

Sul
rapporto $\frac{\eta'}{\eta}$ considerato come funzione
del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi
delle funzioni ellittiche di Weierstrass.

(Di CARLO BIGIARI, a Pisa.)

Le funzioni di WEIERSTRASS $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $p(u)$, oltre che dalla variabile u , vengono a dipendere dagli invarianti g_2 , g_3 o dai semiperiodi ω , ω' , i quali ultimi possono assumere tutti i sistemi di valori tali che il rapporto $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ sia un numero complesso finito avente il coefficiente dell'immaginario positivo e sempre differente da zero. Questo fatto conduce a varie formule importanti fra ω , ω' , τ , g_2 , g_3 , $J = J(\tau)$, $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$. Di esse citeremo le tre seguenti:

$$\Delta = \left[\frac{dJ}{4\omega^2 d\tau} \right]^6 \frac{\pi^6}{27J^4(1-J)^3}, \quad (1)$$

$$6\eta = -\frac{\pi i}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega'}, \quad 6\eta' = \frac{\pi i}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega} \quad (*), \quad (2)$$

nelle quali è $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, e che ci permettono di determinare l'espressione analitica del rapporto $\lambda = \frac{\eta'}{\eta}$ considerato come funzione di τ .

(*) Per queste formule si può consultare a pag. 118 e a pag. 122 il 1.° volume del trattato del KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Bisogna però tener conto che ivi sono adottati i simboli ω_2 , ω_1 , η_2 , η_1 invece degli altri 2ω , $2\omega'$, τ , 2η , $2\eta'$.

Estragghiamo infatti la radice 12^{esima} dai due membri della (1); allora, scegliendo convenientemente i valori dei radicali da una parte e dall'altra, si ottiene:

$$2\omega\Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}} J^{-\frac{1}{3}} (1-J)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{dJ}{d\tau}},$$

e se poniamo:

$$x_1 = 2\omega\Delta^{\frac{1}{12}}, \quad x_2 = 2\omega'\Delta^{\frac{1}{12}}, \quad (3)$$

possiamo ancora scrivere:

$$x_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}} J^{-\frac{1}{3}} (1-J)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{dJ}{d\tau}}, \quad x_2 = \tau x_1. \quad (4)$$

Nelle (3) immaginiamo sostituite alle quantità g_2, g_3 che entrano in Δ le loro espressioni analitiche in funzione di ω, ω' ; in tal modo le x_1, x_2 vengono a dipendere da ω, ω' , che possono considerarsi come variabili indipendenti. Tenendo conto di questo fatto deriviamo x_1 rapporto ad ω' e x_2 rapporto ad ω ; si ha allora:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \omega'} = \frac{\omega}{6} \Delta^{-\frac{11}{12}} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega'},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \omega} = \frac{\omega'}{6} \Delta^{-\frac{11}{12}} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega},$$

e, confrontando queste relazioni colle (2), si ottiene:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \omega'} = -\frac{4\omega i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \omega} = -\frac{4\omega' i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta',$$

Ma dalle espressioni (4) di x_1, x_2 si deduce facilmente che queste quantità sono funzioni uniformi di τ definite per tutti i possibili valori di questa variabile. Sicchè potremo scrivere ancora:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \omega'} = \frac{dx_1}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \omega'} = \frac{dx_1}{d\tau} \frac{1}{\omega},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \omega} = \frac{dx_2}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \omega} = -\frac{dx_2}{d\tau} \frac{\omega'}{\omega^2}.$$

Paragonando queste ultime relazioni colle due precedenti abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{4\omega^2 i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{4\omega^2 i}{\pi} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta', \\ \lambda &= \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\frac{dx_2}{d\tau}}{\frac{dx_1}{d\tau}}.\end{aligned}$$

Ed essendo $x_2 = \tau x_1$ si ha pure:

$$\lambda = \tau + \frac{\frac{dx_1}{d\tau}}{\frac{dx_1}{d\tau}} = \tau + \frac{12J(1-J)\frac{dJ}{d\tau}}{6J(1-J)\frac{d^2J}{d\tau^2} + (7J-4)\left(\frac{dJ}{d\tau}\right)^2}. \quad (5)$$

Questa relazione ci mostra che il rapporto λ è una funzione uniforme di τ definita in tutti i punti del semipiano complesso positivo ed avente l'asse reale come linea di singolarità essenziale.

