

**9. Einige Bemerkungen
zu zwei Aufsätzen von Lecher und König;
von H. Lorberg.**

Gegenüber einer Abhandlung von Lecher¹⁾, sowie der Erwiderung auf dieselbe von König²⁾ mögen einem Vertreter der älteren Richtung ein paar elementare Bemerkungen gestattet sein.

Dass die Kraft eines Magnetpoles auf ein Stromelement an letzterem angreift, darüber scheint in der experimentellen wie in der mathematischen Physik, soweit man überhaupt von *Stromelementen* spricht, Einverständnis zu bestehen; anders aber ist es hinsichtlich der Kraft eines Stromelementes auf einen Magnetpol. Maxwell in seinem Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus spricht sich über diese Frage nicht aus; denn das um einen Strom existierende magnetische Kraftfeld, in welchem an jedem Magnetpol eine Kraft angreift, leitet er nur für einen beiderseits unendlichen geradlinigen Strom ab, und zwar aus dem Potential einer Magnetschale, welche er sich durch den geradlinigen Stromleiter und durch den ihn schliessenden, ganz im Unendlichen verlaufenden Leiterteil gelegt denkt, also für einen geschlossenen Strom. Kirchhoff³⁾ legt die Hypothese der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung zu Grunde, wonach bei starrer Verbindung des Poles und des Stromelementes das System durch die gegenseitigen, inneren Kräfte nicht bewegt werden kann, also sowohl die beiden Kräfte als auch die beiden Kräftepaare, mithin auch die beiden Drehungsmomente um eine beliebige, mit dem System starr verbundene Axe entgegengesetzt gleich sein müssen, woraus folgt, — ein Schluss, den Kirchhoff allerdings, vielleicht als zu selbstverständlich, nicht ausdrücklich zieht —

1) E. Lecher, Wied. Ann. 69. p. 779. 1899.

2) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 854. 1900.

3) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus p. 205. 1891.

dass die beiden Kräfte durch denselben Punkt gehen, dass also die Kraft eines Stromelementes auf einen Pol durch das Stromelement *geht*. (Es wäre natürlich bei nicht starrer Verbindung beider ungenau oder vielmehr, wörtlich verstanden, widersinnig zu sagen, die Kraft eines Stromelementes auf einen Pol *greife* am Stromelement *an*.) Zu demselben Resultat kommt Righi¹⁾ auf Grund der Hypothese, dass ein Elementarstrom hinsichtlich der ponderomotorischen Wirkungen, welche er auf ein Stromelement ausübt oder von einem Stromelement erfährt, mit einem magnetischen Molecül äquivalent ist. Nach dieser durch das Biot-Savart'sche Gesetz für die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement in Verbindung mit dem Princip der Reaction ausgesprochenen Theorie — der einzigen, welche bisher in der mathematischen Physik auf die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen zwischen ungeschlossenen endlichen Stromleitern und Magneten Anwendung gefunden hat — ist also das Drehungsmoment, welches ein geradliniges Stromstück auf einen Pol ausübt, um das Stromstück (die z -Axe) als Axe immer gleich Null, mag das Stromstück endliche oder unendliche Länge haben, und das Drehungsmoment des ganzen geschlossenen Stromes um die z -Axe rührt lediglich von dem Rest α des geschlossenen Stromes her; bezeichnet ids ein Element von α , (xyz) seine Coordinaten, $(x'y'z')$ die Coordinaten des Poles μ , $(K_x K_y K_z)$ die Componenten der von ds auf μ ausgeübten Kraft K , welche also auf der Ebene (ds, μ) senkrecht steht und durch ds geht, so ist das Drehungsmoment dieser Kraft um die z -Axe:

$$(1) \quad \begin{cases} dM(\alpha) = xK_y - yK_x = [(x-x')K_y - (y-y')K_x] \\ \quad + [x'K_y - y'K_x] = dM_1 + dM_2. \end{cases}$$

dM_1 ist das Drehungsmoment der Kraft K um die der z -Axe parallele Axe durch den Pol, und hat bekanntlich den Wert:

$$(2) \quad dM_1 = -\mu ids \frac{\partial}{\partial s} [\cos(r, z)],$$

wo (r, z) den Winkel zwischen der von μ nach ds gezogenen Richtung r und der positiven z -Richtung (der Stromrichtung)

1) A. Righi, Bologna Mem. (5) I. — Vgl. Fortschritte der Math. 1890. p. 1084.

