Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

Von

KRAUSE und MOHRMANN in Rostock.

In zwei Arbeiten gleichen Titels*) ist erstens nachgewiesen worden, dass die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitspunkte, zurückgeführt werden kann auf das Problem die Grössen

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + na,\ n\tau)}{\vartheta_\beta(v,\ \tau)}$$

zu entwickeln. Zweitens sind dann zwei Methoden angegeben worden, mit deren Hülfe dieses Problem wirklich gelöst werden kann. Diese beiden Methoden sind als *indirecte* bezeichnet worden. Es wurden bei der ersten gewisse Restfunctionen als gegeben angesehen und mit ihrer Hülfe die Darstellung der Primfunctionen in der Form von trigonometrischen Reihen wirklich gegeben. Etwas ähnliches gilt von der zweiten Methode, die allerdings, wie leicht folgt, auch in eine directe verwandelt werden kann.

Im Folgenden sollen nun drei *directe* Lösungen desselben Problems gegeben werden. Die erste ist die in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchliche, welche auf den Eigenschaften der complexen Integrale beruht.

Von besonderem Interesse dürften die zweite und dritte Methode sein und zwar, weil sie mit durchaus elementaren Mitteln operiren und auf einigen wenigen ebenso einfachen wie durchsichtigen Gedanken beruhen. Beide können als Verallgemeinerung der Methode angesehen werden, mit deren Hülfe Herr Biehler in seiner schon

---

*) Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen, erste und zweite Abhandlung. Von M. Krause. Bd. 30 dieser Annalen p. 425 ff., p. 516 ff.

erwähnten Dissertation eine Fülle schöner Reihenentwickelungen findet. Die Entwickelung der gewöhnlichen elliptischen Functionen kann aus den fertigen Formeln durch Specialisirung unmittelbar abgeleitet werden. Unter allen elementaren Methoden, die bei der Entwickelung dieser Functionen überhaupt existiren, dürfte der letzteren der entschiedene Vorzug zu geben sein.

Die beiden ersten Methoden haben das gemeinsame, dass in den fertigen Ausdrücken eine Reihe unbekannter Constanten auftritt, so zwar, dass man nach einigen Reductionen zu denselben Resultaten gelangt wie bei der ersten indirecten Methode der früheren Arbeit.

Mit ihrer Hülfe kommt man dann durch systematische Entwickelung auf völlig naturgemässem Wege zu der Definition und Darstellung der Restfunctionen, die in der vorigen Arbeit als einmal gegeben angenommen wurden. *Erst hiermit kann die Theorie derselben als wirklich begründet angesehen werden.*

Die dritte Methode ist nur für den Fall der Functionen zweiter Art durchgeführt worden, um ihren Gedankengang möglichst klar hervortreten zu lassen. Im allgemeinen Falle ist durchaus analog vorzugehen. Inwieweit hierbei sich neue Resultate ergeben, wird bei andrer Gelegenheit gezeigt werden.

Die beiden ersten Methoden sind von Herrn Mohrmann im mathematischen Seminar der hiesigen Universität durchgeführt worden.

§ 1.

Erste directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Es möge gesetzt werden:

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_0(nv + na,\, n\tau)}{\vartheta_0(v,\, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varkappa}\, a_\varkappa \cdot e^{2\varkappa\pi i v}. \tag{1}$$

Es handelt sich darum, die Grössen $a_\varkappa$ zu bestimmen. Aus bekannten Theorien folgt:

$$a_\varkappa = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv. \tag{2}$$

Zur Auswerthung dieses Ausdruckes nehmen wir das Integral:

$$\int \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv$$

und erstrecken dasselbe über den Umfang des Parallelogramms:

$$-\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}+\nu\tau, \quad -\frac{1}{2}+\nu\tau,$$

wobei ν eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Dann wird das Integral gleich:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv + \int\limits_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}+\nu\tau} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv + \int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv.$$

Da $\varphi(v)$ die Periode 1 hat, so wird das zweite und vierte Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung sich gegenseitig fortheben und es bleibt:

$$\int \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv = a_\varkappa + \int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv.$$

