begin{pmatrix} \nu', & n' \\ \nu'', & n'' \end{pmatrix} Q(\varpi, \varpi') = \varrho_2 \cdot Q(\varpi, \varpi'), \end{cases}$$

wobei ϱ_2 wieder eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist, die man für jeden einzelnen Fall besonders bestimmen muss. Deshalb wird

$$(565)\quad \begin{cases} \xi'' = \varrho_2^{-\varkappa} \cdot \varrho^{\varkappa[(n'-1)(\nu''+1)+n''+\nu'-3]} \cdot \xi, \\ \eta'' = \varrho_2^{\lambda} \cdot \varrho^{\lambda[(n''-1)(\nu'-1)+n'-\nu'']} \cdot \frac{1}{\eta}, \\ \zeta'' = n''^{\mu} \cdot \varrho_2^{\mu} \cdot \varrho^{-\mu[(n''-1)(\nu'-1)-n'+\nu'']} \cdot \frac{1}{\zeta}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η, ζ dem primitiven Periodenpaare $2\varpi = 2n'\omega + 2n''\omega'$, $2\varpi' = -2\nu'\omega - 2\nu''\omega'$ zugeordnet.

Setzt man in den Gleichungen (554) wieder $\varpi = \omega'$, $\varpi' = -\omega$ und vertauscht ω mit $\frac{\omega}{n}$, so erhält man (mit Anwendung der in § 11 eingeführten Bezeichnung) die *complementären* Parameter

$$\bar{\xi} = n'^{\varkappa} \frac{Q(\omega', -\omega)^{\varkappa}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\varkappa}}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\varkappa} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\varkappa}},$$

$$\bar{\eta} = \frac{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\lambda} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\lambda}}{Q(\omega', -\omega)^{\lambda}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\lambda}},$$

$$\bar{\zeta} = n''^{\mu} \frac{Q(\omega', -\omega)^{\mu}\, Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n'}\right)^{\mu}}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n''}\right)^{\mu} Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^{\mu}}.$$

Nun ist aber

$$Q(\omega', -\omega) = \varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} Q(\omega, \omega') = \varrho^{-3}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich wird

$$(566)\qquad \bar{\xi} = \frac{n'^{\varkappa}}{\xi}, \quad \bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\zeta} = \frac{n''^{\mu}}{\zeta}.$$

§ 58.

Anwendung auf den Fall $n = 2a$.

Es sei $n' = 2$ und $n'' = a = 2b + 1$ eine ungerade Primzahl, also

(567) $n = 2a, \quad \nu' = 1, \quad \nu'' = b, \quad \varrho_1 = \varrho^{-b-1}, \quad \varrho_2 = \varrho^{b-2}.$

Dadurch erhält man in diesem Falle

$$(568)\quad \xi = \frac{L(2a)^\varkappa L(2)^\varkappa}{L(a)^\varkappa}, \quad \eta = \frac{L(a)^\lambda L(2)^\lambda}{L(2a)^\lambda}, \quad \zeta = \frac{L(2a)^\mu L(a)^\mu}{L(2)^\mu};$$

$$(569)\quad \varkappa = \frac{24\alpha}{a+1}, \qquad \lambda = \frac{24\beta}{a-1}, \qquad \mu = \frac{8\gamma}{a-1};$$

$$(570)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{2^\varkappa \varrho^{(a+1)\varkappa}}{\xi}, & \eta' = \dfrac{1}{\eta}, & \zeta' = \zeta, \\ \xi'' = \varrho^{(a+1)\varkappa} \cdot \xi, & \eta'' = \dfrac{1}{\eta}, & \zeta'' = \dfrac{a^\mu}{\zeta}, \\ \bar{\xi} = \dfrac{2^\varkappa}{\xi}, & \bar{\eta} = \eta, & \bar{\zeta} = \dfrac{a^\mu}{\zeta}. \end{cases}$$

Da $(a+1)\varkappa = 24\alpha$ durch 24 theilbar ist, so folgt hieraus, dass man

$$(571)\quad x = \xi + \frac{2^\varkappa}{\xi}, \qquad y = \eta + \frac{1}{\eta}, \qquad z = \zeta + \frac{a^\mu}{\zeta},$$

in die Parametergleichungen zwischen ξ, η und ζ einführen darf, wodurch dann der Grad in Bezug auf jede der drei Veränderlichen auf die Hälfte reducirt wird.

Es genügt, die Rechnungen an irgend einem Beispiele zu erläutern. Es sei $a = 17$, $n = 34$, dann wird $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$; $\varkappa = 4$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, also

$$(572)\quad \xi = \frac{L(34)^4 L(2)^4}{L(17)^4}, \qquad \eta = \frac{L(17)^3 L(2)^3}{L(34)^3}, \qquad \zeta = \frac{L(34) L(17)}{L(2)}.$$

Dabei kann man setzen

$$(573)\quad \begin{cases} x = \xi + \dfrac{16}{\xi}, & y = \eta + \dfrac{1}{\eta}, & z = \zeta + \dfrac{17}{\zeta}, \\ x_2 = \xi^2 + \dfrac{256}{\xi^2}, & y_2 = \eta^2 + \dfrac{1}{\eta^2}, & z_2 = \zeta^2 + \dfrac{289}{\zeta^2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

und z. B. die Gleichung zwischen η und ζ auf die Form

$$(574)\quad (a_1 y_2 + a_2 y + a_3) z_2 + (b_1 y_2 + b_2 y + b_3) z + (c_1 y_2 + c_2 y + c_3) = 0$$

bringen. Aus dem ersten Gliede der Entwickelungen von y, y_2, z, z_2 nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{34}} = r$, nämlich aus

$$y = r^{-2}(1 + 3r + 6r^2 + 13r^2 + 25r^4 + \cdots),$$
$$y_2 = r^{-4}(1 + 6r + 21r^2 + 62r^3 + 162r^4 + 384r^5 + \cdots),$$
$$z = r^{-2}(1 - r - 2r^2 + r^3 + 17r^4 + \cdots),$$
$$z_2 = r^{-4}(1 - 2r - 3r^2 + 6r^3 + 2r^4 + 0 - r^6 + \cdots)$$

folgt aber, dass $a_1 = 0$ sein muss. Ferner ist

$$yz_2 = r^{-6}(1 + r - 3r^2 - 2r^3 + \cdots),$$
$$y_2 z = r^{-6}(1 + 5r + 13r^2 + 30r^3 + \cdots),$$

also

$$yz_2 - y_2 z = r^{-5}(-4 - 16r - 32r^2 + \cdots).$$

Da sich in der Gleichung (574) kein Glied gegen dieses Glied mit r^{-5} fortheben kann, so müssen auch a_2 und b_1 gleich 0 sein, d. h. die Gleichung (574) reducirt sich auf

$$a_3 z_2 + (b_2 y + b_3) z + (c_1 y_2 + c_2 y + c_3) = 0. \tag{574a}$$

Jetzt erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$z_2 - 2yz + y_2 = r^{-2}(+16 + 64r + 124r^2 + 256r^3 + \cdots),$$
$$-20y + 4z = r^{-2}(-16 - 64r - 128r^2 - 256r^3 - \cdots),$$

also

$$z_2 - 2yz + y_2 - 20y + 4z + 4 = 0, \tag{575}$$

oder

$$(z - y)^2 - 20y + 4z - 32 = 0.$$

§ 59.