bezeichnet; dM_2 ist das Drehungsmoment der im Pol angreifend gedachten Kraft K um die z -Axe. Ist also 1 und 2 der Eintritts- und Austrittspunkt des Stromes in der z -Axe, so ist das ganze Drehungsmoment des Stromtheiles α :

$$(3) \quad M(\alpha) = M_1(\alpha) + M_2(\alpha) = \mu i [\cos(r_2, z) - \cos(r_1, z)] + M_2(\alpha),$$

wo $M_2(\alpha)$ das Drehungsmoment der im Pol angreifend gedachten resultirenden Kraft des Stromstückes α um die z -Axe bezeichnet. Betrachtet man den Strom in der z -Axe mathematisch als beiderseits unendlich, so wird $M_1(\alpha) = 2\mu i$; ferner ist dann $M_2(\alpha) = 0$, da die resultirende Kraft des ganz im Unendlichen liegenden Stromstückes α den Wert Null hat, folglich, wenn man sie am Pol angebracht denkt, auch ihr Drehungsmoment um die z -Axe; nach Gleichung (3) ergibt sich also für das Drehungsmoment des ganzen geschlossenen Stromes:

$$(4) \quad M = M(z) + M(\alpha) = M(\alpha) = 2\mu i,$$

also derselbe Wert, den Hr. König¹⁾ nach Maxwell (II, p. 171) für das Drehungsmoment $M(z)$ des unendlichen Stromtheiles in der z -Axe allein ableitet. Nach dem Biot-Savart'schen Gesetz in Verbindung mit dem Princip der Reaction darf man also die Wirkung des ganz im Unendlichen liegenden Schlusstückes nicht vernachlässigen, mithin nicht einen beiderseits unendlichen geradlinigen Strom *für sich allein* als äquivalent einer Magnetschale annehmen und hieraus folgern, dass seine Kraft auf einen Pol an diesem angreife. Uebrigens erkennt Hr. König die Gültigkeit des Principes der Reaction selbst ausdrücklich an, indem er in seiner Abhandlung über einen neuen, von ihm construirten elektromagnetischen Rotationsapparat sagt²⁾: „Verbindet man die Röhre und das Magnetbündel fest miteinander, so tritt keine Rotation ein, womit sich zugleich die Gleichheit der beiden entgegengesetzten Drehungsmomente beweisen lässt.“ Aus der Gleichheit der Drehungsmomente aber, in Verbindung mit dem Satz, dass auch die gegenseitigen Kräfte entgegengesetzt gleich sind, folgt mit Notwendigkeit, dass die Kraft eines Stromelementes

1) W. König, l. c. p. 857.

2) W. König, Wied. Ann. 60. p. 521. 1897.

auf einen Pol und eines Poles auf ein Stromelement durch denselben Punkt, also durch das Stromelement gehen.

Hiernach ist Hr. Lecher mit der erwähnten Kirchhoff-Righi'schen Theorie in Uebereinstimmung, wenn er behauptet¹⁾, dass bei dem Pohl'schen Versuch die Ursache der Rotation des Magneten nicht in dem in der Drehungsaxe fließenden Stromteil $a a'$ (Fig. 1 seiner Abhandlung), welcher vielmehr nach jener Theorie vollkommen wirkungslos ist, sondern in dem Rest z des geschlossenen Stromes zu suchen sei; und wenn Hr. König den Ausdruck: „Die Ursache der Rotation des Poles liege im Leiter, und zwar vorwiegend in einem bestimmten Teil desselben“ bemängelt und statt dessen gesagt wissen will: „die Ursache ist die Kraft, welche der Stromkreis am Ort des Magneten ausübt“, so scheint mir das ein blosser Wortstreit; zudem wird jener Ausdruck durch die Bedürfnisse der theoretischen Physik gerechtfertigt, welche nicht umhin kann, die Wirkung einzelner Teile eines geschlossenen Stromes zu betrachten, um viele Erscheinungen des Elektromagnetismus und der Induction quantitativ zu erklären.

Was nun aber den von Hrn. Lecher angestellten Versuch (Fig. 3a seiner Abhandlung) betrifft, durch welchen er seine obige Behauptung experimentell bewiesen zu haben glaubt, so stimme ich allerdings mit der Ansicht des Hrn. König, dass demselben jede Beweiskraft fehlt, überein, nicht aber mit der von ihm gegebenen Begründung. Bei diesem Versuch steigt der Strom J in dem langen feststehenden Teil $a a'$ der Drehungsaxe (der z -Axe) auf, tritt aus einem Quecksilbernapfchen in einen rotirenden Arm, an welchem der verticale Magnetstab mit seiner Mitte festsetzt, geht durch die obere Hälfte des Magneten, dann durch einen am Magneten befestigten rechtwinklig gebogenen Draht zuerst vertical weiter, dann zum drehbaren Teil der Axe und von dieser in die feststehende Leitung und über die Batterie nach a zurück. Der untere Pol (Nordpol) steht vorwiegend unter dem Einfluss des feststehenden Leiterteiles $a a'$; betrachtet man diesen als beiderseits unendlich und nimmt mit Hrn. König die von ihm auf den Pol von der Stärke m ausgeübte Kraft als am Pol an-