In dem letzten Integral auf der rechten Seite setzen wir an Stelle von:

$$v : v + \nu\tau,$$

so wird:

$$\int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv = \int\limits_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(nv + n\nu\tau + na, \; n\tau)}{\vartheta_0(v + \nu\tau, \; \tau)} \cdot e^{-2\varkappa\pi i(v+\nu\tau)} \cdot dv$$

$$= e^{-\nu\pi i\left[2na + \left(2\varkappa + \nu(n-1)\right)\tau\right]} \int\limits_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \varphi(v) \cdot e^{-2\left(\varkappa + (n-1)\nu\right)\pi i v} \cdot dv.$$

Mithin erhalten wir:

$$(3) \quad \int \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv = a_\varkappa - e^{-\nu\pi i\left[2na + \left(2\varkappa + \nu(n-1)\right)\tau\right]} \cdot a_{\varkappa+(n-1)\nu}.$$

Das Integral auf der linken Seite kann noch auf andere Weise berechnet werden, indem die Summe der geschlossenen Integrale:

$$\int \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv$$

um die Unstetigkeitspunkte im Innern des Parallelogramms:

$$-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}+\nu\tau,\quad -\frac{1}{2}+\nu\tau$$

gebildet wird. Diese Unstetigkeitspunkte sind, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte:

$$\frac{\tau}{2},\quad \frac{3\tau}{2},\quad \ldots\quad \frac{2\nu-1}{2}\tau.$$

Bilden wir das geschlossene Integral

$$\int \varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$

um den Punkt $\frac{2m-1}{2}\tau$!

Die Taylor'sche Entwickelung um diesen Punkt herum lautet:

$$\vartheta_0(nv+na,\ n\tau)=\vartheta_0\left(\frac{n(2m-1)\tau}{2}+na,\ n\tau\right)+\text{steig. Pot.}$$

$$=i\cdot(-1)^{m-1}\cdot\vartheta_1(na,n\tau)\cdot e^{-\frac{2m-1}{2}\pi i\left(2na+\frac{2m-1}{2}n\tau\right)}+\cdots,$$

$$\vartheta_0(v,\ \tau)=\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right)\cdot\vartheta_0'\left(\frac{2m-1}{2}\tau,\tau\right)+\text{steig. Pot.}$$

$$=\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right)\cdot i\cdot(-1)^{m-1}\cdot\vartheta_1'\cdot e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\pi i\tau}+\cdots,$$

$$e^{-2\varkappa\pi i v}=e^{-(2m-1)\varkappa\pi i\tau}+\text{steig. Pot.}$$

Daraus folgt, dass der Factor von:

$$\frac{1}{v-\frac{2m-1}{2}\tau}$$

in der Entwickelung von

$$\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}$$

die Form annimmt:

$$\frac{\vartheta_1(na,\ n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot e^{-(2m-1)\pi i\left[na+\left(\frac{2m-1}{4}\right)(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]} \tag{4}$$

Das geschlossene Integral um den Punkt

$$v=\frac{2m-1}{2}\tau$$

hat dann denselben Werth multiplicirt mit $2\pi i$.

Demgemäss nimmt das gesuchte Integral:

$$\int\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$

die Form an:

$$2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{-(2m-1)\pi i\left[na+\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]},$$

oder also wir erhalten die Recursionsformel:

$$(5_a)\qquad a_\varkappa = e^{-2\nu n\pi i a-\nu\pi i\tau\left(\nu(n-1)+2\varkappa\right)}\cdot a_{\varkappa+(n-1)\nu}$$
$$+\,2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{-(2m-1)\pi i\left[na+\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]}.$$

Genau so würde folgen:

$$(5_b)\qquad a_\varkappa = e^{2\nu n\pi i a+\nu\pi i\tau\left(-\nu(n-1)+2\varkappa\right)}\cdot a_{\varkappa-(n-1)\nu}$$
$$-\,2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{(2m-1)\pi i\left[na-\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]}.$$

So haben wir Recursionsformeln gefunden, mit deren Hülfe es möglich ist, die Entwickelung in trigonometrische Reihen in expliciter Form wirklich herzustellen.