Weitere Vereinfachungen.

In manchen Fällen ist noch eine weitere Vereinfachung möglich. Sind nämlich von den Exponenten $\varkappa$, λ, μ zwei, z. B. $\varkappa$ und λ gerade, also

$$\varkappa = 2\varkappa', \qquad \lambda = 2\lambda',$$

so hat man zu untersuchen, ob nicht bereits

$$\vartheta = \sqrt{\xi\eta} = L(n)^{\varkappa'-\lambda'} \,.\, L(n')^{\varkappa'+\lambda'} \,.\, L(n'')^{\lambda'-\varkappa'}$$

ein Parameter wird. Ist dies der Fall, so folgt aus der Bildung von ϑ sofort, dass die Zahlen k_0, k_1, k_2, k_3, welche zu diesem Parameter gehören, durch die Gleichungen

$$2k_0 = -(\alpha+\beta), \; 2k_1 = +(\alpha+\beta), \; 2k_2 = -(\alpha-\beta), \; 2k_3 = +(\alpha-\beta)$$

bestimmt sind. Daher kann ϑ nur dann ein Parameter sein, wenn α und β entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Der Charakter von ϑ ist daher gleich α oder gleich β, jenachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$ ist. In beiden Fällen erhält man eine Gleichung zwischen $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$, welche beträchtlich einfacher ist als die zwischen

ξ und η, denn sie ist aus einer Gleichung zwischen η und $\sqrt{\xi\eta}$ oder zwischen ξ und $\sqrt{\xi\eta}$ hervorgegangen, so dass man von vornherein einen grossen Theil der Coefficienten gleich 0 setzen kann.

Dabei kann man die Reductionen, welche früher für die Gleichungen zwischen ξ, η, ζ angegeben wurden, in gleicher Weise auch auf die Gleichungen zwischen $\sqrt{\xi}$, $\sqrt{\eta}$, $\sqrt{\zeta}$ anwenden; man braucht nur noch die Bezeichnungen

$$(576)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi} + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\xi}} = u, & \xi + \dfrac{a}{\xi} = u_2, \quad (\sqrt{\xi})^3 + \dfrac{(\sqrt{a})^3}{(\sqrt{\xi})^3} = u_3, \ldots, \\ \sqrt{\xi} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \xi - \dfrac{a}{\xi} = \bar{u}_2, \quad (\sqrt{\xi})^3 - \dfrac{(\sqrt{a})^3}{(\sqrt{\xi})^3} = \bar{u}_3, \ldots, \end{cases}$$

$$(577)\quad \begin{cases} \sqrt{\eta} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{\eta}} = v, & \eta + \dfrac{b}{\eta} = v_2, \quad (\sqrt{\eta})^3 + \dfrac{(\sqrt{b})^3}{(\sqrt{\eta})^3} = v_3, \ldots, \\ \sqrt{\eta} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, & \eta - \dfrac{b}{\eta} = \bar{v}_2, \quad (\sqrt{\eta})^3 - \dfrac{(\sqrt{b})^3}{(\sqrt{\eta})^3} = \bar{v}_3, \ldots, \end{cases}$$

$$(578)\quad \begin{cases} \sqrt{\zeta} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}} = w, & \zeta + \dfrac{c}{\zeta} = w_2, \quad (\sqrt{\zeta})^3 + \dfrac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt{\zeta})^3} = w_3, \ldots, \\ \sqrt{\zeta} - \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}, & \zeta - \dfrac{c}{\zeta} = \bar{w}_2, \quad (\sqrt{\zeta})^3 - \dfrac{(\sqrt{c})^3}{(\sqrt{\zeta})^3} = \bar{w}_3, \ldots, \end{cases}$$

einzuführen.

§ 60.

Beispiele für den Fall $n = 2\alpha$.

Mit Rücksicht auf die Vereinfachungen, welche in dem vorhergehenden Paragraphen angegeben wurden, bringt man die Gleichungen (570) besser auf die Form

$$(579)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = 2^{\frac{\varkappa}{2}} \cdot \varrho^{\frac{(\alpha+1)\varkappa}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = 2^{\frac{(\alpha+1)\varkappa}{2}} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = 2^{\frac{\varkappa}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, \quad \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

Sind $\sqrt{\xi\eta}$ und $\sqrt{\eta\zeta}$ Parameter*), so findet man aus diesen Gleichungen ohne Weiteres, welche Form die Gleichungen zwischen $\sqrt{\xi}$, $\sqrt{\eta}$, $\sqrt{\zeta}$ haben.

*) Die Entscheidung darüber giebt der allgemeine Satz, welcher in § 57 bewiesen wurde.

Auf diese Weise erhält man die folgenden Resultate:

I. $a = 3,\ n = 6;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\quad \varkappa = 6,\ \lambda = 12,\ \mu = 4;$

(580) $$\sqrt{\xi} = \frac{L(6)^3 L(2)^3}{L(3)^3},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(3)^6 L(2)^6}{L(6)^6},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(6)^2 L(3)^2}{L(2)^2};$$

(581) $$\begin{cases} \sqrt{\xi} + \dfrac{8}{\sqrt{\xi}} = u, & \sqrt{\eta} + \dfrac{1}{\sqrt{\eta}} = v, \quad \sqrt{\zeta} + \dfrac{9}{\sqrt{\zeta}} = w, \\ \sqrt{\xi} - \dfrac{8}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \sqrt{\eta} - \dfrac{1}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, \quad \sqrt{\zeta} - \dfrac{9}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}; \end{cases}$$

(582) $$u - \bar{v} = 0,\quad \bar{u} - \bar{w} = 0,\quad v - w = 0,$$

oder

(582 a) $$x = y - 18 = z - 2,$$

wo

(583) $$\begin{cases} x = \xi + \dfrac{64}{\xi} = u^2 - 16 = \bar{u}^2 + 16, \\ y = \eta + \dfrac{1}{\eta} = v^2 - 2 = \bar{v}^2 + 2, \\ z = \zeta + \dfrac{81}{\zeta} = w^2 - 18 = \bar{w}^2 + 18. \end{cases}$$

II. $a = 5,\ n = 10;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\quad \varkappa = 4,\ \lambda = 6,\ \mu = 2;$

(584) $$\sqrt{\xi} = \frac{L(10)^2 L(2)^2}{L(5)^2},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(5)^3 L(2)^3}{L(10)^3},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(10) L(5)}{L(2)};$$

