

#### IV. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen. Von H. A. Lorentz.

Obgleich die theoretischen Gesetze für diese Erscheinung bereits von den Herrn Voigt<sup>1</sup> und Drude<sup>2</sup> in befriedigender Weise entwickelt worden sind, bieten vielleicht die nachstehenden Betrachtungen einiges Interesse, indem sie zeigen, dass die gefundenen Formeln unabhängig sind von speciellen Annahmen über die Natur der Lichtschwingungen und aus einigen einfachen Grundsätzen abgeleitet werden können.

§ 1. Der einfachste Bewegungszustand der in einem Metall — oder in sonst einem isotropen absorbirenden Mittel — bestehen kann, wird realisirt, wenn eine ebene Grenzfläche senkrecht getroffen wird von einem Bündel paralleler Lichtstrahlen. Es entsteht dann ein Schwingungszustand, wobei sich die Abweichung vom Gleichgewichte — welche durch eine gewisse Grösse  $g$  bestimmt werden möge — durch die Formel

$$(1) \quad g = A e^{-p x} \cos(k t - q x + s)$$

darstellen lässt. Darin ist  $t$  die Zeit,  $x$  die Entfernung von der Grenzfläche;  $A$ ,  $p$ ,  $k$ ,  $q$  und  $s$  sind Constanten. Wir wollen  $k$ ,  $q$  und  $p$  als positiv voraussetzen; die beiden ersten Grössen sind mit der Schwingungsdauer  $T$  und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  verbunden durch die Beziehungen

$$k = \frac{2\pi}{T}, \quad q = \frac{k}{v}.$$

Der Werth von  $p$  bestimmt die Absorption.

Einem gegebenen  $k$  entsprechen bei jedem Mittel bestimmte Werthe von  $p$  und  $q$ .

§ 2. In dem betrachteten Falle findet man in allen Punkten einer mit der Grenzfläche parallelen Ebene sowohl gleiche Phase wie gleiche Amplitude. Anders, wenn ein Bündel paralleler Lichtstrahlen schief einfällt. Zwar ist dann eine derartige Ebene noch immer der geometrische Ort der Punkte

1) W. Voigt, Wied. Ann. **24**. p. 144. 1885.

2) P. Drude, Wied. Ann. **42**. p. 666. 1891.

gleicher Amplitude, aber die Phase ändert sich in derselben von Punkt zu Punkt, was schon daraus erhellt, dass an der Grenzfläche selbst das einfallende Licht, und mithin alle Schwingungen, welche es entstehen lässt, nicht überall dieselbe Phase haben. Diese Bemerkung zeigt die Nothwendigkeit, Bewegungszustände zu untersuchen, welche allgemeiner sind, als der durch (1) dargestellte.

Wir wollen die  $x$ -Axe normal zur Grenzfläche, nach der Seite des Metalles, und die  $y$ -Axe normal zur Einfallsebene legen. Offenbar besteht dann in allen Punkten einer Geraden, welche mit  $OY$  parallel läuft, der nämliche Zustand und werden die Differentialgleichungen, welche die Bewegung bestimmen, nur  $t$ ,  $x$  und  $z$  als unabhängige Variablen enthalten.

Welche Theorie des Lichtes man auch annehmen wolle, jedenfalls hat man die Abweichung vom Gleichgewichtszustande als eine gerichtete Grösse oder einen Vector aufzufassen. Dieselbe lässt sich in drei den Axen parallele Componenten  $f$ ,  $g$  und  $h$  zerlegen, und wenn wir nun zunächst Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene voraussetzen, müssen sich die Differentialgleichungen auf eine einzige zur Bestimmung von  $g$  reduciren. Diese Gleichung ist linear und homogen; sie muss die Lösung (1) zulassen und ausserdem lässt sich ihre Gestalt näher angeben, wenn man annimmt, dass das Metall isotrop ist.

§ 3. Im allgemeinen verlangt die Isotropie Folgendes: Wenn man die zuerst gewählten Coordinatenachsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  durch neue ebenfalls rechtwinkliche Axen  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  ersetzt, die ursprünglichen Coordinaten mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , die neuen mit  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  bezeichnet, und die Componenten des obengenannten Vectors nach den alten und den neuen Axen resp. mit  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ , so müssen die Gleichungen, welche  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$  als Functionen von  $t$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  bestimmen, dieselbe Gestalt haben wie die, welchen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  als Functionen von  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  genügen. Andererseits muss das eine System von Gleichungen aus dem anderen hervorgehen, wenn man  $f$ ,  $g$ ,  $h$  mittelst  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$  ausdrückt und die Differentiationen nach  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  auf solche nach  $t$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  zurückführt. Die Differentialgleichungen müssen demnach so geschrieben werden können, dass sie nach diesen Aenderungen noch die ursprüngliche Gestalt zeigen.