Riguardo a questa funzione, che indicheremo con $\lambda(\tau)$, dobbiamo ancora osservare, come risulta subito dalle proprietà della $\zeta(u)$, che, quando τ subisce la sostituzione lineare fratta $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, anche essa viene a subirla, cioè si ha:

$$\lambda\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = \frac{\alpha\lambda(\tau) + \beta}{\gamma\lambda(\tau) + \delta}. \quad (6)$$

Mi propongo qui d'indicare brevemente come si muove sul proprio piano di variabilità la funzione $\lambda(\tau)$, quando τ percorre il suo in modo continuo.

Cominciamo per questo dall'osservare che le quantità x_1, x_2 , considerate come funzioni di J , sono due integrali particolari dell'equazione ipergeometrica (*):

$$J(1-J)\frac{d^2x}{dJ^2} + \frac{1}{6}(4-7J)\frac{dx}{dJ} - \frac{1}{144}x = 0, \quad (7)$$

nella quale l'invariante assoluto J è preso come variabile indipendente.

(*) Vedi: *Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs applications* par G. H. HALPHEN. Gauthier-Villars, Paris, 1.^{re} partie, chapitre IX, pag. 312-313.

Derivando poi la (7) rapporto ad J e cambiando funzione incognita, cioè ponendo $y = \frac{dx}{dJ}$, si ottiene l'altra equazione ipergeometrica:

$$J(1-J) \frac{d^2 y'}{dJ^2} + \frac{1}{6}(10-19J) \frac{dy}{dJ} - \frac{169}{144} y = 0. \quad (8)$$

Essa ammette i due integrali particolari distinti:

$$y_1 = \frac{dx_1}{dJ}, \quad y_2 = \frac{dx_2}{dJ},$$

i quali, potendosi considerare x_1, x_2 come funzioni di τ e τ come funzione di J , hanno per rapporto:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{dx_2}{dJ}}{\frac{dx_1}{dJ}} = \frac{\frac{dx_2}{d\tau}}{\frac{dx_1}{d\tau}} = \lambda(\tau).$$

Le radici delle determinanti della (8) relative ai punti singolari sono $0, -\frac{2}{3}$ per lo zero, $0, -\frac{1}{2}$ per il punto 1 e $\frac{13}{12}, \frac{13}{12}$ per l'infinito.

Consideriamo ora sul piano di variabilità di τ un triangolo Γ formato da quella parte del semipiano complesso positivo compresa fra le due rette $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_1 = 0$ ed esterna al cerchio $\text{mod } \tau = 1$, ove τ_1, τ_2 indicano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di τ . I vertici di Γ' sono i punti $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$ e i lati le parti delle tre precedenti linee che terminano a questi vertici e che formano il contorno di Γ' . Ciò posto, indicando con A' il semipiano complesso positivo della variabile J , ricordiamo che la relazione $J = J(\tau)$ stabilisce una rappresentazione conforme di A' su Γ' , tale che i punti $0, 1, \infty$ del contorno di A' vengono a corrispondere ai vertici $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$ di Γ' .