(585) $$\begin{cases} \sqrt{\xi} + \dfrac{4}{\sqrt{\xi}} = u, & \sqrt{\eta} + \dfrac{1}{\sqrt{\eta}} = v, \quad \sqrt{\zeta} + \dfrac{5}{\sqrt{\zeta}} = w, \\ \sqrt{\xi} - \dfrac{4}{\sqrt{\xi}} = \bar{u}, & \sqrt{\eta} - \dfrac{1}{\sqrt{\eta}} = \bar{v}, \quad \sqrt{\zeta} - \dfrac{5}{\sqrt{\zeta}} = \bar{w}, \end{cases}$$

(586) $$u - \bar{v} = 0,\quad \bar{u} - \bar{w} = 0,\quad v - w = 0,$$

oder

(586a) $$x = y - 10 = z - 2,$$

wo

(587) $$\begin{cases} x = \xi + \dfrac{16}{\xi} = u^2 - 8 = \bar{u}^2 + 8, \\ y = \eta + \dfrac{1}{\eta} = v^2 - 2 = \bar{v}^2 + 2, \\ z = \zeta + \dfrac{25}{\zeta} = w^2 - 10 = \bar{w}^2 + 10. \end{cases}$$

III. $a = 7,\ n = 14;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 3;\quad \varkappa = 3,\ \lambda = 4,\ \mu = 4;$

(588) $$\xi = \frac{L(14)^3 L(2)^3}{L(7)^3},\quad \sqrt{\eta} = \frac{L(7)^2 L(2)^2}{L(14)^2},\quad \sqrt{\zeta} = \frac{L(14)^2 L(7)^2}{L(2)^2};$$

$$(589)\quad \begin{cases} \xi+\dfrac{8}{\xi}=x, & \eta+\dfrac{1}{\eta}=y, \quad \zeta+\dfrac{2401}{\zeta}=z, \\ \xi-\dfrac{8}{\xi}=\bar{x}, & \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v, \quad \sqrt{\zeta}+\dfrac{49}{\sqrt{\zeta}}=w, \end{cases}$$

$$(590)\quad \begin{cases} y=x+7, \quad w=v^3-11v, \\ z=x^3+5x^2-32x-62=y^3-16y^2+45y+64. \end{cases}$$

IV. $a=11,\ n=22;\ \alpha=1,\ \beta=5,\ \gamma=5;\ \varkappa=2,\ \lambda=12,\ \mu=4;$

$$(591)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(22)\,L(2)}{L(11)}, \quad \sqrt{\eta}=\frac{L(11)^6\,L(2)^6}{L(22)^6}, \quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(22)^2\,L(11)^2}{L(2)^2};$$

$$(592)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\dfrac{2}{\sqrt{\xi}}=u, & \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v, \quad \sqrt{\zeta}+\dfrac{121}{\sqrt{\zeta}}=w, \\ \sqrt{\xi}-\dfrac{2}{\sqrt{\xi}}=\bar{u}, & \sqrt{\eta}-\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v}, \quad \sqrt{\zeta}-\dfrac{121}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}, \end{cases}$$

$$(593)\quad \bar{v}=u_5+11(u_3+4u), \quad \bar{w}=\bar{u}_5+3\bar{u}_3-4\bar{u},$$

oder

$$(593\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \bar{v}=u^5+u^3-2u, \quad \bar{w}=\bar{u}^5+13\bar{u}^3+34\bar{u}, \\ (w-v)^5+64[(w+7v)^3-8(w+3v)(w-v)^2]=0, \end{cases}$$

oder

$$(594)\quad v=(u^2+1)\sqrt{u^6-4u^2+4}, \quad w=(u^2-7)\sqrt{u^6-4u^2+4}.$$

V. $a=13,\ n=26;\ \alpha=7,\ \beta=1,\ \gamma=3;\ \varkappa=12,\ \lambda=2,\ \mu=2;$

$$(595)\quad \sqrt{\xi}=\frac{L(26)^6\,L(2)^6}{L(13)^6}, \quad \sqrt{\eta}=\frac{L(13)\,L(2)}{L(26)}, \quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(26)\,L(13)}{L(2)};$$

$$(596)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\dfrac{64}{\sqrt{\xi}}=u, & \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v, \quad \sqrt{\zeta}+\dfrac{13}{\sqrt{\zeta}}=w, \\ \sqrt{\xi}-\dfrac{64}{\sqrt{\xi}}=\bar{u}, & \sqrt{\eta}-\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar{v}, \quad \sqrt{\zeta}-\dfrac{13}{\sqrt{\zeta}}=\bar{w}. \end{cases}$$

$$(597)\quad \begin{cases} u=\bar{v}_7-13(\bar{v}_5-4\bar{v}_3+6\bar{v}), \quad w=v_3-4v, \\ \bar{u}(u+11w_4-156w_2+210)=\bar{w}(36u_2+w_6-2w_4-9w_2-8092), \end{cases}$$

oder

$$(597\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} u=\bar{v}^7-6\bar{v}^5+\bar{v}^3+20\bar{v}, \quad w=v^3-7v, \\ \bar{u}(u^2+11w^4-728w^2+7856)=\bar{w}(36u^2+w^6-80w^4+1616w^2-17536). \end{cases}$$

VI. $a=17,\ n=34;\ \alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=2;\ \varkappa=4,\ \lambda=3,\ \mu=1;$

$$(598)\quad \xi=\frac{L(34)^4\,L(2)^4}{L(17)^4}, \quad \eta=\frac{L(17)^3\,L(2)^3}{L(34)^3}, \quad \zeta=\frac{L(34)\,L(17)}{L(2)};$$

$$(599)\quad \xi+\frac{16}{\xi}=x, \quad \eta+\frac{1}{\eta}=y, \quad \zeta+\frac{17}{\zeta}=z;$$

$$(600)\quad \begin{cases} y^3-34y^2+(-17x+116)y-x^2-34x+440=0, \\ z^3+6z^2-(5x+28)z-(x^2+26x+136)=0, \\ (z-y)^2-20y+4z-32=0. \end{cases}$$

VII. $a=19,\ n=38;\ \alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=9;\ \varkappa=6,\ \lambda=4,\ \mu=4;$

$$(601)\qquad \sqrt{\xi}=\frac{L(38)^3\,L(2)^3}{L(19)^3},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(19)^2\,L(2)^2}{L(38)^2},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(38)^2 L(19)^2}{L(2)^2};$$

$$(602)\qquad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\dfrac{8}{\sqrt{\xi}}=u,\quad \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v,\quad \sqrt{\zeta}+\dfrac{361}{\sqrt{\zeta}}=w,\\ \sqrt{\xi}-\dfrac{8}{\sqrt{\xi}}=\bar u,\quad \sqrt{\eta}-\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar v,\quad \sqrt{\zeta}-\dfrac{361}{\sqrt{\zeta}}=\bar w; \end{cases}$$

$$(603)\qquad \begin{cases} \bar v_5-u_3+19(-u_2\bar v-5uv_2-6\bar v_3+2u-5\bar v)=0,\\ w_3-(3v_3+16v)\,w_2+(3v_6+352v_4+32v_2+449)\,w\\ \qquad -v_9+176v_7-5136v_5-7673v_3-1152v=0, \end{cases}$$

oder

$$(603\text{a})\qquad \begin{cases} \bar v^5-109\bar v^3-95u\bar v^2-(19u^2+128)\,\bar v-(u^3+128u)=0,\\ (w-v^3)^3-7vw^2+(334v^4-1349v^2)\,w\\ \qquad +185v^7-6395v^5+22667v^3=0. \end{cases}$$