Noch einfacher wird dieses, wenn wir uns auf den in § 2 genannten Fall beschränken und die  $y$ -Axe unverändert lassen, während wir  $OX$  und  $OZ$  mit  $OX'$  und  $OZ'$  vertauschen. Die Bedingung besteht dann darin, dass  $g$  bestimmt werden kann durch eine Gleichung, welche sich nicht ändert, wenn man  $x'$  und  $z'$  statt  $x$  und  $z$  als unabhängige Variablen einführt.

§ 4. Es sei  $\vartheta$  der Winkel, über welchen man die Axen  $OX$  und  $OZ$  drehen muss, um sie in die Lagen  $OX'$  und  $OZ'$  zu bringen, wobei wir die Drehungsrichtung so wählen, dass für  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $OX'$  mit  $OZ$  zusammenfallen würde. Ist dann  $g$  eine Function von  $x$  und  $z$ , oder  $x'$  und  $z'$ , so ist

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \cos \vartheta \frac{\partial g}{\partial x'} - \sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial z'}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial x'} + \cos \vartheta \frac{\partial g}{\partial z'}.$$

Man sieht daraus, dass bei Vertauschung der Variablen aus einem Differentialquotient wie

$$\frac{\partial^{a+b+c} g}{\partial x^a \partial x'^b \partial z'^c}$$

nur Glieder von der Form:

$$\frac{\partial^{a+b'+c'} g}{\partial x^a \partial x'^{b'} \partial z'^{c'}}$$

entstehen können, wo  $b' + c' = b + c$  ist.

Wir betrachten nun eine bestimmte Gruppe von Gliedern in der Gleichung für  $g$ , und zwar die Glieder mit einem bestimmten  $a$  und mit einem bestimmten Werth von  $b + c = m$ . Diese Gruppe lässt sich zusammenfassen in dem Ausdrücke

$$(3) \quad \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left( \alpha_1 \frac{\partial^m g}{\partial x^m} + \alpha_2 \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-1} \partial z} + \alpha_3 \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-2} \partial z^2} + \dots \right),$$

wo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  constant sind, und die Gleichung wird die oben besprochene Eigenschaft nur dann besitzen, wenn bei Vertauschung der Variablen

$$(4) \quad \alpha_1 \frac{\partial^m g}{\partial x^m} + \alpha_2 \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-1} \partial z} + \alpha_3 \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-2} \partial z^2} + \dots$$

übergeht in

$$(5) \quad \alpha_1 \frac{\partial^m g}{\partial x'^m} + \alpha_2 \frac{\partial^m g}{\partial x'^{m-1} \partial z'} + \alpha_3 \frac{\partial^m g}{\partial x'^{m-2} \partial z'^2} + \dots,$$

und wenn Aehnliches gilt von den übrigen mit (3) überein-

stimmenden Gruppen, welche in der Gleichung unterschieden werden können.

§ 5. Zur Vereinfachung der Untersuchung bemerke ich, dass die Formeln (2) den Beziehungen

$$x = x' \cos \vartheta - z' \sin \vartheta, \quad z = x' \sin \vartheta + z' \cos \vartheta$$

sehr ähnlich sind, und dass demgemäss, wenn aus (4) der Ausdruck (5) entstehen soll, aus der Summe

$$\alpha_1 x^m + \alpha_2 x^{m-1} z + \alpha_3 x^{m-2} z^2 + \dots$$

die Summe

$$\alpha_1 x'^m + \alpha_2 x'^{m-1} z' + \alpha_3 x'^{m-2} z'^2 + \dots,$$

hervorgehen muss. Eine Linie mit der Gleichung

$$\alpha_1 x^m + \alpha_2 x^{m-1} z + \alpha_3 x^{m-2} z^2 + \dots = \text{const.}$$

muss also, wenn man sie auf die neuen Axen bezieht, durch eine Gleichung mit den nämlichen Coefficienten dargestellt werden können. Die einzige Linie, bei welcher dieses zutrifft, ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte im Coordinatenursprunge und die Gleichung stellt nur dann einen solchen Kreis vor, wenn  $m$  eine gerade Zahl, sagen wir  $2r$ , ist, und die Coefficienten derart sind, dass das erste Glied sich auf

$$\alpha (x^2 + z^2)^r$$

reducirt.

Daraus ergibt sich für den Ausdruck (4) die Gestalt

$$\alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^r g,$$

wo der Index  $r$  die  $r$ -malige Wiederholung der durch  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  angedeuteten Operation anzeigt.

Das erste Glied der auf 0 reducirten Differentialgleichung wird sich in einige Theile von der Form

$$\alpha \frac{\partial^a}{\partial t^a} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^r g$$

zerlegen lassen und für die Gleichung selbst darf man schreiben

$$(6) \quad \Sigma \alpha \frac{\partial^a}{\partial t^a} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^r g = 0.$$

Es ist hiermit ihre Gestalt soweit bestimmt, als es mittelst der Bedingung der Isotropie möglich und für unsern Zweck erforderlich ist.