1) E. Lecher, l. c. p. 782.

greifend an (vgl. dagegen die obige Bemerkung zu Gleichung (4)), so ist das Drehungsmoment dieser Kraft um die z -Axe:

$$(5) \quad M_N = 2 m J.$$

Durchaus im Widerspruch, wie ich meine, mit den bisherigen Principien der Mechanik steht aber die Art, wie Hr. König das auf den Südpol, der selbst vom Strom durchflossen wird, wirkende Drehungsmoment berechnet. Er ersetzt den Pol durch eine Belegung der oberen Endfläche des cylindrischen Magneten, wobei auf jedes Flächenelement df_1 eine Magnetismusmenge μdf_1 kommt, betrachtet den Strom wieder als einen beiderseits unendlichen geradlinigen, indem er ihn zunächst durch einen cylindrischen Leiter von gleichem Querschnitt mit dem Magneten aus diesem herausgeführt annimmt, und zerlegt ihn in Stromfäden parallel der z -Axe, von denen der durch ein Element df_2 der Endfläche gehende die Intensität $j df_2$ hat. Das Drehungsmoment der am Pol in df_1 angreifenden Kraft K des Stromfadens in df_2 um die Axe des Stromfadens ist nach Gleichung (5)

$$M_{12} = 2 \mu df_1 \cdot j df_2;$$

ebenso gross und gleich gerichtet ist das Drehungsmoment um eine durch den Pol gehende, der z -Axe parallele Axe, welches von der entgegengesetzt gerichteten und am Stromfaden angreifenden Kraft K des Poles auf den Stromfaden herrührt; die Wechselwirkung zwischen dem Pol in df_1 und dem Stromfaden in df_2 liefert also an dem starr verbundenen System Pol + Stromfaden + z -Axe ein Kräftepaar vom Moment M_{12} ; und ein gleiches und gleich gerichtetes Kräftepaar liefert die Wechselwirkung zwischen dem Stromfaden in df_1 und dem Pol in df_2 . Bezeichnen wir nun mit ${}_{12}\sum$ eine Summation über sämtliche Elementenpaare df_1, df_2 , jedes Paar nur einmal genommen, so liefert die Wechselwirkung des ganzen Systems ein resultirendes Kräftepaar oder Drehungsmoment um die z -Axe:

$$(5a) \quad \begin{cases} M_s = {}_{12}\sum 2 M_{12} = {}_1\sum {}_2\sum M_{12} \\ \quad = {}_1\sum 2 \mu df_1 {}_2\sum j df_2 = 2 m J. \end{cases}$$

Da nun dieses Drehungsmoment die entgegengesetzte Richtung hat, wie das in Gleichung (5), so heben sich beide einander

auf, und es erklärt sich nach Hrn. König das negative Resultat des Lecher'schen Versuches. In dieser ganzen Betrachtungsweise ändert sich nichts Wesentliches, wenn man statt eines einzigen Magneten zwei symmetrisch zur z -Axe liegende mit den Polen m und m' anbringt; das Drehungsmoment auf die zwei unteren Nordpole ist dann $M_N = 2(m + m')J$; für die zwei Südpole kommt zu dem obigen Drehungsmoment $(m + m')J$, welches von der Wechselwirkung zwischen jedem Pol und dem ihn durchfliessenden Strom $J/2$ herrührt, noch das Drehungsmoment der Wechselwirkung zwischen jedem Pol und dem durch den anderen Pol fliessenden Strom hinzu, welches nach Gleichung (5a) gleich $(m + m')J$ ist; die Summe ist wieder

$$M_S = 2(m + m')J = M_N.$$

Nach dieser Schlussweise soll also ein cylindrischer, von einem hinreichend langen, seiner Axe parallelen Strom durchflossener Magnet durch die Wechselwirkung zwischen dem Strom und dem einen Pol um seine Axe oder um eine beliebige parallele Axe, an welcher der Magnet befestigt ist, gedreht werden, falls man die Wechselwirkung zwischen dem Strom und dem anderen Pol dadurch ausschliesst, dass man den Strom dem Magneten etwa in seiner Mitte zuleitet. („Wie bei dem bekannten Versuch mit dem um seine Axe rotirenden Magneten“, setzt Hr. König hinzu; über die nach meiner Ansicht richtige, in der schon oben besprochenen Weise auf dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung beruhende Erklärung dieses Versuches vgl. z. B. mein Lehrbuch der Physik, p. 300. Leipzig 1877.) Wo bleibt aber bei dieser Schlussweise das bisher in der Mechanik als gültig angenommene Princip, dass ein starres System durch Kräfte, welche zwischen seinen Teilen wirken, nicht in Bewegung gesetzt werden kann, dass daher die zwei Drehungsmomente jeder Wechselwirkung um eine beliebige Axe nicht gleichsinnig-gleich, sondern entgegengesetzt-gleich sein müssen? Und als starr miteinander verbunden hat doch bisher jede Theorie einen Strom und einen Magnetpol angenommen, wenn ihre ponderabeln Träger starr miteinander verbunden sind, da die zwischen der Elektrizität und dem Magnetismus wirkenden Kräfte sich auf die ponderabeln Träger übertragen. Und wie stimmt diese Schluss-