VIII. $a=23,\ n=46,\ \alpha=1,\ \beta=11,\ \gamma=11;\ \varkappa=1,\ \lambda=12,\ \mu=4;$

$$(604)\qquad \xi=\frac{L(46)\,L(2)}{L(23)},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(23)^6\,L(2)^6}{L(46)^6},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(46)^2\,L(23)^2}{L(2)^2};$$

$$(605)\qquad \xi+\frac{2}{\xi}=x,\quad \eta+\frac{1}{\eta}=y,\quad \zeta+\frac{23^4}{\zeta}=z;$$

$$(606)\qquad \begin{cases} y=x_{11}+23(x_{10}+11x_9+78x_8+404x_7+1635x_6\\ \qquad +5384x_5+14808x_4+34616x_3+69584x_2\\ \qquad +121184x+183614),\\ z=x_{11}+7x_{10}+13x_9+2x_8-4x_7-11x_6+8x_5+40x_4\\ \qquad -104x_3+112x_2-32x-46. \end{cases}$$

IX. $a=29,\ n=58;\ \alpha=5,\ \beta=7,\ \gamma=7;\ \varkappa=4,\ \lambda=6,\ \mu=2;$

$$(607)\qquad \sqrt{\xi}=\frac{L(58)^2\,L(2)^2}{L(29)^2},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(29)^3\,L(2)^3}{L(58)^3},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(58)\,L(29)}{L(2)};$$

$$(608)\qquad \begin{cases} \sqrt{\xi}+\dfrac{4}{\sqrt{\xi}}=u,\quad \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v,\quad \sqrt{\zeta}+\dfrac{29}{\sqrt{\zeta}}=w,\\ \sqrt{\xi}-\dfrac{4}{\sqrt{\xi}}=\bar u,\quad \sqrt{\eta}-\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=\bar v,\quad \sqrt{\zeta}-\dfrac{29}{\sqrt{\zeta}}=\bar w; \end{cases}$$

$$(609)\qquad \begin{cases} \bar v_5-u_7+29[-uv_4+(9u_2-185)\,\bar v_3-27u_3v_2\\ \qquad +(23u_4+197u_2+1298)\,\bar v\\ \qquad -7u_5-46u_3-430u]=0,\\ \bar w_5-9\bar u w_4+(37u_2-289)\,\bar w_3+(-91\bar u_3+1080\bar u)\,w_2\\ \qquad +(147u_4-2547u_2+15610)\,\bar w-\bar u_7-143\bar u_5\\ \qquad +4258\bar u_3-39358\bar u=0. \end{cases}$$

X. $a=31,\ n=62;\ \alpha=4,\ \beta=5,\ \gamma=15;\ \varkappa=3,\ \lambda=4,\ \mu=4;$

$$(610)\qquad \xi=\frac{L(62)^3\,L(2)^3}{L(31)^3},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(31)^2\,L(2)^2}{L(62)^2},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(62)^2\,L(31)^2}{L(2)^2};$$

$$(611)\qquad \begin{cases}\xi+\dfrac{8}{\xi}=x, & \eta+\dfrac{1}{\eta}=y, & \zeta+\dfrac{31^4}{\zeta}=z,\\[2mm] \xi-\dfrac{8}{\xi}=\bar{x}, & \sqrt{\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}=v, & \sqrt{\zeta}+\dfrac{31^2}{\sqrt{\zeta}}=w;\end{cases}$$

$$(612)\qquad \begin{aligned} y_4-x_5+31[&-(x+25)\,y_3+(8x_2-256x+1247)\,y_2\\ &+(-13x_3+205x_2-1928x+8146)\,y\\ &+(3x_4-64x_3+637x_2-4430x+17346)]=0.\end{aligned}$$

Die Gleichung zwischen v und w hat die Form

$$(613)\qquad \begin{aligned}(w-v^3)^5&+(a_1vw^4+a_2v^4w^3+a_3v^7w^2+a_4v^{10}w+a_5v^{13})\\ &+(b_1v^2w^3+b_2v^5w^2+b_3v^8w+b_4v^{11})\\ &+(c_1w^3+c_2v^3w^2+c_3v^6w+c_4v^9)\\ &+(d_1vw^2+d_2v^4w+d_3v^7)+(e_1v^2w+e_2v^5)\\ &+(f_1w+f_2v^3)+g_1v=0.\end{aligned}$$

Der Grad dieser Gleichung ist so hoch, dass die Berechnung der noch unbestimmten Coefficienten vorläufig übergangen werden möge*).

---

*) Es gereicht mir zur ganz besonderen Genugthuung, dass Herr H. Weber in seiner geistvollen und an Resultaten so reichen Abhandlung; „Zur Theorie der elliptischen Functionen", (Acta mathematica, Band 11, Seite 333—390) gleichfalls auf solche reducirte Parametergleichungen geführt wird, obgleich er von ganz anderen Gesichtspunkten ausgeht. Die „*Schläfli'schen Modulargleichungen*", welche er für die Transformation vom Grade

$$n=3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17 \text{ und } 19$$

auf Seite 349 gegeben hat, stimmen, bis auf die geänderte Bezeichnung, mit den Gleichungen überein, welche ich für die Parameter ξ und η in dem Vorhergehenden bei der Transformation vom Grade

$$n=6,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26,\ 34 \text{ und } 38$$

aufgestellt habe. Dass bei mir der Transformationsgrad doppelt so gross ist wie bei Herrn Weber, liegt nur an den von mir angewendeten Bezeichnungen, welche in die des Herrn Weber durch eine Transformation zweiten Grades übergehen.

Wegen dieses Umstandes brauche ich auch meine Methode nicht auf den Fall zu beschränken, wo $n=2a$ ist, sondern ich bin in der Lage, sie auf den allgemeineren Fall anzuwenden, wo n das Product von zwei beliebigen Primzahlen n' und n'' ist. Selbst auf den Fall, wo n eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist, lässt sich dieses Verfahren übertragen. Das grösste Gewicht lege ich aber darauf, dass ich durch meine Methode nicht *zwei*, sondern *drei* Parameter ξ, η, ζ erhalte, zwischen denen so einfache Gleichungen bestehen; denn daraus ergiebt sich ein wesentlicher Vortheil für die Anwendungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Benutzt man nämlich die Schläfli'schen Modulargleichungen des Herrn Weber zur Berechnung der singulären Invarianten,

§ 61.