Natürlich kann in einigen Gliedern  $a$  oder  $r$  0 sein, wodurch sie in  $\alpha(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)^r g$ , oder  $\alpha \partial^a g / \partial t^a$  übergehen.

§ 6. Die Gleichung (6) muss nun erfüllt werden, wenn man für  $g$  den Werth (1) einsetzt. Es wird dann

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = A e^{-p x} \{ (p^2 - q^2) \cos(k t - q x + s) \\ - 2 p q \sin(k t - q x + s) \} = (p^2 - q^2) g + 2 \frac{p q}{k} \frac{\partial g}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

und es wird also die durch

$$(8) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

angedeutete Operation der Operation

$$(9) \quad (p^2 - q^2) + 2 \frac{p q}{k} \frac{\partial}{\partial t}$$

äquivalent.

Da sich die beiden Glieder in (7) in ein einziges vereinigen lassen, worin  $x$  und  $t$  genau so vorkommen, wie in (1), überzeugt man sich leicht davon, dass auch in der Anwendung auf (7) die Operationen (8) und (9) gleichwerthig sind. Indem wir so fortfahren, schliessen wir, dass die Einsetzung von (1) in (6) zunächst auf die Gleichung

$$(10) \quad \sum \alpha \frac{\partial^a}{\partial t^a} \{ (p^2 - q^2) + 2 \frac{p q}{k} \frac{\partial}{\partial t} \}^r g = 0$$

führt. Diese enthält nur Differentialquotienten nach  $t$  mit constanten Coefficienten und, da (1) eine Lösung ist, muss sie auch durch jede Function

$$(11) \quad D \cos(k t + E),$$

in welcher  $D$  und  $E$  unabhängig von  $t$  sind, befriedigt werden.

§ 7. Diese Bemerkungen eröffnen uns den Weg zur Aufindung neuer Bewegungszustände. Wenn es nämlich gelingt, für  $D$  und  $E$  solche Functionen von  $x$  und  $z$  zu setzen, dass die Operationen (8) und (9), beliebig oft auf (11) angewendet, dasselbe ergeben, so wird sich auch, wenn man (11) für  $g$  substituirt, die Differentialgleichung (6) auf (10) zurückführen lassen, und dieser Gleichung wird, wie wir sahen, durch (11) genügt.

Es liegt nun nahe, die Function

$$(12) \quad g = A e^{-p_1 x - p_2 z} \cos(k t - q_1 x - q_2 z + s)$$

zu versuchen, in welcher  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  constant sind. Dieselbe hat wirklich die verlangte Eigenschaft, sobald

$$(13) \quad \begin{cases} p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2 = p^2 - q^2 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 = p q, \end{cases}$$

was sich durch sehr verschiedene Werthe der vier Constanten erreichen lässt. Wenn es sich um Licht von bestimmter Schwingungsdauer handelt, sind  $p$  und  $q$  als gegeben zu betrachten.

§ 8. Bei der durch (12) dargestellten Bewegung fallen die geometrischen Orte der Punkte gleicher Phase und gleicher Amplitude nicht mehr zusammen. Gleiche Amplitude findet man an allen Stellen einer Ebene

$$p_1 x + p_2 z = \text{const.}$$

und gleiche Phasen in den Punkten einer Ebene

$$q_1 x + q_2 z = \text{const.}$$

Unter allen diesen Ebenen wollen wir die, welche durch den Coordinatenanfang gehen und die Gleichungen

$$p_1 x + p_2 z = 0, \quad q_1 x + q_2 z = 0$$

haben,  $W$  und  $W'$  nennen.

Setzt man

$$p_1 = P \cos \beta, \quad p_2 = P \sin \beta, \quad q_1 = Q \cos \beta', \quad q_2 = Q \sin \beta',$$

$$x \cos \beta + z \sin \beta = l, \quad x \cos \beta' + z \sin \beta' = l',$$

so wird

$$g = A e^{-P l} \cos(k t - Q l' + s)$$

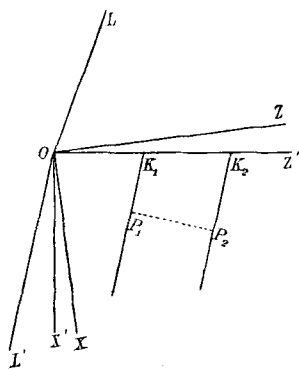
mit den Bedingungen

$$P^2 - Q^2 = p^2 - q^2$$

$$P Q = p q \sec(\beta - \beta').$$

Zu bemerken ist noch, dass  $l$  und  $l'$  die Entfernungen des Punktes  $(x, z)$  von den Ebenen  $W$  und  $W'$  sind;  $\beta - \beta'$  ist der Winkel zwischen diesen letzteren. Wenn es sich nur darum handelt, einen möglichen Zustand kennen zu lernen, kann man den beiden Ebenen jede beliebige Richtung geben; die letzten Formeln bestimmen dann  $P$  und  $Q$ .