Questo fatto si può anche dedurre dall'equazione (7) servendosi di un celebre teorema di SCHWARZ relativo alle equazioni ipergeometriche (*). Applicando questo teorema alla (8) si ha che il quoziente $\frac{y_2}{y_1} = \lambda$, considerato come

(*) Giornale di Crelle, vol. 75, pag. 311.

funzione di J , stabilisce una rappresentazione conforme di A' sopra un campo Δ' semplicemente connesso e limitato da tre archi di circolo, che formano un triangolo avente per vertici i punti v_0, v_1, v_∞ del contorno di Δ' corrispondenti ai valori singolari $J=0, J=1, J=\infty$. Dallo stesso teorema di SCHWARZ risulta pure che gli angoli, che i lati di Δ' formano in questi vertici, sono rispettivamente $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$, e, poichè nessuno di questi angoli arriva a 2π , così il campo Δ' non contiene parti che si ricoprono l'una coll'altra, ed è quindi costituito da una area semplice del piano della variabile λ . Ma, affinchè, quest'area Δ' sia completamente determinata, bisogna che sia fissato il valore da attribuirsi al rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ in un punto J_0 di A' . Indicando per questo con τ_0 il valore di τ che cade in Γ' e che corrisponde ad J_0 , si può prendere $\lambda_0 = \lambda(\tau_0)$ per valore del precedente rapporto in $J = J_0$. In tal caso il triangolo Δ' è determinato perfettamente, e la relazione $\lambda = \lambda(\tau)$ stabilisce su di esso una rappresentazione conforme del triangolo Γ' , tale che ai vertici v_0, v_1, v_∞ di Δ' vengono a corrispondere i vertici $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, i, i\infty$ di Γ' .

Per trovare i lati di Δ' indichiamo con λ_1, λ_2 la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di $\lambda(\tau)$, ed osserviamo che, se è $\lambda(\tau_1 + i\tau_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$, deve per la costituzione di $\lambda(\tau)$ essere pure $\lambda(-\tau_1 + i\tau_2) = -\lambda_1 + i\lambda_2$. Avendosi poi per la (6) $\lambda(\tau + 1) = \lambda(\tau) + 1$, si può concludere che sulle rette $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_1 = 0, \lambda(\tau)$ deve avere la stessa parte reale di τ , cioè $-\frac{1}{2}$ per la prima, 0 per la seconda. Invece per la circonferenza del cerchio $\text{mod } \tau = 1$ si ha che, se $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ è un punto di essa, anche $-\frac{1}{\tau} = -\tau_1 + i\tau_2$ appartiene a questa stessa circonferenza; ma per la (6) abbiamo:

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\lambda(\tau)} \quad \text{ossia} \quad \lambda(-\tau_1 + i\tau_2) = -\frac{1}{\lambda(\tau_1 + i\tau_2)},$$

e di qui si vede subito che quando è $\text{mod } \tau = 1$ deve pure essere $\text{mod } \lambda = 1$. Sicchè, se consideriamo sul piano di λ le tre linee $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \text{mod } \lambda = 1, \lambda_1 = 0$, risulta da quanto abbiamo ora detto che i lati di Δ' corrispondenti a quelli $\tau_1 = -\frac{1}{2}, \text{mod } \tau = 1, \tau_1 = 0$ di Γ' devono essere tre porzioni a, b, c delle tre precedenti linee. In quanto ai vertici v_0, v_1, v_∞ di Δ' si vede che essi sono formati dalle tre coppie di lati $a, b; b, c; c, a$.

Queste osservazioni ci mostrano che il triangolo Δ' è costituito da quella porzione del piano di λ compresa fra le due rette $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = 0$, che al disopra dell'asse reale si estende all'infinito e che al disotto di quest'asse è limitato dal circolo $\text{mod } \lambda = 1$. I vertici v_0, v_1, v_∞ di Δ' sono quindi $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-i, i\infty$, ed in essi i lati di Δ' formano appunto gli angoli $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$. Se indichiamo con Γ'' e Δ'' i triangoli simmetrici di Γ' e Δ' rispetto agli assi immaginari $\tau_1 = 0, \lambda_1 = 0$, e con Γ, Δ i triangoli formati dall'assieme di Γ' e Γ'' l'uno e di Δ' e Δ'' l'altro, si vede ancora che la relazione $\lambda = \lambda(\tau)$ stabilisce una rappresentazione conforme di Γ su Δ , tale che a due punti di Γ simmetrici rispetto all'asse $\tau_1 = 0$ vengono a corrispondere due punti di Δ simmetrici rispetto all'asse $\lambda_1 = 0$. Sicchè, quando τ è all'interno o sul contorno di Γ , il valore corrispondente di $\lambda(\tau)$ è all'interno o sul contorno di Δ .

