

ALLGEMEINER AUSDRUCK FÜR DIE COEFFICIENTEN DER FORMEL FÜR DIE ABLENKUNG EINER MAGNETNADEL DURCH EINEN AB- LENKUNGSSTAB IN BELIE- BIGER LAGE.

VON DR. C. BÖRGEN IN WILHELMSHAVEN.

Der Ausdruck für die Ablenkung einer Magnetnadel durch einen Magnet ist bisher meistens nur für bestimmt definierte Stellungen des letzteren und bis zu einer mässigen, aber im allgemeinen ausreichenden Grenze der negativen Potenzen der Entfernung zwischen Ablenkungsstab und Nadel abgeleitet worden. So von Gauss¹ für die Lage des Ablenkungsstabes in der Horizontal-Ebene durch die Nadel und senkrecht zum magnetischen Meridian, von Lamont² für diese und verschiedene andere Lagen, besonders für die, seitdem vielfach zur Bestimmung der horizontalen Componente der erdmagnetischen Intensität angewandte Stellung des Ablenkungsmagnets senkrecht zur Nadel. Von den Beschränkungen der speciellen Lagen des Ablenkungsstabes in der Ebene machten sich frei Riecke,³ Kowalsky und Fritsche,⁴ aber auch sie behielten die Beschränkung bei, dass die Axe des Magnets in der durch die Nadel gelegten horizontalen Ebene liegen solle. Dr. Fritsche ging auch noch einen Schritt weiter und führte die Reihen-Entwicklung bis zur Potenz e^{-9} , während man sich bisher mit der Potenz e^{-7} begnügt hatte. Im Jahre 1891 veröffentlichte Verfasser⁵ eine Formel für die Ablenkung, welche durch einen Magnet hervorgebracht wird, dessen Lage im Raume ganz beliebig ist und leitete aus derselben die Ausdrücke für

¹ C. F. Gauss: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*. Wo allerdings auf die Abhängigkeit der einzelnen Glieder von der Vertheilung des Magnetismus im Stabe nicht näher eingegangen wird.

² Lamont: *Handbuch des Erdmagnetismus*. III. Abschnitt.

³ Riecke in *Poggendorff's Annalen*, Band 149, S. 62, und *Wiedemann's Annalen*, Bd. VIII, S. 299.

⁴ Fritsche: *Ueber die Bestimmung der geographischen Länge und Breite und der drei Elemente des Erdmagnetismus durch Beobachtungen zu Lande*. Hierin auch eine Notiz über Kowalsky's Arbeit.

⁵ Börgen: Ableitung des Ausdrucks für die Ablenkung einer Magnetnadel durch einen Magnet, dessen Lage im Raume eine beliebige sein kann. *Aus dem Archiv der Seewarte*, 1891, No. 2.

eine Reihe von Specialfällen ab. Als Grenze der Reihen-Entwicklung wurde wie bei Lamont e^{-7} festgehalten.

Verschiedene Umstände, namentlich Untersuchungen über die Poldistanz von Magneten, drängten dem Verfasser die Überzeugung auf, dass es unumgänglich nothwendig sei bei Bestimmungen dieser Art wenigstens noch Glieder der Ordnung e^{-9} zu berücksichtigen. Da die angewendete Methode eine allgemeine Entwicklung der Ablenkungsformel, wenn auch nur für die Horizontal-Ebene, voraussetzte, so wurde versucht, einen allgemeinen Ausdruck für die Coefficienten der Reihen-Entwicklung herzuleiten, um mittels desselben jeden beliebigen Coefficienten, dessen Kenntniss etwa erwünscht sein könnte, für sich allein ermitteln zu können. Die Formel (24) in Dr. Fritsche's Werk hätte ja ausgereicht, um die Glieder der Ordnung e^{-9} zu berücksichtigen, es lag dem Verfasser aber daran, sich auch über die höheren Glieder ein Urtheil zu verschaffen. Der gefundene Ausdruck ist verhältnissmässig einfach und da vielleicht auch Andere wünschen könnten, für irgend eine Ablenkungsart die Reihen-Entwicklung weiter fortzusetzen als bisher geschehen ist, so schien es wohl einiges Interesse zu haben, denselben hier mitzutheilen.

Die Abstossung, welche zwei den Magnetismus dm und dm' enthaltende Punkte P_s und P_n die respective in dem Stabe⁶ und in der Nadel, ersterer in der Distanz x , letzterer in der Distanz x' von den respectiven Mittelpunkten der Elementarmagnete, gelegen sind, auf einander ausüben, wird gegeben durch

$$\frac{dm \, dm'}{(P_s P_n)^3},$$

dabei möge die Nadel um den Winkel ϕ aus dem magnetischen Meridian abgelenkt sein.