§ 9. Es soll jetzt die Brechung des Lichtes durch ein Prisma betrachtet werden. Wir legen die Axe  $OY$  in die



brechende Kante und die Axe  $OZ$  in die Vorderfläche;  $OX$  habe die in der Figur angedeutete Richtung und  $YOZ'$  sei die Hinterfläche.

Es sei weiter  $LO$  die Richtung des einfallenden Lichtes und es bilde  $OL$  mit der Verlängerung von  $XO$  den Winkel  $\varphi$  (Einfallswinkel), und mit  $OZ$  den Winkel  $90^\circ - \varphi$ .

Ist  $v_0$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem Medium vor dem Prisma, so lässt sich für das einfallende Licht schreiben:

$$g = A_1 \cos \left( k t - k \frac{x \cos \varphi - z \sin \varphi}{v_0} + s_1 \right),$$

woraus sich, indem man  $x = 0$  setzt, für die einfallenden Schwingungen an der Vorderfläche ergibt:

$$g = A_1 \cos \left( k t + k \frac{z \sin \varphi}{v_0} + s_1 \right).$$

In einem bestimmten Punkte jener Fläche werden sich die Schwingungen im Metall von den einfallenden Schwingungen durch die Amplitude und die Phase unterscheiden; da aber die Verhältnisse der ganzen Ebene entlang die nämlichen sind, wird sowohl das Amplitudenverhältniss wie die Phasendifferenz überall die gleiche Grösse haben. Die Schwingungen im Metall, in der unmittelbaren Nähe der Vorderfläche können also dargestellt werden durch die Gleichung

$$(14) \quad g = A_2 \cos \left( k t + \frac{k z \sin \varphi}{v_0} + s_2 \right)$$

Auf die Bestimmung der neuen Constanten  $A_2$  und  $s_2$  können wir hier verzichten; wir müssen das auch thun, wenn wir uns von speciellen Theorien frei halten wollen.

§ 10. Ein Bewegungszustand wie (12) kann sich nun wirklich für  $x = 0$  der Bewegung (14) anschliessen. Dazu ist erforderlich, dass

$$(15) \quad p_2 = 0, \quad q_2 = -\frac{k \sin \varphi}{v_0},$$

und aus (13) erhält man dann

$$(16) \quad p_1^2 - q_1^2 = p^2 - q^2 + \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{v_0^2}, \quad p_1 q_1 = p q.$$

Es sind hierdurch  $p_1$  und  $q_1$  eindeutig bestimmt, wenn man sich daran erinnert, dass  $p$  und  $q$  positiv sind (§ 1) und erwägt, dass auch  $p_1$  positiv sein muss, da die Lichtbewegung im Metall abnehmen muss, wenn man sich von der Vorderfläche entfernt.

§ 11. Um das aus dem Prisma tretende Licht zu untersuchen fragen wir zunächst nach der Bewegung, welche die Hinterfläche erreicht. Ich führe die in der Figur angedeuteten neuen Axen  $OX'$  und  $OZ'$  ein und nenne den Prismenwinkel  $ZOZ': \gamma$ . Man hat nun in (12) zu substituieren:

$$x = x' \cos \gamma + z' \sin \gamma, \quad z = -x' \sin \gamma + z' \cos \gamma,$$

und nachher  $x' = 0$  zu setzen. Es wird dann an der Hinterfläche, im Metall:

$$g = A_2 e^{-(p_1 \sin \gamma + p_2 \cos \gamma) z'} \cos \{k t - (q_1 \sin \gamma + q_2 \cos \gamma) z' + s_2\}$$

und in dem daran grenzenden durchsichtigen Medium,

$$(17) \quad g = A_3 e^{-(p_1 \sin \gamma + p_2 \cos \gamma) z'} \cos \{k t - (q_1 \sin \gamma + q_2 \cos \gamma) z' + s_3\},$$

wo  $A_3$  und  $s_3$  wieder neue Constanten sind.

§ 12. Die austretende Bewegung gelange mittelst eines auf unendliche Entfernung eingestellten Fernrohres zur Beobachtung. Was man dann sieht ist die Lichtvertheilung in der Focalebene des Objectives, und diese zu berechnen ist ein Problem der Diffractionstheorie. Dem Huygens'schen Princip gemäss denken wir uns, dass von den verschiedenen Punkten der Hinterfläche  $OZ'$  parallele Lichtstrahlen, etwa in der Richtung von  $OL'$  ausgehen. Ist  $P_1 P_2$  eine Ebene, welche senkrecht zu denselben steht, so setzen sich die Phasendifferenzen, mit welchen diese Strahlen in der Focalebene interferiren, zusammen aus den Differenzen, welche schon zwischen den Punkten  $K_1, K_2$  von  $OZ'$  vorhanden sind und den Differenzen, welche durch die ungleiche Länge von  $K_1 P_1$  und  $K_2 P_2$  herbeigeführt werden. Gelingt es nun, eine solche Richtung für  $OL'$  zu finden, dass die Phasen in  $P_1, P_2$  u. s. w.



gleich werden, so wird das die Richtung sein, welche man der Fernrohraxe geben muss, um gerade im Hauptbrennpunkte des Objectives das Maximum der Intensität zu erhalten, die Richtung also, welche man dem austretenden Lichte zuschreibt.