Anwendung auf den Fall $n = 3a$.

Es sei $n' = 3$ und $n'' = a = 3b \pm 1$ eine Primzahl, also $n = 3a$, dann setze man

$$v' = \pm 1, \quad v'' = \pm b, \quad \text{so dass} \quad v'n'' - v''n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix} \mp b, & 3b \pm 1 \\ \mp 1, & 3 \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} \mp 1, & +3 \\ 0, & \mp 1 \end{pmatrix} \cdot \varrho\begin{pmatrix} b, & -1 \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \varrho^{-b},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix} \pm 1, & 3 \\ \pm b, & 3b \pm 1 \end{pmatrix} = \varrho^{b-3}.$$

Setzt man also

$$(614) \qquad \xi = \frac{L(3a)^\varkappa L(3)^\varkappa}{L(a)^\varkappa}, \quad \eta = \frac{L(a)^\lambda L(3)^\lambda}{L(3a)^\lambda}, \quad \zeta = \frac{L(3a)^\mu L(a)^\mu}{L(3)^\mu},$$

wo

$$(615) \qquad \varkappa = \frac{12\alpha}{a+1}, \qquad \lambda = \frac{12\beta}{a-1}, \qquad \mu = \frac{6\gamma}{a-1},$$

so findet man aus den Gleichungen (562), (565) und (566) für das *obere* Zeichen

$$(616) \qquad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{(2b+2)\varkappa} \cdot \dfrac{\sqrt{3^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta}, \\ \sqrt{\xi''} = \varrho^{(2b+2)\varkappa} \cdot \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\ \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{3^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, \quad \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}; \end{cases}$$

und für das *untere* Zeichen

---

so findet man zunächst eine Gleichung, welche noch überflüssige Factoren enthält. Wenn nun Herr Weber behauptet, dass sich diese überflüssigen Factoren *leicht* absondern lassen, so mag diese Behauptung für die behandelten einfachen Fälle richtig sein. Soll aber die Methode auch bei grösseren Werthen von n genügen, so ist es erforderlich, dass man noch eine *zweite* Gleichung angeben kann, von der die gesuchte singuläre Invariante eine Wurzel ist, welche aber mit der *ersten* Gleichung keinen der überflüssigen Factoren gemein hat. Erst dann kann man die Gleichung für die singuläre Invariante unter allen Umständen frei von fremden Factoren erhalten.

Aus den vorstehenden Beispielen erkennt man auch, dass in vielen Fällen die Gleichung zwischen ξ und ζ, oder die zwischen η und ζ einfacher wird als die zwischen ξ und η.

$$
(617)\quad \begin{cases}
\sqrt{\xi'} = \dfrac{\sqrt{3^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{(2b-2)\lambda} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta'} = \varrho^{(4b-2)\mu} \cdot \sqrt{\zeta}, \\[2mm]
\sqrt{\xi''} = \sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{-(2b-2)\lambda} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta''} = \varrho^{(4b-2)\mu} \cdot \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}, \\[2mm]
\sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{3^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, \qquad\qquad\qquad\quad \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}.
\end{cases}
$$

§ 62.

Beispiele für den Fall $n = 3a$.

I. $a = 2,\ n = 6;\quad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1;\quad \varkappa = 4,\ \lambda = 12,\ \mu = 6;$

$$
(618)\qquad \sqrt{\xi} = \frac{L(6)^2\, L(3)^2}{L(2)^2}, \qquad \sqrt{\eta} = \frac{L(2)^6\, L(3)^6}{L(6)^6}, \qquad \sqrt{\zeta} = \frac{L(6)^3\, L(2)^3}{L(3)^3}.
$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel I des § 60 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

II. $a = 5, n = 15;\ b = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2;\ \varkappa = 2,\ \lambda = 3,\ \mu = 3;$

$$
(619)\qquad \xi = \frac{L(15)^2\, L(3)^2}{L(5)^2}, \qquad \eta = \frac{L(5)^3\, L(3)^3}{L(15)^3}, \qquad \zeta = \frac{L(15)^3\, L(5)^3}{L(3)^3};
$$

$$
(620)\qquad \begin{cases}
\xi + \dfrac{9}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, \quad \zeta + \dfrac{125}{\zeta} = z, \\[2mm]
\xi - \dfrac{9}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, \quad \zeta - \dfrac{125}{\zeta} = \bar{z};
\end{cases}
$$

$$
(621)\qquad \bar{y} = x + 5, \qquad \bar{z} = \bar{x}(x + 1), \qquad z = y(\bar{y} - 9),
$$

oder

$$
(621\text{a})\qquad y = \sqrt{x^2 + 10x + 29}, \qquad z = (x - 4)\sqrt{x^2 + 10x + 29}
$$

III. $a = 7, n = 21;\ b = 2, \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1;\ \varkappa = 3,\ \lambda = 2,\ \mu = 1;$

$$
(622)\qquad \xi = \frac{L(21)^3\, L(3)^3}{L(7)^3}, \qquad \eta = \frac{L(7)^2\, L(3)^2}{L(21)^2}, \qquad \zeta = \frac{L(21)\ L(7)}{L(3)};
$$

$$
(623)\qquad \begin{cases}
\xi + \dfrac{27}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, \quad \zeta + \dfrac{7}{\zeta} = z, \\[2mm]
\xi - \dfrac{27}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, \quad \zeta - \dfrac{7}{\zeta} = \bar{z};
\end{cases}
$$

$$
(624)\qquad x = \bar{y}(y - 7), \qquad \bar{x} = \bar{z}(z - 1), \qquad y = z + 3.
$$

IV. $a = 11, n = 33;\ b = 4, \alpha = 1, \beta = 5, \gamma = 5;\ \varkappa = 1,\ \lambda = 6,\ \mu = 3;$

$$
(625)\qquad \xi = \frac{L(33)\ L(3)}{L(11)}, \qquad \eta = \frac{L(11)^6\, L(3)^6}{L(33)^6}, \qquad \zeta = \frac{L(33)^3\, L(11)^3}{L(3)^3};
$$

$$
(626)\qquad \begin{cases}
\xi + \dfrac{3}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, \quad \zeta + \dfrac{1331}{\zeta} = z, \\[2mm]
\xi - \dfrac{3}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, \quad \zeta - \dfrac{1331}{\zeta} = \bar{z},
\end{cases}
$$

$$(627)\qquad \begin{cases} y = x_5 + 11(x_4 + 6x_3 + 23x_2 + 63x + 126), \\ \bar{z} = \bar{x}_5 + 2\bar{x}_4 + 3\bar{x}_3 - 8\bar{x}_2 + 9\bar{x}, \end{cases}$$

oder

$$(627\,\mathrm{a})\qquad \begin{cases} y = x^5 + 11x^4 + 51x^3 + 121x^2 + 144x + 66, \\ \bar{z} = \bar{x}(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 20x + 9), \end{cases}$$

oder

$$(627\,\mathrm{b})\qquad \begin{cases} y - 2 = \bar{v}^2 = (x+1)(x^2 + 5x + 8)^2, \\ y + 2 = (x^3 + 7x^2 + 19x + 17)(x+2)^2, \\ z^2 = \bar{z}^2 + 5324 = (x+1)(x^3 + 7x^2 + 19x + 17) \times \\ \qquad\qquad \times (x^3 - 2x^2 - 9x + 16)^2. \end{cases}$$