Zieht man von P_s eine Senkrechte $P_s E_n$ auf die Richtung der Nadel, und ist deren Projection in der durch die Nadel gelegte Horizontal-Ebene $P'_s E_n$, so ist das von dm auf die Nadel in P_n ausgeübte Drehungsmoment gleich

$$\frac{dm \, dm'}{(P_s P_n)^3} \cdot \frac{P_s E_n}{P_s P_n} \cdot \frac{P'_s E_n}{P_s E_n} x' = \frac{P'_s E_n}{(P_s P_n)^3} x' \, dm \, dm',$$

und das ganze Drehungsmoment der Nadel

$$\iint \frac{P'_s E_n}{(P_s P_n)^3} x' \, dm \, dm'.$$

Dieses Drehungsmoment sucht den Nordpol der Nadel zurückzustossen, den Südpol anzuziehen, also die Nadel dem Meridian zu

⁶ Der Kürze wegen schreibe ich einfach *Stab* statt *Ablenkungsstab*.

nähern; in demselben Sinne wirkt aber auch der Erdmagnetismus mit dem Moment

$$\int x' dm' \cdot H \sin \phi = M' H \sin \phi,$$

wenn das magnetische Moment der Nadel mit M' , die horizontale Componente des Erdmagnetismus mit H bezeichnet wird. Da die Nadel sich in Ruhe befindet, so ist die Summe der auf sie wirkenden Kräfte gleich Null, und wir erhalten die Ruhegleichung:

$$(1) \quad M' H \sin \phi + \iint \frac{P'_s E_n}{(P_s P_n)^3} x' dm dm' = 0,$$

worin die Integrationen über die ganze Länge der Magnete ausgedehnt werden müssen.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

- e = Entfernung der Mittelpunkte von Nadel und Stab;
- a = Projection von e auf die Horizontal-Ebene durch die Nadel;
= Höhe des Mittelpunktes des Stabes oberhalb oder unterhalb dieser Ebene;
- x = Entfernung von dm vom Mittelpunkt des Stabes;
- x' = Entfernung von dm' vom Mittelpunkt der Nadel;
- α = Winkel, welchen die Linie a mit dem magnetischen Meridian bildet;
- β = Winkel, welchen die Projection der Axe des Stabes auf die Ebene durch die Nadel mit dem magnetischen Meridian bildet;
- ϕ = Ablenkungs-Winkel der Nadel;
- ψ = Neigung der magnetischen Axe des Stabes gegen die Verticale.

Die Winkel α , β , und ϕ werden in der Ebene des Horizonts von N durch O, S, und W von 0° bis 360° gezählt, während ψ vom Zenith aus nach beiden Seiten von 0° bis 180° gerechnet wird, und alle Winkel beziehen sich auf die Lage des Nord-Endes von Nadel und Stab; endlich soll f *positiv* sein, wenn der Stab *oberhalb*, *negativ* wenn er *unterhalb* der Ebene durch die Nadel liegt.

Wenn man sich die Figur entwirft, so wird man ohne Schwierigkeit ersehen, dass:

$$\begin{aligned} P'_s E_n &= a \sin (\alpha - \phi) + x \sin \psi \sin (\beta - \phi), \\ (P_s P_n)^3 &= e^2 + x^2 + x'^2 + 2 f x \cos \psi + 2 a x \sin \psi \cos (\alpha - \beta) \\ &\quad - 2 a x' \cos (\alpha - \phi) - 2 x x' \sin \psi \cos (\beta - \phi) \end{aligned}$$

ist, und wenn dies in (1) eingesetzt wird, so ersieht man leicht, dass

$$\begin{aligned}
 (2) \quad M' H \sin \phi = & - \int \int \frac{1}{e} \frac{d}{d\phi} \left\{ 1 + \frac{1}{e^2} \left[x^2 + x'^2 + 2fx \cos \psi + 2ax \sin \psi \cos (\alpha - \beta) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{e^2} \left[2ax' \cos (\alpha - \phi) + 2xx' \sin \psi \cos (\beta - \phi) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 & = - \int \int \frac{1}{e} \frac{d}{d\phi} (1 + A - B)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

ist, wenn wir setzen:

$$(3) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{e^2} \left[x^2 + x'^2 + 2 \{ f \cos \psi + a \sin \psi \cos (\alpha - \beta) \} x \right] \\ \quad = \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2 + 2gx) \\ B = \frac{1}{e^2} \left[2ax' \cos (\alpha - \phi) + 2xx' \sin \psi \cos (\beta - \phi) \right] \end{cases}$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad - \left[1 + A - B \right]^{-\frac{1}{2}} &= -1 + \frac{1}{2} (A - B) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (A - B)^2 \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (A - B)^3 - \dots \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2r+2)} \cdot \frac{2r+2}{2r+1} (A - B)^r
 \end{aligned}$$

Hieraus, in Verbindung mit der Form der Werthe von A und B , ersieht man, dass das allgemeine Glied der Entwicklung von $M' H \sin \phi$ die Form

$$\iint K_{n,n'} x^n x'^{n'} dm dm'$$

haben wird, und es ist die Aufgabe einen Ausdruck für $K_{n,n'}$ zu finden, welcher alle Combinationen von Potenzen von A und B umfasst, welche ein mit $x^n x'^{n'}$ multiplicirtes Glied enthalten. Dabei können jedoch alle Glieder weggelassen werden, in denen n oder n' eine gerade Zahl ist, weil das Product $x^n dm$, resp. $x'^{n'} dm'$, in der Nord- und Süd Hälfte des betreffenden Magnets entgegengesetztes Vorzeichen hat, die Summe der einander entsprechenden Producte und damit auch das Integral $\int x^n dm$, resp. $\int x'^{n'} dm'$, daher gleich Null

werden muss. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass der Magnetismus in den Stäben symmetrisch vertheilt ist, was nicht nothwendig immer der Fall zu sein braucht. Diese Glieder werden aber immer sehr klein sein und können überdies durch die Anordnung der Beobachtung völlig eliminirt werden.