Bildet *diese* Richtung mit der Normale  $OX'$  einen Winkel  $X'O L' = \psi$ , und nimmt man an, dass sich zu beiden Seiten des Prisma der nämliche Stoff befindet<sup>1)</sup>, so ist — in Zeiteinheiten ausgedrückt — die Phasendifferenz, welche von der ungleichen Länge von  $K_1 P_1$  und  $K_2 P_2$  herrührt,

$$\frac{\sin \psi}{v_0} \cdot K_1 K_2.$$

Andererseits besteht nach der Formel (17) zwischen den Punkten  $K_1$  und  $K_2$  die Phasendifferenz

$$\frac{q_1 \sin \gamma + q_2 \cos \gamma}{k} \cdot K_1 K_2.$$

Beide Ausdrücke geben an, um wieviel der Strahl  $K_2 P_2$  gegen  $K_1 P_1$  *verzögert* ist und es wird somit die gesuchte Bedingung

$$\sin \psi = - \frac{v_0}{k} (q_1 \sin \gamma + q_2 \cos \gamma),$$

oder, wenn man (15) berücksichtigt,

$$\sin \psi = \sin \varphi \cos \gamma - \frac{v_0 q_1}{k} \sin \gamma.$$

§ 13. Wir betrachten den Prismenwinkel als so klein, dass Grössen von der Ordnung  $\gamma^2$  vernachlässigt werden dürfen. Es wird dann:

$$\sin \psi = \sin \varphi - \frac{v_0 q_1}{k} \gamma, \quad \psi - \varphi = - \frac{v_0 q_1}{k \cos \varphi} \cdot \gamma,$$

und die Ablenkung von der ursprünglichen Richtung, als positiv gerechnet, wenn sie in demselben Sinne stattfindet wie etwa bei einem Glasprisma,

$$(18) \quad \varepsilon = \varphi - \psi - \gamma = \gamma \left\{ -1 + \frac{v_0 q_1}{k \cos \varphi} \right\}$$

---

1) Man überzeugt sich leicht davon, dass bei der Weise, wie die Versuche angestellt werden, die das Doppelpisma tragende Glasplatte, sogar wenn sie keilförmig ist, keinen Einfluss auf die Ablenkung hat.

Berechnet man  $q_1$  aus (16), so wird

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \gamma \left\{ -1 + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\left[ -\frac{(p^2 - q^2) v_0^2}{2 k^2 \sin^2 \varphi} \right.} \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{(p^2 + q^2)^2 v_0^4}{k^4 \sin^4 \varphi} + 2 \frac{(p^2 - q^2) v_0^2}{k^2 \sin^2 \varphi} + 1 \right)} \right] \right\} \right\}, \end{array} \right.$$

wo die Wurzeln mit dem positiven Zeichen zu nehmen sind. Setzt man

$$p = \frac{k}{v_0} \sigma \sin \tau, \quad q = \frac{k}{v_0} \sigma \cos \tau,$$

so sind  $\sigma$  und  $\tau$  die beiden von Eisenlohr eingeführten Constanten. Damit wird

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \gamma \left\{ -1 + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\left[ \frac{\sigma^2 \cos 2 \tau}{2 \sin^2 \varphi} \right.} \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\sigma^4}{\sin^4 \varphi} - 2 \frac{\sigma^2 \cos 2 \tau}{\sin^2 \varphi} + 1 \right)} \right] \right\} \right\}.$$

§ 14. Man kann auch die Grössen einführen, welche in der Theorie des Hrn. Drude vorkommen. Entsprechend der Bedeutung des Verhältnisses  $k/q$  (§ 1) kann man

$$n = v_0 : \frac{k}{q}$$

den Brechungsexponenten des Metalles nennen. Ferner ist bei der Bewegung (1) unter der Wellenlänge zu verstehen die Grösse  $2\pi/q$ ; die Amplitude ändert sich also, wenn man in der Fortpflanzungsrichtung um die Wellenlänge fortschreitet, im Verhältniss:

$$1 : e^{-2\pi \frac{p}{q}}.$$

Der hier auftretende Bruch ist, was Drude den Absorptionsindex nennt; stellt man denselben durch  $\kappa$  vor, so wird die Formel für die Ablenkung:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \gamma \left\{ -1 + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\left[ -\frac{(\kappa^2 - 1) n^2}{2 \sin^2 \varphi} \right.} \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{(\kappa^2 + 1)^2 n^4}{\sin^4 \varphi} + 2 \frac{(\kappa^2 - 1) n^2}{\sin^2 \varphi} + 1 \right)} \right] \right\} \right\}.$$