Ma ora invece di far muovere τ sul suo piano entro il solo triangolo Γ facciamo andare questa variabile con continuità in tutti i rimanenti punti del semipiano complesso positivo, e ricerchiamo come si muove in questo caso generale la funzione $\lambda(\tau)$ sul proprio piano. Costruiamo a tale effetto sui piani di τ e λ i triangoli trasformati di Γ e Δ da tutte le sostituzioni della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. I primi, come è noto, non si ricoprono gli uni cogli altri, e formano una rete che occupa tutto il semipiano positivo di τ . I secondi invece si ricoprono gli uni cogli altri, e si estendono su tutto il piano di λ , di guisa che ogni punto di questo piano appartiene al tempo stesso ad infiniti triangoli. Dobbiamo però osservare che un punto λ_c del piano di λ appartenente a due triangoli distinti Δ_a, Δ_b , che si ricoprono l'uno coll'altro, gode soltanto in casi speciali della proprietà di rimanere invariato dalla sostituzione $S_{a,b}$ che trasforma Δ_a in Δ_b . Infatti, affinché si possa presentare questo caso, bisogna che λ_c sia un punto doppio di $S_{a,b}$; ma di tali punti se ne hanno due al più, mentre che i punti comuni a Δ_a e a Δ_b sono infiniti.

Nei due precedenti sistemi di triangoli potremo far corrispondere fra loro Γ e Δ e in generale quei due triangoli Γ_i e Δ_i , l'uno del semipiano di τ e l'altro del piano di λ , che sono i trasformati di Γ e Δ da una stessa sostituzione S_i . Riguardo poi ai due triangoli Γ_i, Δ_i si noti che fra i loro punti si può stabilire una corrispondenza biunivoca e continua precisamente come per

Γ e Δ . Basta infatti considerare come punti corrispondenti i trasformati da S_i di due punti corrispondenti di Γ e Δ .

Un punto λ_c del piano di λ per quanto abbiamo detto appartiene ad infiniti triangoli trasformati di Δ ; ma, quando un punto mobile λ si trova in λ_c , si può supporre che esso sia in uno solo di questi triangoli. Fissato il triangolo nel quale deve trovarsi λ , quando passa per λ_c , converremo che λ seguitando a muoversi rimanga sempre in questo triangolo finchè non oltrepassa uno dei suoi lati. Se, per es., il punto mobile λ è entro il triangolo Δ_i , e ne esce attraversando un lato che separa Δ_i da Δ_h , diremo allora che λ escendo da Δ_i entra in Δ_h .

Supponiamo ora che τ , partendo da un punto τ_h di Γ e attraversando i triangoli $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{l-1}$, giunga in un punto τ_k del triangolo Γ_l . Allora λ , partendo da un punto λ_h del suo piano, giungerà in un altro punto λ_k . Fra gl'infiniti triangoli nei quali si trova λ_h vi è certamente Δ , ed anzi noi fisseremo che λ partendo da λ_h sia in Δ . In tal caso λ , per il precedente percorso di τ e per le convenzioni che abbiamo fatto, partendo, da λ_h in Δ , attraverserà i triangoli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{l-1}$, e, giungendo al punto λ_k , si troverà nel triangolo Δ_l .