Durch Elimination von x aus diesen Gleichungen findet man eine Gleichung zwischen y und z, die noch einfacher wird, wenn man die Grösse $\bar{y}$ durch die Relation

$$\bar{y}^2 = y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$$

einführt. Für die Anwendungen genügt die Gleichung

$$(628)\qquad \bar{y}(x^3 - 2x^2 - 9x + 16) = z(x+2)(x^2 + 5x + 8),$$

die sich aus den Gleichungen (627 b) ohne Weiteres ergiebt.

V. $a = 13,\ n = 39;\ b = 4,\ \alpha = 7,\ \beta = 1,\ \gamma = 2;\ \varkappa = 6,\ \lambda = 1,\ \mu = 1;$

$$(629)\qquad \xi = \frac{L(39)^6\, L(3)^6}{L(13)^6},\quad \eta = \frac{L(13)\, L(3)}{L(39)},\quad \zeta = \frac{L(39)\, L(13)}{L(3)};$$

$$(630)\qquad \begin{cases} \xi + \dfrac{729}{\xi} = x, & \eta + \dfrac{1}{\eta} = y, & \zeta + \dfrac{13}{\zeta} = z, \\ \xi - \dfrac{729}{\xi} = \bar{x}, & \eta - \dfrac{1}{\eta} = \bar{y}, & \zeta - \dfrac{13}{\zeta} = \bar{z}; \end{cases}$$

$$(631)\qquad \begin{cases} x = y_7 - 13(y_6 - 4y_5 + 2y_4 + 19y_3 - 28y_2 - 17y + 50), \\ z = y_2 - 3y - 3, \end{cases}$$

oder

$$(631\,\mathrm{a})\qquad \begin{cases} x = y^7 - 13y^6 + 45y^5 + 52y^4 - 493y^3 + 351y^2 \\ \qquad\qquad + 1215y - 1404, \\ z = y^2 - 3y - 5, \end{cases}$$

oder

$$(631\,\mathrm{b})\qquad \begin{cases} x - 54 = \bar{u}^2 = (y-2)(y^2 - 7y + 9)(y^2 - 2y - 9)^2, \\ x + 54 = (y+2)(y^2 + y - 3)(y-3)^2(y-5)^2, \\ z^2 - 52 = \bar{z}^2 = (y^2 - 7y + 9)(y^2 + y - 3). \end{cases}$$

Durch Elimination von y aus diesen Gleichungen findet man eine Gleichung zwischen x und z, die noch einfacher wird, wenn man die Grösse $\bar{x}$ durch die Relation

$$\bar{x}^2 = x^2 - 2916 = (x - 54)(x + 54)$$

einführt. Für die Anwendungen genügt die Gleichung

(632) $$\bar{x} = \bar{y}\bar{z}(y^2 - 2y - 9)(y - 3)(y - 5),$$

die sich aus den Gleichungen (631b) ohne Weiteres ergiebt.

VI. $a = 17, n = 51;\ b = 6, \alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 8;\ \varkappa = 2, \lambda = 3, \mu = 3;$

(633) $$\xi = \frac{L(51)^2\, L(3)^2}{L(17)^2}, \quad \eta = \frac{L(17)^3\, L(3)^3}{L(51)^3}, \quad \zeta = \frac{L(51)^3\, L(17)^3}{L(3)^3};$$

(634) $$\xi + \frac{9}{\xi} = x, \quad \eta + \frac{1}{\eta} = y, \quad \eta - \frac{1}{\eta} = \bar{y};$$

(635) $$\bar{y}_3 = x_4 + 17[(x + 14)\, y_2 + (-2x_2 + 26x - 109)\, \bar{y} \\ + (-2x_3 + 25x_2 - 140x + 504)],$$

oder

(635a) $$\bar{y}^3 - 17(x + 14)\,\bar{y}^2 + (34x^2 - 442x + 1244)\,\bar{y} \\ - (x^4 - 34x^3 + 389x^2 - 1428x + 1556) = 0.$$

Die Gleichungen zwischen ξ und ζ und zwischen η und ζ mögen vorläufig ihres hohen Grades wegen übergangen werden.

VII. $a = 19, n = 57;\ b = 6, \alpha = 5, \beta = 3, \gamma = 3;\ \varkappa = 3, \lambda = 2, \mu = 1;$

(636) $$\xi = \frac{L(57)^3\, L(3)^3}{L(19)^3}, \quad \eta = \frac{L(19)^2\, L(3)^2}{L(57)^2}, \quad \zeta = \frac{L(57)\, L(19)}{L(3)};$$

(637) $$\begin{cases} \xi + \frac{27}{\xi} = x, \quad \eta + \frac{1}{\eta} = y, \quad \zeta + \frac{19}{\zeta} = z, \\ \xi - \frac{27}{\xi} = \bar{x}, \quad \eta - \frac{1}{\eta} = \bar{y}, \quad \zeta - \frac{19}{\zeta} = \bar{z}; \end{cases}$$

(638) $$\begin{cases} \bar{y}_5 - x_3 + 19[\bar{y}x_2 - (y_3 + 30y_2 + 114y + 169)\,x \\ \qquad - 4\bar{y}_4 + 48\bar{y}_3 + 350\bar{y}_2 + 499\bar{y}] = 0, \\ \bar{x}_3 + 2\bar{z}x_2 + (4z_3 + 57z_2 + 438z + 2242)\,\bar{x} \\ \qquad - (\bar{z}_5 + 14\bar{z}_4 + 111\bar{z}_3 + 602\bar{z}_2 + 1885\bar{z}) = 0, \\ z_3 - 3(y + 1)\,z_2 + 3(y_2 - 4y + 9)\,z - y_3 + 42y_2 + 24 = 0, \end{cases}$$

oder

(638a) $$(z - y)^3 - 3z^2 - 12(y + 3)\,z + (42y^2 + 117y + 54) = 0.$$

§ 63.

Anwendung auf den Fall $n = 5a$.