Für die Metalle, bei welchen  $(\kappa^2 + 1) n^2$  gross gegen die Einheit ist, lässt sich dieses Resultat noch sehr vereinfachen. Für die letzte Wurzelgrösse ist es dann erlaubt, zu setzen

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{x^2+1}{\sin^2 \varphi} n^2 + 1\right)^2 - \frac{4n^2}{\sin^2 \varphi}\right\}} = \frac{(x^2+1)n^2}{\sin^2 \varphi} + 1 - \frac{2n^2}{(x^2+1)n^2 + \sin^2 \varphi}.$$

Lässt man hier im letzten Nenner das Glied  $\sin^2 \varphi$  fort, so wird die noch übriggebliebene Wurzelgrösse in (21)

$$\sqrt{\left(\frac{n^2}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{x^2+1}\right)} = \frac{n}{\sin \varphi} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2n^2(x^2+1)}\right)$$

und demzufolge:

$$\varepsilon = \gamma \left\{ -1 + \frac{n}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2n^2(x^2+1)}\right) \right\},$$

was mit der Formel (12) des Hrn. Drude übereinstimmt und wofür man, wie er bemerkt, oft schreiben darf:

$$\varepsilon = \gamma \left( -1 + \frac{n}{\cos \varphi} \right).$$

§ 15. Bis jetzt hielten wir uns an die in § 2 gewählte Schwingungsrichtung. Es lässt sich aber zeigen, dass die abgeleiteten Formeln auch gültig bleiben, wenn die Schwingungen parallel der Einfallsebene geschehen. Von den drei Componenten  $f$ ,  $g$ ,  $h$  (§ 2) verschwindet dann die zweite, während die erste und dritte durch zwei Differentialgleichungen als Functionen von  $t$ ,  $x$  und  $z$  bestimmt werden.

Nach jeder Lichttheorie ist für Transversalschwingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

also im vorliegenden Fall

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

und diese Beziehung ermöglicht es, aus den soeben erwähnten Gleichungen eine andere, mit einer einzigen abhängigen Variablen abzuleiten, für welche letztere man nach Belieben  $f$ , oder  $h$ , oder irgend eine Combination der Differentialquotienten von  $f$  und  $h$  wählen kann. Wir wollen eine Grösse  $\mu$  wählen, welche wir definiren durch die Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} = \mu;$$

aus dieser ergibt sich, unter Hinzuziehung von (22),

$$(23) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = -\frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h = \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Wendet man nun auf eine der für  $f$  und  $h$  bestehenden Gleichungen die Operation  $(\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$  an, so tritt in jedem Gliede eine der Grössen auf, welche in den Formeln (23) linkerhand stehen; werden diese dann durch  $-\partial \mu / \partial z$  und  $\partial \mu / \partial x$  ersetzt, so entsteht eine Differentialgleichung, welche nur noch  $\mu$  als abhängige Variable enthält.

Diese Grösse bietet nun den Vortheil, dass sie, wenn man neue Axen  $OX'$  und  $OZ'$  und die darauf bezüglichen Componenten  $f'$  und  $h'$  einführt, ebensogut wie durch  $(\partial h / \partial x) - (\partial f / \partial z)$  auch durch  $(\partial h' / \partial x') - (\partial f' / \partial z')$  vorgestellt werden kann, wie sich mittelst der Formeln (2) und

$$f = f' \cos \vartheta - h' \sin \vartheta, \quad h = f' \sin \vartheta + h' \cos \vartheta$$

nachweisen lässt. Die Grösse  $\mu$  ist also durch den Bewegungszustand bestimmt, unabhängig von der Wahl der Axen  $OX$  und  $OZ$  und sie muss deshalb ebensogut wie früher  $g$  einer Gleichung genügen, welche die Gestalt nicht ändert, wenn man von  $x$  und  $z$  zu  $x'$  und  $z'$  übergeht. Die mitgetheilten Betrachtungen gelten also auch, wenn man überall  $g$  durch  $\mu$  ersetzt, und die Ablenkung muss unabhängig sein von dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes. Sie wird also auch für natürliches Licht den gefundenen Werth haben.<sup>1)</sup>

§ 16. Die Hrn. du Bois und Rubens, deren Messungen<sup>2)</sup> über die Ablenkung durch Metallprismen mit der Drude'schen Theorie sehr gut übereinstimmen, haben sich bemüht, aus