Ma in questo modo possiamo ancora vedere come si muove τ sul suo semipiano, quando λ descrive sul proprio piano una linea determinata D che va da un punto iniziale λ_h ad un punto finale λ_k . Supponiamo che fra gl'infiniti triangoli nei quali si trova λ_h vi sia anche Δ , e che λ , partendo da λ_h per andare in λ_k , si trovi appunto in Δ . In tal caso potremo determinare in modo preciso per quali triangoli passerà λ percorrendo la linea D , ed in quale triangolo finale si troverà λ giungendo in λ_k . Supponiamo, ad es.: che λ uscendo da Δ attraversi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{l-1}$, e che il triangolo d'arrivo sia Δ_l . Allora, se indichiamo con τ_h il punto di Γ che corrisponde al punto λ_h di Δ e con τ_k quello di Γ_l che corrisponde al punto λ_k di Δ_l , si vede che durante il precedente percorso di λ la variabile τ descrive una linea determinata C , la quale, cominciando nel punto τ_h di Γ e attraversando i triangoli $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{l-1}$, va nel punto τ_k di Γ_l .

Se il punto finale λ_k coincide con λ_h , la linea D è chiusa, ma il triangolo finale Δ_l è in generale diverso da Δ ; per conseguenza anche il triangolo Γ_l è diverso da Γ , e il punto τ_k non coincide con τ_h ; cosicchè in generale la linea C descritta da τ e corrispondente alla D è aperta. Giova inoltre osservare che di linee chiuse D passanti per λ_h se ne possono tracciare infinite, ed anzi, se $\Delta_{\sigma_0} = \Delta, \Delta_{\sigma_1}, \dots, \Delta_{\sigma_l}, \dots$ è la serie degli infiniti triangoli tras-

formati di Δ che contengono il punto λ_h , è facile vedere che si può sempre determinare una serie di linee chiuse $D_{\alpha_0}, D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_r}, \dots$ che passino tutte per λ_h e siano tali che il triangolo finale o d'arrivo relativo alla linea D_{α_r} coincida con Δ_{α_r} . In tal caso, se indichiamo con $C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_r}, \dots$ le linee descritte da τ a partire da τ_h e corrispondenti a quelle descritte da λ , si vede subito che, all'infuori della prima, che è chiusa, tutte le altre sono aperte, e sono tali che la C_{α_r} termina in un punto situato nel triangolo Γ_{α_r} corrispondente a Δ_{α_r} .

In tutti questi ragionamenti tanto per τ quanto per λ , considerate come variabili indipendenti, siamo sempre partiti da un punto τ_h o λ_h che fosse in Γ nel primo caso e in Δ nel secondo. Ma i risultati ottenuti valgono egualmente partendo da punti qualunque. Osserveremo soltanto che, quando sul piano di λ si prende un punto arbitrario di partenza, bisogna fissare in quale degli infiniti triangoli contenenti questo punto deve considerarsi situata la variabile λ quando si trova in esso, e ciò perchè sia perfettamente determinato il valore corrispondente di τ . Da tutto ciò risulta che la quantità τ , considerata come funzione di λ in tutto il piano di questa variabile, è ad infiniti valori, perchè si possono sempre tracciare sul piano di λ infinite linee chiuse passanti per un punto arbitrario λ_h , e tali che sul piano di τ vi corrispondano infinite linee aperte tutte uscenti da un punto τ_h preso come corrispondente di λ_h ed aventi i loro estremi finali in triangoli differenti del semipiano di τ .

Anche l'invariante assoluto $J(\tau)$, considerato come funzione di λ , è ad infiniti valori. Infatti, affinchè la $J(\tau)$ risultasse monodroma, bisognerebbe che tutti gli estremi delle precedenti linee aperte descritte da τ fossero sempre i trasformati di uno stesso punto da sostituzioni della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; ma una tale circostanza non si può presentare in generale, perchè altrimenti il punto arbitrario λ_h dovrebbe rimanere invariato da tutte queste sostituzioni, il che, per osservazioni già fatte, può se mai accadere in casi speciali e solo quando λ_h è sull'asse reale del piano di λ , poichè si tratta di un punto doppio comune ad infinite sostituzioni del gruppo.