Durch folgende Erwägungen gelangt man nun leicht zu dem gesuchten Ausdruck für den allgemeinen Coefficienten $K_{n,n'}$:

1. Da x' gemeinschaftlicher Factor beider Glieder von B ist, so wird jede (ungerade) Potenz von B von 1 bis n' in Verbindung mit noch näher zu bestimmenden Potenzen von A (A^0 eingeschlossen) einen Beitrag zu $K_{n,n'}$ liefern.

2. Nehmen wir die Potenz B^p ($p \leq n'$), so fragt es sich, welche Potenzen von $(A-B)$ in der Entwicklung (4) für den Coefficienten $K_{n,n'}$ zur Anwendung kommen müssen. Dies entscheidet sich durch die Ermittlung der höchsten und niedrigsten Potenz von A , welche, mit B^p multiplicirt, ein $x^n x'^{n'}$ enthaltendes Glied liefert, denn alsdann ist der Exponent r der entsprechenden Potenz von $(A-B)$ gleich p plus dem Exponenten von A .

3. Die *höchste* Potenz von A , welche, mit B^p multiplicirt, ein $x^n x'^{n'}$ enthaltendes Glied liefert, ist offenbar diejenige, welche mit dem nur x'^p enthaltenden Gliede von B^p multiplicirt ein Glied mit $x^n x'^{n'}$ ergibt. Dies ist demnach diejenige Potenz von A , welche ein mit $x^n x'^{n'-p}$ multiplicirtes Glied enthält oder $A^{n+\frac{n'-p}{2}}$. Im Exponenten muss $\frac{n'-p}{2}$ gesetzt werden, weil x' in A nur in der zweiten Potenz vorkommt, während für n in diesem Falle nur das Glied $2gx$ in Frage kommt. Hieraus folgt aber nach (2), dass

$$r = n + \frac{n'-p}{2} + p = \frac{2n + n' + p}{2}$$

der Exponent der *höchsten* Potenz von $(A-B)$ ist, welche für $K_{n,n'}$ noch in Frage kommen kann.

4. In ganz gleicher Weise sieht man, dass die *niedrigste* Potenz von A , welche noch in Verbindung mit B^p einen Beitrag zu $K_{n,n'}$ liefern kann, diejenige ist, welche, mit dem Gliede $x^p x'^p$ oder, wenn $p > n$ ist, mit $x^n x'^p$ multiplicirt, ein Glied $x^n x'^{n'}$ ergibt. Hier sind daher zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $p \leq n$ oder $p > n$ ist.

(a) $p \leq n$. Um $x^n x'^{n'}$ zu ergeben muss $x^p x'^p$ multiplicirt werden mit $x^{n-p} x'^{n'-p}$, d. h. die kleinste Potenz von A , welche in Frage kommt, ist⁷

⁷ Das Product $x^{n-p} x'^{n'-p}$ findet sich in dem Theile von A^{r-p} , welcher nur von $x^2 + x'^2$ herrührt, es muss daher im Exponenten sowohl $\frac{n-p}{2}$ als auch $\frac{n'-p}{2}$ gesetzt werden. Da n, n' und p ungerade Zahlen sind, so sind ihre Differenzen gerade Zahlen.

$$A^{\frac{n'-p}{2}} + \frac{n'-p}{2} = A^{\frac{n+n'-2p}{2}}$$

und es ist daher der Exponent der *kleinsten* Potenz von $(A-B)$, welche $B^p A^{\frac{n+n'-2p}{2}}$ enthält,

$$r = \frac{n + n' - 2p}{2} + p = \frac{n + n'}{2}.$$

(b) $p > n$. Um $x^n x'^{n'}$ zu ergeben muss $x^n x'^p$ multiplicirt werden mit $x'^{n'-p}$, oder B^p ist zu multipliciren mit $A^{\frac{n'-p}{2}}$, und der Exponent der *kleinsten* Potenz von $(A-B)$, welche noch zu berücksichtigen ist, wird

$$r = \frac{n' - p}{2} + p = \frac{n' + p}{2}.$$

Beide Fälle lassen sich zusammenfassen, wenn man

$$r = \frac{n + n' + (p - n)}{2}$$

setzt und festsetzt, dass $p - n = 0$ zu setzen ist, wenn $p < n$ ist.

5. Wir haben demnach als unteren und oberen Grenzwert von r in der Entwicklung von $(A-B)^r$ gefunden

$$r = \frac{n + n' + (p - n)}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{2n + n' + p}{2}.$$

Setzen wir aber $r = \frac{n + n' + 2m}{2}$, so haben wir für m die Grenzwerthe

$$m = \frac{p - n}{2} \quad \text{und} \quad m = \frac{p + n}{2}$$

zu setzen, von denen der erste der Beschränkung unterliegt, dass derselbe gleich Null zu setzen ist, wenn $p < n$ ist. Innerhalb der Entwicklung von $(A-B)^r$ ist es das Glied

$$- \frac{r(r-1) \dots (r-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} A^{r-p} B^p,$$

welches den gesuchten Beitrag zu $K_{n,n'}$ liefert. Wird dies und der eben angeführte Werth von r in (4) und (2) eingesetzt, so erhält man die Formel (5) mittels welcher der Coefficient $K_{n,n'}$ jedes beliebigen $x^n x'^{n'}$ durch Producte von Potenzen von A und B ausgedrückt werden kann. Die weitere Entwicklung ist leicht, wenn man sich die Potenzen von A und B ein für alle Mal hinschreibt, wobei man zweckmässig in den ersteren zunächst die in (3) eingeführte Bezeichnung

$$g = f \cos \psi + a \sin \psi \cos(a - \beta)$$

beibehält; man wird sehr rasch übersehen, welche Glieder in Frage kommen.