1) Bei einer beliebigen Lichtbewegung, bei welcher man mit den drei Componenten  $f$ ,  $g$  und  $h$  zu rechnen hat, lassen sich der Grösse  $\mu$  zwei andere  $\lambda = (\partial g / \partial x) - (\partial h / \partial y)$  und  $\nu = (\partial f / \partial y) - (\partial g / \partial x)$  an die Seite stellen. Die drei Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  lassen sich als die Componenten eines Vectors auffassen, dem in jeder Lichttheorie eine physikalische Bedeutung zukommt, und zwar ist jener Vector in der elastischen Lichttheorie die doppelte Rotation der Volumelemente, und hängt er in der electromagnetischen Lichttheorie mit der magnetischen Kraft zusammen, wenn  $(f, g, h)$  die electricische Verschiebung ist. Bei einem Bündel linear polarisirten Lichtes steht nun dieser neue Vector senkrecht zu der Ebene, welche die Fortpflanzungsrichtung und den Vector  $(f, g, h)$  enthält, und die im Texte gegebene Beweisführung läuft darauf hinaus, dass man die Lichtbewegung auch mittelst des Vectors  $(\lambda, \mu, \nu)$  beschreiben kann, welcher senkrecht zur Einfallsebene steht, wenn die Verschiebung  $(f, g, h)$  darin liegt.

2) Du Bois und Rubens, Wied. Ann. 41. p. 507. 1890.

ihren Versuchen ein empirisches Brechungsgesetz abzuleiten. Sie setzen dabei voraus, dass zwischen den Winkeln  $i$  und  $i_m$ , welche die Wellenfronten in der Luft und im Metall mit der Grenzfläche bilden, eine bestimmte Beziehung bestehen müsse, sodass  $i_m = f(i)$  gesetzt werden kann, wo  $f(i)$  eine einwerthige Function ist. Die gemessenen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , welche sie „Ablenkung“ und „Prismenwinkel“ nennen, würden nun mit  $i$  und  $i_m$  so zusammenhängen, dass

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{d i_m}{d i}$$

ist; ist also  $\alpha$  bei verschiedenen Einfallswinkeln bestimmt, so wäre

$$(24) \quad f(i) = \int_0^i \frac{\beta d i}{\alpha + \beta}$$

Es scheint mir indess, dass diese Gleichung nicht angenommen werden darf.

§ 17. Um das zu zeigen, will ich zunächst die oben mitgetheilte Berechnung der Ablenkung etwas anders einkleiden. Aus dem in § 12 Gesagten folgt, dass die Richtung, welche man dem austretenden Lichte zuschreibt, lediglich bedingt wird durch die Weise, wie sich, der Hinterfläche entlang, die Phase der ankommenden Schwingungen von Punkt zu Punkt ändert, also durch die Richtung, welche im Metall selbst den Ebenen gleicher Phase zukommt und durch die Entfernung  $2\pi/Q$  (§ 8) zweier solcher Ebenen, in welchen dieselbe Phase gefunden wird. Stellt man sich weiter in dieser Entfernung von einander eine Schaar von Ebenen gleicher Phase im Innern des Prisma vor, so müssen die Schnittlinien derselben mit der Vorderfläche zusammenfallen mit den Geraden, in welchen Wellenfronten des einfallenden Lichtes, welche um die Wellenlänge von einander abstehen, die Vorderfläche durchschneiden. Kurz, die Ablenkung muss ebenso gross sein wie bei einem durchsichtigen Prisma mit gleichem Winkel, dessen Brechungsindex

$$n' = \frac{2\pi}{k} v_0 \cdot \frac{2\pi}{Q} = \frac{Q v_0}{k}$$

wäre. In der That findet man leicht für die durch ein derartiges Prisma hervorgebrachte Ablenkung

$$\varepsilon = \gamma \left\{ -1 + \frac{\sqrt{n'^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right\},$$

was mit (18) übereinstimmt. Es ist nämlich (§ 8):

$$Q^2 = q_1^2 + q_2^2,$$

also, wenn man (15) berücksichtigt,

$$Q^2 = q_1^2 + \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{v_0^2}.$$

und

$$n'^2 = \frac{Q^2 v_0^2}{k^2} = \frac{q_1^2 v_0^2}{k^2} + \sin^2 \varphi.$$

§ 18. Nennen wir jetzt, um uns den Bezeichnungen von du Bois und Rubens anzuschliessen,  $i$  den Einfallswinkel,  $i'$  den Winkel zwischen der Normale an der Hinterfläche und der Richtung, welche man dem austretenden Lichte zuschreibt,  $i_m$  und  $i'_m$  die Winkel, welche die Ebenen gleicher Phase im Metall mit der ersten und zweiten Prismenfläche bilden, so ist nach Obigem

$$(25) \quad \sin i_m = \frac{\sin i}{n'}, \quad \sin i'_m = \frac{\sin i'}{n'}.$$