Es sei $n' = 5$ und $n'' = a$ irgend eine Primzahl, welche von 5 verschieden ist, also $n = 5a$; dann wird

(639) $$\xi = \frac{L(5a)^\varkappa\, L(5)^\varkappa}{L(a)^\varkappa}, \quad \eta = \frac{L(a)^\lambda\, L(5)^\lambda}{L(5a)^\lambda}, \quad \zeta = \frac{L(5a)^\mu\, L(a)^\mu}{L(5)^\mu},$$

wobei

(640) $$\varkappa = \frac{6\alpha}{a + 1}, \quad \lambda = \frac{6\beta}{a - 1}, \quad \mu = \frac{4\gamma}{a - 1}.$$

Je nach den Werthen von a sind hier vier Fälle zu unterscheiden:

I. Für $a = 5b + 1$ setze man

$$\nu' = 1, \quad \nu'' = b, \quad \text{so dass} \quad \nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix}-b, & 5b+1\\ -1, & 5\end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix}-1, & +5\\ 0, & -1\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}b, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix} = \varrho^{-b+2},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix}1, & 5\\ b, & 5b+1\end{pmatrix} = \varrho^{b-5},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(641)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{4(b+1)\varkappa}\cdot\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta'} = \sqrt{\zeta},\\[2ex] \sqrt{\xi''} = \varrho^{4(b+1)\varkappa}\cdot\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta''} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}},\\[2ex] \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, \quad \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

II. Für $a = 5b + 2$ setze man

$$\nu' = 3, \quad \nu'' = 3b + 1, \quad \text{so dass} \quad \nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix}-3b-1, & 5b+2\\ -3, & +5\end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix}-3, & +5\\ +1, & -2\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}b, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix} = \varrho^{-b-1},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix}3, & 5\\ 3b+1, & 5b+2\end{pmatrix} = \varrho^{b-2},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(642)\quad \begin{cases} \sqrt{\xi'} = \varrho^{(8b+6)\varkappa}\cdot\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'} = \varrho^{-(4b+2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta'} = \varrho^{-6b\mu}\cdot\sqrt{\zeta},\\[2ex] \sqrt{\xi''} = \varrho^{(8b+6)\varkappa}\cdot\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''} = \varrho^{(4b+2)\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\zeta''} = \varrho^{-6b\mu}\cdot\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}},\\[2ex] \sqrt{\bar{\xi}} = \dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta}, \quad \sqrt{\bar{\zeta}} = \dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}. \end{cases}$$

III. Für $a = 5b + 3$ setze man

$$\nu' = 2, \quad \nu'' = 2b + 1, \quad \text{so dass} \quad \nu' n'' - \nu'' n' = +1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1 = \varrho\begin{pmatrix}-2b-1, & 5b+3\\ -2, & +5\end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix}-2, & +5\\ +1, & -3\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}b, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix} = \varrho^{-b-1},$$

$$\varrho_2 = \varrho\begin{pmatrix}2, & 5\\ 2b+1, & 5b+3\end{pmatrix} = \varrho^{b-2},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(643)\begin{cases}\sqrt{\xi'}=\varrho^{(6b+6)\varkappa}.\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'}=\varrho^{-(2b+2)\lambda}.\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'}=\varrho^{-3b\mu}.\sqrt{\zeta},\\ \sqrt{\xi''}=\varrho^{(6b+6)\varkappa}.\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''}=\varrho^{(2b+2)\lambda}.\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''}=\varrho^{-3b\mu}.\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}},\\ \sqrt{\bar\xi}=\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar\eta}=\sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar\zeta}=\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}.\end{cases}$$

IV. Für $a=5b+4$ setze man

$$v'=4,\quad v''=4b+3,\quad \text{so dass}\quad v'n''-v''n'=+1$$

wird. Dadurch erhält man aus den Gleichungen (561) und (564)

$$\varrho_1=\varrho\begin{pmatrix}-4b-3, & 5b+4\\ -4, & 5\end{pmatrix}=\varrho\begin{pmatrix}-4, & +5\\ +3, & -4\end{pmatrix}\cdot\varrho\begin{pmatrix}b, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix}=\varrho^{-b-4},$$

$$\varrho_2=\varrho\begin{pmatrix}4, & 5\\ 4b+3, & 5b+4\end{pmatrix}=\varrho^{b+1},$$

und deshalb aus den Gleichungen (562), (565) und (566)

$$(644)\begin{cases}\sqrt{\xi'}=\varrho^{10(b+1)\varkappa}.\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\eta'}=\varrho^{-6(b+1)\lambda}.\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta'}=\varrho^{-3(3b+1)\mu}.\sqrt{\zeta},\\ \sqrt{\xi''}=\varrho^{10(b+1)\varkappa}.\sqrt{\xi}, & \sqrt{\eta''}=\varrho^{6(b+1)\lambda}.\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}, & \sqrt{\zeta''}=\varrho^{-3(3b+1)\mu}.\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}},\\ \sqrt{\bar\xi}=\dfrac{\sqrt{5^\varkappa}}{\sqrt{\xi}}, & \sqrt{\bar\eta}=\sqrt{\eta}, & \sqrt{\bar\zeta}=\dfrac{\sqrt{a^\mu}}{\sqrt{\zeta}}.\end{cases}$$

§ 64.

Beispiele für den Fall $n=5a$.

I. $a=2,\ n=10;\ \alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1;\ \varkappa=2,\ \lambda=6,\ \mu=4;$

$$(645)\qquad \sqrt{\xi}=\frac{L(10)\,L(5)}{L(2)},\quad \sqrt{\eta}=\frac{L(2)^3\,L(5)^3}{L(10)^3},\quad \sqrt{\zeta}=\frac{L(10)^2\,L(2)^2}{L(5)^2}.$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel II des § 60 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

II. $a=3,\ n=15;\ \alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=1;\ \varkappa=3,\ \lambda=3,\ \mu=2;$

$$(646)\qquad \xi=\frac{L(15)^3\,L(5)^3}{L(3)^3},\quad \eta=\frac{L(3)^3\,L(5)^3}{L(15)^3},\quad \zeta=\frac{L(15)^2\,L(3)^2}{L(5)^2}.$$

Dieses Beispiel geht also in Beispiel II des § 62 über, wenn man ξ mit ζ vertauscht.