$$(5) \quad K_{n,n'} = \frac{1}{e} (-1)^{\frac{n+n'+2m}{2}} \frac{d}{d\phi} \left[\sum_{p=n'}^{\frac{p+n}{2}} \sum_{m=\frac{p-n}{2}}^{\frac{n+n'+2m}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n+n'+2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n+n'+2m)} \cdot \frac{(n+n'+2m) \dots (n+n'+2m-2p+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} A^{\frac{n+n'+2m-2p}{2}} B^p \right]$$

Als specielle Fälle ziehen wir aus (5) die folgenden:

$$(6) \quad n' = 1. \quad K_{n,1} = \frac{1}{e} (-1)^{\frac{n+2m+1}{2}} \frac{d}{d\phi} \left[\sum_{m=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n+2m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n+2m+1)} \cdot \frac{n+2m+1}{2} A^{\frac{n+2m-1}{2}} B \right]$$

$$(7) \quad n = 1. \quad K_{1,n'} = \frac{1}{e} (-1)^{\frac{n+2m+1}{2}} \frac{d}{d\phi} \left[\sum_{p=1}^{\frac{p+n'}{2}} \sum_{m=\frac{p-1}{2}}^{\frac{n'+2m+1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n'+2m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n'+2m+1)} \cdot \frac{(n'+2m+1) \dots (n'+2m-2p+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} A^{\frac{n'+2m-2p+1}{2}} B^p \right]$$

Aus (3) ersieht man, dass nur der mit B bezeichnete Ausdruck Glieder enthält, welche von ϕ abhängen und daher der Differentiation zu unterwerfen sind. Setzen wir daher:

$$(8) \quad \frac{dB}{d\phi} = B' = \frac{1}{e^2} \left[2 a x' \sin(a-\phi) + 2 x x' \sin(\beta-\phi) \right],$$

so hat man in (5), (6) und (7) $p \cdot B^{p-1} \cdot B'$ anstatt $\frac{dB^p}{d\phi}$ einzusetzen.

Diese Art der Rechnung ist meistens bequemer, als wenn man erst die ganze Entwicklung nach den genannten Formeln ausführen und dann erst differentiiiren würde, weil sie Gelegenheit giebt die Ordnung der Glieder sofort nach den gemeinschaftlichen Factoren $\sin(a-\phi)$ und $\sin(\beta-\phi)$ vorzunehmen, wodurch viel Schreiberei erspart wird; auch hat man mit kleineren (geraden) Potenzen von B zu rechnen, was auch als ein kleiner Vortheil anzusehen ist.

Nachstehend lassen wir die Ausdrücke von $K_{n,n'}$ von $K_{1,1}$ bis $K_{6,1}$ folgen:

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= \frac{1}{e} \left(+ \frac{3}{4} A - \frac{1}{2} \right) B', \\
 K_{8,1} &= \frac{1}{e} \left(+ \frac{3}{4} A - \frac{15}{16} A^2 + \frac{35}{32} A^3 \right) B', \\
 K_{1,3} &= \frac{1}{e} \left[\left(+ \frac{3}{4} A - \frac{15}{16} A^2 \right) + \left(- \frac{5}{16} + \frac{35}{32} A \right) 3 B^2 \right] B', \\
 K_{6,1} &= \frac{1}{e} \left(- \frac{15}{16} A^2 + \frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 + \frac{693}{512} A^5 \right) B', \\
 K_{8,3} &= \frac{1}{e} \left[\left(- \frac{15}{16} A^2 + \frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 \right) + \left(- \frac{5}{16} + \frac{35}{32} A - \frac{315}{128} A^2 + \frac{1155}{256} A^3 \right) 3 B^2 \right] B', \\
 K_{1,5} &= \frac{1}{e} \left[\left(- \frac{15}{16} A^2 + \frac{35}{32} A^3 \right) + \left(+ \frac{35}{32} A - \frac{315}{128} A^2 \right) 3 B^2 + \left(- \frac{63}{256} + \frac{693}{512} A \right) 5 B^4 \right] B', \\
 K_{1,1} &= \frac{1}{e} \left(+ \frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 + \frac{693}{512} A^5 - \frac{3003}{2048} A^6 + \frac{6435}{4096} A^7 \right) B', \\
 K_{8,3} &= \frac{1}{e} \left[\left(+ \frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 + \frac{693}{512} A^5 - \frac{3003}{2048} A^6 \right) + \left(+ \frac{35}{32} A - \frac{315}{128} A^2 + \frac{1155}{256} A^3 - \frac{15015}{2048} A^4 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{45045}{4096} A^5 \right) 3 B^2 \right] B', \\
 K_{8,5} &= \frac{1}{e} \left[\left(+ \frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 + \frac{693}{512} A^5 \right) + \left(+ \frac{35}{32} A - \frac{315}{128} A^2 + \frac{1155}{256} A^3 - \frac{15015}{2048} A^4 \right) 3 B^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(- \frac{63}{256} + \frac{693}{512} A - \frac{9009}{2048} A^2 + \frac{45045}{4096} A^3 \right) 5 B^4 \right] B', \\
 K_{1,7} &= \frac{1}{e} \left[\left(\frac{35}{32} A^3 - \frac{315}{256} A^4 \right) + \left(- \frac{315}{128} A^2 + \frac{1155}{256} A^3 \right) 3 B^2 + \left(+ \frac{693}{512} A - \frac{9009}{2048} A^2 \right) 5 B^4 \right. \\
 &\quad \left. + \left(- \frac{429}{2048} + \frac{6435}{4096} A \right) 7 B^6 \right] B', \\
 K_{6,1} &= \frac{1}{e} \left(- \frac{315}{256} A^4 + \frac{693}{512} A^5 - \frac{3003}{2048} A^6 + \frac{6435}{4096} A^7 - \frac{109395}{65536} A^8 + \frac{230945}{131072} A^9 \right) B', \text{ u. s. w.}
 \end{aligned}$$