In diesen Formeln ist nun  $n'$  eine Function des Einfallswinkels  $i$  und stellt man diese durch  $\chi(i)$  vor, so lässt sich für die erste Gleichung schreiben

$$i_m = \arcsin \left\{ \frac{\sin i}{\chi(i)} \right\}.$$

Es besteht also wirklich eine bestimmte Beziehung

$$i_m = f(i);$$

nur darf man nicht, wie das in der genannten Abhandlung geschieht, und wie auch auf den ersten Blick gerechtfertigt erscheint, annehmen, dass  $i'$  und  $i'_m$  in derselben Weise von einander abhängen, d. h. dass  $i'_m = f(i')$ . Es müsste dazu

$$\sin i'_m = \frac{\sin i'}{\chi(i')}$$

sein, während nach der zweiten der Formeln (25)

$$\sin i'_m = \frac{\sin i'}{\chi(i)}$$

ist. Die beiden Nenner  $\chi(i)$  und  $\chi(i')$  sind aber von einander verschieden, eben weil  $i$  und  $i'$  das sind.

Zwar ist bei unendlich kleinem Prismenwinkel auch die Differenz zwischen  $\chi(i)$  und  $\chi(i')$  unendlich klein, aber das genügt schon, um die Formel (24) unrichtig zu machen. Um das einzusehen, wollen wir die beiden Strahlen betrachten, welche die Hrn. du Bois und Rubens in ihrer ersten Figur gezeichnet haben; Grössen, welche sich auf dieselben beziehen, unterscheiden wir durch die Indices 1 und 2. Offenbar haben  $i$  und  $i_m$  für die beiden Strahlen gleiche Werthe, und ist

$$i'_{m(2)} - i'_{m(1)} = \beta, \quad i'_2 - i'_1 = \alpha + \beta.$$

Es ist weiter:

$$i'_{m(1)} = \arcsin \left\{ \frac{\sin i'_1}{\chi(i)} \right\}, \quad i'_{m(2)} = \arcsin \left\{ \frac{\sin i'_2}{\chi(i)} \right\}.$$

d. h. es ändert sich, wenn man von dem einen Strahl auf den andern übergeht, im zweiten Gliede der Gleichung nur der Zähler um eine unendlich kleine Grösse. Um zu der Formel (24) zu gelangen, müsste man  $\chi(i)$  in der ersten Formel ersetzen durch  $\chi(i'_1)$  und in der zweiten durch  $\chi(i'_2)$ ; man müsste also auch die Nenner verschieden machen. Natürlich hat das einen Einfluss, der nicht vernachlässigt werden darf.

Dass zwischen  $i'$  und  $i'_m$  an der Hinterfläche nicht dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen  $i$  und  $i_m$  an der Vorderfläche, hat übrigens seinen Grund darin, dass die Lichtbewegung in der Luft zu beiden Seiten des Prisma von sehr verschiedener Art ist. In dem einfallenden Lichte ist die Amplitude constant, während sie sich in der austretenden Bewegung von Punkt zu Punkt ändert.

§ 19. Ich erlaube mir, noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Ist  $L_1$  die Richtung der einfallenden Lichtstrahlen, und  $L_2$  die Richtung, welche unsere Formeln für das austretende Licht ergeben, so wird, wenn umgekehrt Strahlen, welche der Linie  $L_2$  parallel sind, auf die zweite Fläche fallen, für das austretende Licht nicht die Richtung  $L_1$ , sondern eine davon abweichende gefunden, da ja in diesem Falle ein anderes  $n'$  (§ 17) zur Geltung kommt. Wir können diese Verhältnisse etwas anders ausdrücken, wenn wir uns vor und hinter das Prisma je eine convexe Linse gestellt denken, deren Focalebenen  $V_1$  und  $V_2$  sind. Befindet sich in der ersten Ebene

ein Lichtpunkt  $P_1$ , so wird in einem gewissen Punkt  $P_2$  von  $V_2$  die Intensität den grössten Werth haben. Stellt man dann aber in  $P_2$  einen leuchtenden Punkt, so wird man in der Ebene  $V_1$  das Maximum der Intensität nicht in  $P_1$ , sondern an einer andern Stelle  $P_1'$  finden. Auf den ersten Blick könnte man hierin einen Widerspruch finden mit einem bekannten allgemeinen Satze, nach welchem das Licht von  $P_2$  nach  $P_1$  gehen kann, sobald der Uebergang von  $P_1$  nach  $P_2$  möglich ist. In Wirklichkeit bleibt aber der Satz gültig und es ist das eine Folge der Diffraction, welche bei Metallprismen nicht zu beseitigen ist, da hier die Breite des austretenden Bündels durch die Absorption beschränkt wird. Die von  $P_2$  ausgegangene Lichtbewegung wird in der Ebene  $V_1$  nicht in einem einzigen Punkt concentrirt, sondern über einen gewissen Flächenraum vertheilt, und es kann  $P_1$  sehr gut erleuchtet werden, wenngleich die grösste Intensität an einer anderen Stelle  $P_1'$  gefunden wird.

Leiden, Februar 1892.

---