weise mit dem oben angeführten Versuch des Hrn. König, wonach die Röhre und das Magnetbündel bei fester Verbindung beider sich nicht um die Axe drehen, sowie mit seiner eigenen Erklärung dieses Resultates: „weil die beiden Drehungsmomente *entgegengesetzt-gleich* sind“?

Nach dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, aus welchem folgt, dass die beiden Drehungsmomente der Wechselwirkung zwischen einem Stromelement und einem Pol in Bezug auf jede beliebige Axe *entgegengesetzt-gleich* sind, dass daher die beiden *entgegengesetzt-gleichen* Kräfte durch denselben Punkt, also durch das Stromelement gehen, ergiebt sich das Resultat des Lecher'schen Versuches höchst einfach. Hiernach fällt nämlich die Wirkung des ganzen Stromteiles vom Eintritt in die Drehungsaxe bis zum Austritt (*aa'bcw* der Fig. 3 a der Lecher'schen Abhandlung) vollständig fort, und zwar der Teil *aa'* in dem feststehenden Teil der Drehungsaxe deshalb, weil seine Kraft auf den Magneten durch die Drehungsaxe selbst geht, der Rest deshalb, weil sein Träger mit dem Magneten starr verbunden ist; die Wirkung rührt also lediglich von dem Stromteil von *w* bis *a* in dem äusseren, festliegenden Leiter her. Dieser Teil ist aber überall von dem Magneten weit entfernt, im Mittel viel weiter als bei dem Pohl'schen Versuch (Hr. Lecher führt ihn absichtlich „in weitem Bogen von *w* aus zur Batterie“), und ausserdem liegen beide Pole zu ihm nahezu symmetrisch, sodass die Drehungsmomente auf dieselben sich zum grössten Teil einander aufheben; die Wirkung muss also jedenfalls sehr gering sein, viel kleiner als bei dem Versuch 3 b, bei welchem die Wirkungen des nächstliegenden Stromteiles auf beide Pole sich summiren; wenn also Hr. Lecher das „merkwürdige Resultat“ findet, dass „auch bei dem ersten Versuch immer eine Ablenkung eintritt, aber meist eine kleinere als im zweiten Versuch und auch im Zeichen oft *entgegengesetzt*“, so scheint mir daran durchaus nichts Merkwürdiges zu sein. Dagegen bei dem Pohl'schen Versuch (Fig. 1 der Lecher'schen Abhandlung) fällt zwar ebenfalls die Wirkung des Stromteiles in der Drehungsaxe und in dem von der Drehungsaxe zur Quecksilberrinne gehenden, mit dem Magneten starr verbundenen Arm fort, aber der übrige, in dem festliegenden äusseren

Leiter fließende Stromteil, welcher von der Rinne nach dem unteren Ende der Drehungsaxe geht, kommt dem Magneten bei der Drehung sehr nahe und wirkt vorwiegend auf den unteren Pol. Hiernach glaube ich dem Versuch des Hrn. Lecher jede Beziehung zu dem Pohl'schen Versuch absprechen zu müssen; dagegen ist er von Interesse als eine experimentelle Bestätigung der alten Annahme, dass die Kraft eines geradlinigen Stromteiles und folglich auch eines Stromelementes auf einen Pol *nicht durch den Pol, sondern durch das Stromelement geht*.

Uebrigens ist das Resultat des Hrn. Lecher, dass „bei dem Pohl'schen Versuch die Ursache der Rotation des Magneten nicht in dem in der Drehungsaxe fließenden Stromteil aa' , sondern in dem Rest z des geschlossenen Stromes zu suchen ist“, welches Resultat ihn veranlasst, den Pohl'schen Versuch und seine Erklärung als „experimentell und theoretisch falsch“ zu bezeichnen, nicht neu. Z. B. heisst es in meinem Lehrbuch der Physik (p. 300): „Aus diesem Versuch folgt, dass die Kraft eines ungeschlossenen Stromes und folglich auch eines Stromelementes auf einen Magnetpol nicht durch den Pol geht; man nimmt dieselbe als durch das Stromelement gehend an.“ Damit ist die Unwirksamkeit des in der Drehungsaxe fließenden Stromteiles bei dem Pohl'schen Versuch ohne weiteres behauptet.

Bonn, im September 1900.

(Eingegangen 4. September 1900.)