(9)

Aus (3) ersieht man, dass die Grössen A und B reine Zahlengrössen sind, dasselbe muss daher auch mit der aus Potenzen von A und B zusammengesetzten Grösse $F x^n x'^n$ der Fall sein, und damit dies eintritt, muss F den Factor $e^{-(n+n')}$ enthalten. Da nun nach (5) $K_{n,n'} = e^{-1}$. F ist, so muss $K_{n,n'}$ den Factor $e^{-(n+n'+1)}$ enthalten, und zwar ist dies die *niedrigste* negative Potenz von e , welche in $K_{n,n'}$ vorkommt. Denselben Factor müssen naturgemäss alle Glieder enthalten, für welche $n + n'$ denselben Werth hat, und man sieht daraus, dass die Glieder der Entwicklung von (2) sich in Gruppen theilen lassen, für welche $e^{-(n+n'+1)}$ gemeinschaftlicher Factor ist, derart, dass nach seiner Ausscheidung die $K_{n,n'}$ nur reine Zahlengrössen enthalten, weil alle Potenzen von a und f und deren Producte durch Potenzen von e von gleicher Ordnung dividirt werden. Aus dieser Betrachtung folgt daher, dass, wenn $n + n' = r + 1$ gesetzt wird, die Glieder mit den Factoren $K_{r,1}, K_{r-2,3} \dots K_{3,r-2}, K_{1,r}$ eine solche Gruppe bilden.

Wenn wir nun Lamont's Bezeichnung

$$\int x^n dm = M_n \text{ und } \int x'^n dm = M'_n$$

einführen, mit der Ausnahme (ebenfalls nach Lamont), dass die magnetischen Momente der Stäbe $\int x dm = M$ und $\int x' dm = M'$ ohne Index geschrieben werden, so können wir den Ausdruck (2) für die Ablenkung der Nadel, wenn beide Seiten der Gleichung noch durch $M M'$ dividirt werden, in folgender Weise schreiben:

$$(10) \quad \frac{H}{M} \sin \phi =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(K_{r,1} \frac{M_r}{M} + K_{r-2,3} \frac{M_{r-2} M'_3}{M M'} \dots + K_{3,r-2} \frac{M_3 M'_{r-2}}{M M'} + K_{1,r} \frac{M'_r}{M'} \right)$$

worin demnach alle K den gemeinschaftlichen Factor $e^{-(r+2)}$ haben. In (9) sind die Ausdrücke für die Coefficienten bereits nach solchen Gruppen geordnet worden.

Was die physikalische Bedeutung von $\frac{M_r}{M}$, resp. $\frac{M'_r}{M'}$, angeht, so können nach den bisherigen Untersuchungen diese Grössen als gerade Potenzen der Poldistanz, resp. des Stabes und der Nadel, angesehen werden, und zwar ist, wenn wir die Distanz der Pole des Stabes mit d_s , diejenige der Nadel mit d_n bezeichnen:

$$(11) \quad \frac{M_r}{M} = \left(\frac{d_s}{2} \right)^{r-1}, \quad \frac{M'_r}{M'} = \left(\frac{d_n}{2} \right)^{r-1}.$$

Unter den Polen eines Magnets sind diejenigen Punkte zu verste-

hen, in welchen man sich den ganzen Magnetismus jeder Stabhälfte vereinigt denken kann, um dieselbe Fernwirkung zu erhalten wie durch die wirkliche Vertheilung des Magnetismus im Stabe. Es ist nach den bisherigen Untersuchungen des Verfassers äusserst wahrscheinlich, dass d_s und d_n zwischen 0.80 und 0.81 der Länge der Magnete betragen werden, und zwar ist bei stark magnetisirten Stäben die Poldistanz ein kleinerer Bruchtheil der Länge als bei schwach magnetisirten Stäben. Dies ist etwas weniger als von F. Kohlrausch⁸ gefunden wurde, welcher $\frac{2}{3}$ als das Verhältniss zwischen Poldistanz und Länge des Stabes angiebt; es ist aber sehr wahrscheinlich, dass bei dieser Bestimmung die höheren Glieder nicht genügend eliminirt sind.

Um auf bestimmte Fälle, bezüglich der Lage des Stabes zur Nadel, überzugehen, müssen für f , α , β und ψ entsprechende Werthe eingeführt werden. Soll die Axe des Magnets horizontal liegen, so ist $\psi = 90^\circ$ zu setzen, und wenn dieselbe in der Horizontal-Ebene durch die Nadel liegen soll, so wird $f = 0$ und $\alpha = e$. Die Lage der magnetischen Axe senkrecht zum magnetischen Meridian mit dem Nordende nach Osten wird ausgedrückt durch $\beta = 90^\circ$ und senkrecht zur Nadel durch $\beta - \phi = 90^\circ$; ebenso ergiebt $\alpha = 90^\circ$, resp. $\alpha - \phi = 90^\circ$, die Lage des Magnets auf der östlichen Seite, resp. des Meridians und der Nadel, und zwar ist die Verbindungslinie von Stab und Nadel senkrecht auf dieser; $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha - \phi = 0^\circ$, definirt eine solche nördlich von der Nadel im magnetischen Meridian, resp. in der Verlängerung der Nadel über das Nordende hinaus.