III. $a=7,\ n=35;\ \alpha=4,\ \beta=1,\ \gamma=3;\ \varkappa=3,\ \lambda=1,\ \mu=2;$

(647) $$\xi=\frac{L(35)^3\,L(5)^3}{L(7)^3},\quad \eta=\frac{L(7)\,L(5)}{L(35)},\quad \zeta=\frac{L(35)^2\,L(7)^2}{L(5)^2};$$

(648) $$\begin{cases} \xi+\frac{125}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{49}{\zeta}=z,\\ \xi-\frac{125}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{49}{\zeta}=\bar{z}; \end{cases}$$

(649) $$\begin{cases} x=\bar{y}_4-7(y_3-\bar{y}_2-2y),\\ \bar{x}_3+\bar{z}x_2+(z_2-16z-249)\bar{x}-\bar{z}_4-\bar{z}_3+58\bar{z}_2+457\bar{z}=0,\\ z=\bar{y}_3-5y_2+5, \end{cases}$$

oder

(649a) $$x=y(\bar{y}^3-7\bar{y}^2+9\bar{y}+7),\qquad z=\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-5,$$

oder

(649b) $$\begin{cases} \bar{x}=(\bar{y}-1)(\bar{y}-4)\sqrt{(\bar{y}+1)(\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-19)},\\ \bar{z}=(\bar{y}-3)\sqrt{(\bar{y}+1)(\bar{y}^3-5\bar{y}^2+3\bar{y}-19)}. \end{cases}$$

Daraus folgt noch die für die Anwendungen brauchbare Gleichung

(650) $$(\bar{y}-1)(\bar{y}-4)\bar{z}=(\bar{y}-3)\bar{x}.$$

IV. $a=11,\ n=55;\ \alpha=2,\ \beta=5,\ \gamma=5;\ \varkappa=1,\ \lambda=3,\ \mu=2;$

(651) $$\xi=\frac{L(55)\,L(5)}{L(11)},\quad \eta=\frac{L(11)^3\,L(5)^3}{L(55)^3},\quad \zeta=\frac{L(55)^2\,L(11)^2}{L(5)^2};$$

(652) $$\begin{cases} \xi+\frac{5}{\xi}=x, & \eta+\frac{1}{\eta}=y, & \zeta+\frac{121}{\zeta}=z,\\ \xi-\frac{5}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\frac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\frac{121}{\zeta}=\bar{z}; \end{cases}$$

(653) $$\begin{cases} y_2=x_5+11[(x_2+10x+35)\,y\\ \qquad\qquad +(x_4+5x_3+20x_2+75x+207)],\\ z_2=(x_2-10)\,z+x_5+x_4+25x_2-25x-58, \end{cases}$$

oder

(653a) $$\begin{cases} y^2-11(x+5)^2y-(x^5+11x^4+30x^3+0+125x+629)=0,\\ z^2-(x^2-20)y-(x^5+x^4-25x^3+5x^2+100x-16)=0, \end{cases}$$

oder

(653b) $$\begin{cases} 2y-11(x+5)^2=(x^2+18x+61)\sqrt{4x+21},\\ 2z-(x^2-20)=(x^2-2x-4)\sqrt{4x+21}. \end{cases}$$

Daraus findet man noch die für die Anwendungen brauchbare Gleichung

(654) $$[2y-11(x+5)^2](x^2-2x-4) = [2z-(x^2-20)](x^2+18x+61).$$

Bemerkenswerth ist es, dass man die vorstehenden Gleichungen auch auf die Form

(655) $$\begin{cases} \bar{y}^2=(x+5)^2(11y+x^3+x^2-5x+25),\\ \bar{z}^2=(x^2-20)(z+x^3+x^2-5x+25),\\ \bar{y}^2(x^2-20)-\bar{z}^2(x+5)^2+(z-11y)(x+5)^2(x^2-20)=0 \end{cases}$$

bringen kann.

V. $a=13,\ n=65;\ \alpha=7,\ \beta=2,\ \gamma=3;\ \varkappa=3,\ \lambda=1,\ \mu=1;$

(656) $$\xi=\frac{L(65)^3L(5)^3}{L(13)^3},\quad \eta=\frac{L(13)\,L(5)}{L(65)},\quad \zeta=\frac{L(65)L(13)}{L(5)};$$

(657) $$\begin{cases}\xi+\dfrac{125}{\xi}=x, & \eta+\dfrac{1}{\eta}=y, & \zeta+\dfrac{13}{\zeta}=z,\\ \xi-\dfrac{125}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\dfrac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\dfrac{13}{\zeta}=\bar{z};\end{cases}$$

(658) $$\begin{cases}x_2-\bar{y}_7+13[(y_3-2\bar{y}_2)\,x+(2y_6-16\bar{y}_5+36y_4+33\bar{y}_3\\ \qquad\qquad -108y_2-103\bar{y}+166)]=0,\\ z_2+5yz-\bar{y}_3+10y_2+30=0,\end{cases}$$

oder

(658a) $$\begin{cases}x^2+13y(\bar{y}-1)^2x-(\bar{y}^7-26\bar{y}^6+215\bar{y}^5-624\bar{y}^4+625\bar{y}^3\\ \qquad\qquad -702\bar{y}^2+1099\bar{y}-88)=0,\\ z^2+5yz-\bar{y}^3+10\bar{y}^2-3\bar{y}+24=0,\end{cases}$$

oder

(658b) $$\begin{cases}2x=-13y(\bar{y}-1)^2+(\bar{y}-2)(\bar{y}+1)(\bar{y}+9)\sqrt{4\bar{y}+1},\\ 2z=-5y+(\bar{y}-2)\sqrt{4\bar{y}+1}.\end{cases}$$

Die Gleichung zwischen x und z kann man daher ersetzen durch die Gleichung

(659) $$(2z+5y)(\bar{y}+1)(\bar{y}+9)=2x+13y(\bar{y}-1)^2.$$

VI. $a=17,\ n=85;\ \alpha=3,\ \beta=8,\ \gamma=4;\ \varkappa=1,\ \lambda=3,\ \mu=1;$

(660) $$\xi=\frac{L(85)\,L(5)}{L(17)},\quad \eta=\frac{L(17)^3\,L(5)^3}{L(85)^3},\quad \zeta=\frac{L(85)\,L(17)}{L(5)};$$

(661) $$\begin{cases}\xi+\dfrac{5}{\xi}=x, & \eta+\dfrac{1}{\eta}=y, & \zeta+\dfrac{17}{\zeta}=z;\\ \xi-\dfrac{5}{\xi}=\bar{x}, & \eta-\dfrac{1}{\eta}=\bar{y}, & \zeta-\dfrac{17}{\zeta}=\bar{z};\end{cases}$$

(662) $$\bar{z}_3-x\bar{z}_2-(x_2-12)\,\bar{z}+8\bar{x}z-\bar{x}_4-13\bar{x}_2=0,$$

oder

(662a) $$\bar{z}(z^2-xz-x^2+5)=\bar{x}(x^3+3x-8z).$$

Die Gleichungen zwischen ξ und η, bezw zwischen η und ζ mögen vorläufig übergangen werden.

Ebenso soll die Ausführung weiterer Beispiele an dieser Stelle unterbleiben, weil die Anwendung dieser Untersuchungen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen noch andere Hülfsmittel bieten wird, durch welche man die Rechnungen einfacher gestalten kann.

Hannover, im März 1890.

Inhalts-Verzeichniss.

VII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $4a$.

VIII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $2^\alpha . a$.

IX. Abschnitt.

Transformation vom Grade $3a$.

X. Abschnitt.

Transformation vom Grade $9a$.

XI. Abschnitt.

Transformation vom Grade $6a$.

Dritter Theil.

Vereinfachung der Parametergleichungen.

XII. Abschnitt.

Beziehungen zwischen den verschiedenen Wurzeln einer Parametergleichung.