Es mögen jetzt noch die Ausdrücke für einige Ablenkungsarten hier einen Platz finden.

1. *Erste Gauss'sche Hauptlage.* Ablenkungsmagnet östlich von und senkrecht auf dem magnetischen Meridian, Nordende nach Osten. Hier ist zu setzen: $f = 0$, $\psi = 90^\circ$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\alpha - \beta = 0^\circ$, daher:

$$A = \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2 + 2ex), \quad B = \frac{2}{e^2} \sin \phi (xx' + ex'),$$

$$B' = \frac{2}{e^2} \cos \phi (xx' + ex').$$

Da nach (9) B' in allen Gliedern vorkommt, so ist $\cos \phi$ gemeinschaftlicher Factor der ganzen rechten Seite von (10) und kann daher auf die linke Seite übertragen werden, indem wir $tg \phi$ statt $\sin \phi$ schreiben. Ebenso kann durch $K_{1,1} = 2$ dividirt werden, und wir erhalten bis zur Potenz e^{-2} , wenn wir, wie üblich, e^2 als Factor auf die

⁸ *Nachrichten von der Königl. Gesell. d. Wiss. und d. Georg-Augusts Un. zu Göttingen.* No. 13, 1883, S. 400.

linke Seite bringen, um rechts nur reine Zahlengrößen⁹ zu behalten:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \frac{1}{2} e^3 \frac{H}{M} t g \phi &= 1 + \frac{1}{e^2} \left[2 \frac{M_3}{M} - 3 \frac{M'_3}{M'} (1 - 5 \sin^2 \phi) \right] \\
 &+ \frac{1}{e^4} \left[3 \frac{M_5}{M} - 15 \frac{M_3 M'_3}{M M'} (1 - 5 \sin^2 \phi) + \frac{45}{8} \frac{M'_5}{M'} \right. \\
 &\quad \left. (1 - 14 \sin^2 \phi + 21 \sin^4 \phi) \right] \\
 &+ \frac{1}{e^6} \left[4 \frac{M_7}{M} - 42 \frac{M_5 M'_5}{M M'} (1 - 5 \sin^2 \phi) + \frac{105}{2} \right. \\
 &\quad \left. \frac{M_3 M'_3}{M M'} (1 - 14 \sin^2 \phi + 21 \sin^4 \phi) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{35}{4} \frac{M'_7}{M'} (1 - 27 \sin^2 \phi + 105 \sin^4 \phi - \frac{429}{5} \sin^6 \phi) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

2. *Zweite Gauss'sche Hauptlage.* Magnet nördlich von der Nadel senkrecht zum magnetischen Meridian. Wenn die Nadel nach Osten abgelenkt werden soll, so ist zu setzen: $f = 0$, $\psi = 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 270^\circ$, $\alpha - \beta = 90^\circ$, womit wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2), \quad B = \frac{2}{e^2} \left[e x' \cos \phi - x x' \sin \phi \right] \\
 B' &= -\frac{2}{e^2} \left[e x' \sin \phi + x x' \cos \phi \right]
 \end{aligned}$$

Man erhält daher:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad e^3 \frac{H}{M} t g \phi &= 1 - \frac{1}{e^2} \left[\frac{3}{2} \frac{M_3}{M} - 6 \frac{M'_3}{M'} \left(1 - \frac{15}{4} \sin^2 \phi \right) \right] + \frac{1}{e^4} \left[\frac{15}{8} \right. \\
 &\quad \left. \frac{M_5}{M} - \frac{45}{2} \frac{M_3 M'_3}{M M'} \left(1 - \frac{23}{6} \sin^2 \phi \right) + 15 \frac{M'_5}{M'} \left(1 - \frac{21}{2} \sin^2 \phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{105}{8} \sin^4 \phi \right) \right] - \frac{1}{e^6} \left[\frac{35}{16} \frac{M_7}{M} - \frac{105}{2} \frac{M_5 M'_5}{M M'} \left(1 - \frac{31}{8} \sin^2 \phi \right) \right. \\
 &\quad \left. + 105 \frac{M_3 M'_3}{M M'} \left(1 - 11 \sin^2 \phi + \frac{225}{16} \sin^4 \phi \right) - 28 \frac{M'_7}{M'} \left(1 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{81}{4} \sin^2 \phi + \frac{495}{8} \sin^4 \phi - \frac{3003}{64} \sin^6 \phi \right) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

3. *Erste Lamont'sche Hauptlage.* Magnet östlich von der Nadel und senkrecht auf derselben, Ablenkung nach Osten, dann ist $f = 0$, $\psi = 90^\circ$, $\alpha - \phi = \beta - \phi = 90^\circ$, $\alpha - \beta = 0^\circ$ und

⁹ Aus (11) ergibt sich, dass $\frac{M_3}{M}$, $\frac{M'_3}{M'}$ und e^2 , $\frac{M_5}{M}$, $\frac{M_3 M'_3}{M M'}$, $\frac{M'_5}{M'}$ und e^4 u. s. w. von gleicher Ordnung sind.

$$A = \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2 + 2ex), B = 0, B' = \frac{2}{e^2} (xx' + ex').$$

Alle Potenzen von B fallen demnach weg und in (9) bleiben nur die mit B' allein multiplicirten Glieder übrig. Das Resultat der Entwicklung ist:

$$(14) \quad \frac{1}{2} e^3 \frac{H}{M} \sin \phi = 1 + \frac{1}{e^2} \left[2 \frac{M_3}{M} - 3 \frac{M_3'}{M'} \right] + \frac{1}{e^4} \left[3 \frac{M_3}{M} - 15 \frac{M_3 M_3'}{M M'} \right. \\ \left. + \frac{45}{8} \frac{M_3'}{M'} \right] + \frac{1}{e^6} \left[4 \frac{M_1}{M} - 42 \frac{M_3 M_3'}{M M'} + \frac{105}{2} \frac{M_3 M_3'}{M M'} \right. \\ \left. - \frac{35}{4} \frac{M_1'}{M'} \right] + \dots$$

4. *Zweite Lamont'sche Hauptlage.* Magnet nördlich in der Verlängerung der Nadel, senkrecht auf derselben, Ablenkung nach Osten, dann ist $f = 0$, $\psi = 90^\circ$, $\alpha - \phi = 0^\circ$, $\beta - \phi = 270^\circ$, $\alpha - \beta = 90^\circ$ und

$$= A \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2), B = \frac{2}{e} x', B' = -\frac{2}{e^2} x x';$$

womit man erhält:

$$(15) \quad e^3 \frac{H}{M} \sin \phi = 1 - \frac{1}{e^2} \left[\frac{3}{2} \frac{M_3}{M} - 6 \frac{M_3'}{M'} \right] + \frac{1}{e^4} \left[\frac{15}{8} \frac{M_3}{M} - \frac{45}{2} \frac{M_3 M_3'}{M M'} \right. \\ \left. + 15 \frac{M_3'}{M'} \right] - \frac{1}{e^6} \left[\frac{35}{16} \frac{M_1}{M} - \frac{105}{2} \frac{M_3 M_3'}{M M'} + 105 \frac{M_3 M_3'}{M M'} \right. \\ \left. - 28 \frac{M_1'}{M'} \right] + \dots$$

5. Endlich möge noch eine Ablenkungsart behandelt werden, welche sich besonders zur genauen Bestimmung der Poldistanz von Magneten eignet¹⁰ und vom Verfasser zu diesem Zwecke in ziemlich ausgedehntem Maasse benutzt worden ist. Die Lage des Stabes ist die der ersten Lamont'schen Hauptlage, jedoch geht die Verlängerung desselben nicht, wie bei dieser, durch die Mitte der Nadel, sondern schneidet ihre Verlängerung in einem Abstände $= k$, während die Mitte des Stabes um die Grösse h östlich von dieser liegt, so dass $e^2 = h^2 + k^2$ ist. In diesem Falle ist $f = 0$, $\psi = 90^\circ$, $\sin(\alpha - \phi) = \frac{h}{e}$, $\cos(\alpha - \phi) = \frac{k}{e}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{h}{e}$, $\beta - \phi = 90^\circ$ und

$$A = \frac{1}{e^2} (x^2 + x'^2 + 2hx), B = \frac{2}{e^2} kx', B' = \frac{2}{e^2} (xx' + hx').$$

¹⁰ Börgen: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung des Polabstandes eines Magnets, *Annalen der Hydrographie*, 1891, Februar und März Heft. Dieselbe Methode wurde gleichzeitig unabhängig von Mr. Blakesley in *Philosophical Magazine*, etc., March 1891, empfohlen, aber leider ist die elegante Form der von diesem ge-

Wenn diese Werthe in die Formeln (9) eingesetzt werden, so erhält man, unter Beschränkung bezüglich der mit höheren Potenzen als e^{-4} multiplicirten Glieder auf $K_{7,1}$ und $K_{9,1}$, und wenn alles nur durch h und e ausgedrückt wird, den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad e^3 \frac{H}{M} \sin \phi = & 3 \frac{h^2}{e^2} - 1 + \frac{1}{e^2} \frac{M_3}{M} \left[+ \frac{3}{2} \quad 15 \frac{h^2}{e^2} + \frac{35}{2} \frac{h^4}{e^4} \right] \\
 & + \frac{1}{e^2} \frac{M'_3}{M'} \left[-6 + \frac{105}{2} \frac{h^2}{e^2} - \frac{105}{2} \frac{h^4}{e^4} \right] \\
 & + \frac{1}{e^4} \frac{M_5}{M} \left[\frac{15}{18} + \frac{315}{8} \frac{h^2}{e^2} - \frac{945}{8} \frac{h^4}{e^4} + \frac{693}{8} \frac{h^6}{e^6} \right] \\
 & + \frac{1}{e^4} \frac{M_3 M'_3}{M M'} \left[+ \frac{45}{2} - \frac{1785}{4} \frac{h^2}{e^2} + 1260 \frac{h^4}{e^4} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3465}{4} \frac{h^6}{e^6} \right] \\
 & + \frac{1}{e^4} \frac{M'_6}{M'} \left[-15 + \frac{525}{2} \frac{h^2}{e^2} - \frac{5355}{8} \frac{h^4}{e^4} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3465}{8} \frac{h^6}{e^6} \right] \\
 & + \frac{1}{e^6} \frac{M_7}{M} \left[+ \frac{35}{16} \quad \frac{315}{4} \frac{h^2}{e^2} + \frac{3465}{8} \frac{h^4}{e^4} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3003}{4} \frac{h^6}{e^6} + \frac{6435}{16} \frac{h^8}{e^8} \right] \\
 & + \frac{1}{e^8} \frac{M_9}{M} \left[- \frac{315}{128} + \frac{17325}{128} \frac{h^2}{e^2} - \frac{75075}{64} \frac{h^4}{e^4} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{225225}{64} \frac{h^6}{e^6} - \frac{546975}{128} \frac{h^8}{e^8} + \frac{230945}{128} \frac{h^{10}}{e^{10}} \right].
 \end{aligned}$$

Die Methode, diese Gleichung zur Bestimmung von $\frac{M_3}{M}$ und damit nach (11) derjenigen der Poldistanz des Ablenkungsmagnets zu benutzen, besteht einfach darin, für ein gegebenes h dasjenige e zu bestimmen, für welches die Nadel keine Ablenkung erfährt. Ueber die Methode der Beobachtung und Berechnung, sowie über einige Ergebnisse von Poldistanzbestimmungen wird in einer späteren Nummer der ZEITSCHRIFT berichtet werden.

beuen Lösung praktisch nicht zu brauchen, weil sie die Länge der abgelenkten Nadel gänzlich ausser Acht lässt, obwohl dieselbe eine wesentliche Rolle spielt. Ein von Blakesley dort erwähntes Beobachtungs-Resultat, dass die Pole sich mit zunehmender Entfernung zwischen Nadel und Stab rasch den Enden des Stabes näherten, verdankt seine Entstehung nur dieser Vernachlässigung.

Bisher ist vorausgesetzt worden, dass Nadel und Stab Elementarmagnete seien, die nur eine Dimension, die Länge, besitzen. Will man auf körperliche Magnete übergehen, so treten gewisse Zusatzglieder auf, welche die Dimensionen der Magnete in Breite und Dicke enthalten. Nachstehend mögen, unter Hinweis auf eine Abhandlung des Verfassers,¹¹ diese Zusatzglieder für die im Vorhergehenden behandelten Ablenkungsarten angegeben werden.

1. *Parallelepipedische Stäbe.* Breite $2b, 2b'$; Dicke $2d, 2d'$, wovon die accentuirten Buchstaben sich auf die Nadel beziehen. Zu den Ausdrücken (12) und (13) für die erste und zweite Gauss'sche Hauptlage sind folgende Glieder hinzuzufügen:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \text{I Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{c^2}{e^2} \left[(15 \cos^2 \phi - 11) b'^2 - b^2 - d^2 - d'^2 \right] \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{c^2}{2e^2} \left[(34 - 45 \cos^2 \phi) b'^2 + 4b^2 - d^2 - d'^2 \right] \right\}$$

2. *Cylindrische Vollmagnete* vom Radius r und r' .

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \text{I Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{3c^2}{4e^2} \left[(15 \cos^2 \phi - 12) r'^2 - 2r^2 \right] \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{3c^2}{8e^2} \left[(33 - 45 \cos^2 \phi) r'^2 + 3r^2 \right] \right\}$$

3. *Cylindrische Hohlmagnete.* Aeusserer Radius r und r' , innerer Radius r_1 und r'_1 .

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \text{I Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{3c^2}{4e^2} \left[(15 \cos^2 \phi - 12) (r'^2 + r_1'^2) - 2(r^2 + r_1^2) \right] \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II Gauss'sche} \\ \text{Hauptlage} \end{array} + \frac{3c^2}{8e^2} \left[(33 - 45 \cos^2 \phi) (r'^2 + r_1'^2) + 3(r^2 + r_1^2) \right] \right\}$$

Der numerische Factor c^2 ist wenig grösser als 1 und kann etwa gleich 1.2, für Hohlmagnete jedoch nur = 1 gesetzt werden.

Auf die Lamont'schen Hauptlagen geht man über, wenn man in (17), (18), und (19) $\cos \phi = 1$ setzt.

Für die oben unter 5. behandelte Ablenkungsart endlich sind die Zusatzglieder resp. für parallelepipedische und cylindrische Voll- und Hohlmagnete:

¹¹ Börgen: Ueber den Einfluss der körperlichen Dimensionen eines Magnets auf die durch denselben aus beliebiger Lage hervorgebrachte Ablenkung einer Nadel. *Aus dem Archiv der Seewarte*, 1895, No. 5. Auch Professor Riecke hat die körperlichen Dimensionen berücksichtigt. S. die in Anm. 3 erwähnten Abhandlungen. Ebenso Dr. Fritsche in dem in Anm. 4 genannten Werke, doch stimmen dessen Ausdrücke nicht ganz mit denen von Riecke und den obigen überein.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{c^2}{3} (A b^2 + B b'^2 + C d^2 + D d'^2) \\ -\frac{c^2}{4} \left[(A + C) r^2 + (B + D) r'^2 \right] \\ -\frac{c^2}{4} \left[(A + C) (r^2 + r_1^2) + (B + D) (r'^2 + r_1'^2) \right] \end{array} \right.$$

worin die Coefficienten folgende Bedeutung haben:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 6 - \frac{105}{2} \frac{h^2}{e^2} + \frac{105}{2} \frac{h^4}{e^4} \\ B = \frac{33}{2} + 150 \frac{h^2}{e^2} - \frac{315}{2} \frac{h^4}{e^4} \\ C = D = \frac{3}{2} + \frac{15}{2} \frac{h^2}{e^2} \end{array} \right.$$

Haben Nadel und Stab nicht dieselbe Gestalt, so braucht man aus (17) bis (20) nur die betreffenden Glieder zu entnehmen und dieselben zu combiniren.