In der That, jedenfalls können wir schreiben:

$$(6)\qquad \varphi(v) = a_0 + a_1\cdot e^{2\pi i v} + \cdots + a_{n-2}\cdot e^{2\pi i(n-2)v}$$
$$+\sum_1^{\infty}{}_\nu \sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa+(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i\left(\varkappa+(n-1)\nu\right)v}$$
$$+\sum_1^{\infty}{}_\nu \sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa-(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i\left(\varkappa-(n-1)\nu\right)v}.$$

Die Ausdrücke $a_{\varkappa\pm(n-1)\nu}$ können vermöge der angegebenen Recursionsformeln durch die Grössen $a_\varkappa$ ersetzt werden. Es ergeben sich dann zweierlei Arten von Gliedern. Erstens erhalten wir Glieder, die den Factor $a_\varkappa$ besitzen, zweitens solche, bei denen dasselbe nicht der Fall ist. Die Glieder der ersten Art sind leicht zu fixiren. In der That, der Factor von $a_\varkappa$ wird:

$$e^{2\pi i\varkappa v}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, e^{2\nu\pi i\left((n-1)v+na\right)+\nu\pi i\tau\left(\nu(n-1)+2\varkappa\right)}$$

oder also gleich:

$$(7)\qquad e^{2\pi i\varkappa v}\cdot\vartheta_3\left[(n-1)v+na+\varkappa\tau,\ (n-1)\tau\right].$$

Etwas complicirter gestaltet sich die Summirung der übrigen Glieder. Für einen festen Werth von v ergeben sich aus der Summe:

$$\sum_1^{\infty}{}_\nu \sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa+(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i\left(\varkappa+(n-1)\nu\right)v}$$

die Glieder

$$\frac{-2\pi i \vartheta_1(na,\, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot e^{2\pi i(n-1)\nu v} \cdot M,$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} M = {} & e^{(2\nu-1)na\pi i + \left(\nu^2 - \frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_0^{n-2} {}^{\varkappa}\, q^{(2\nu-1)\varkappa} \cdot e^{2\pi i\varkappa v} \\ & + e^{(2\nu-3)na\pi i + \left(\nu^2 - \frac{3^2}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_0^{n-2} {}^{\varkappa}\, q^{(2\nu-3)\varkappa} \cdot e^{2\pi i\varkappa v} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + e^{na\pi i + \left(\nu - \frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_0^{n-2} {}^{\varkappa}\, q^{\varkappa} \cdot e^{a\pi i\varkappa v}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} M = {} & e^{(2\nu-1)na\pi i + \left(\nu^2 - \frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1 - q^{(2\nu-1)(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q^{2\nu-1} \cdot e^{2\pi i v}} \\ & + e^{(2\nu-3)na\pi i + \left(\nu^2 - \frac{3^2}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1 - q^{(2\nu-3)(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q^{2\nu-3} \cdot e^{2\pi i v}} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + e^{na\pi i + \left(\nu - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1 - q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q \cdot e^{2\pi i v}} \end{aligned}$$

oder also:

$$(8) \quad M = \sum_0^{\nu-1} {}^{m}\, e^{(2m+1)\pi i\left[na + (n-1)\tau\left(\nu - \frac{2m+1}{4}\right)\right]} \cdot \frac{1 - q^{(n-1)(2m+1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q^{2m+1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck für M ist einzusetzen und dann die Summe nach ν von 1 bis ∞ zu nehmen. Als Factor von:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1(na,\, n\tau)}{\vartheta_1'}$$

ergiebt sich hierbei die folgende Grösse:

$$\begin{aligned} & e^{2\pi i(n-1)v} \cdot e^{na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} \cdot \frac{1 - q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q \cdot e^{2\pi i v}} \\ & + e^{4\pi i(n-1)v} \left[e^{na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(2 - \frac{1}{2^2}\right)} \frac{1 - q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q \cdot e^{2\pi i v}} \right. \\ & \qquad \left. + e^{3na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(6 - \frac{3^2}{2^2}\right)} \cdot \frac{1 - q^{3(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1 - q^3 \cdot e^{2\pi i v}} \right] + \cdots \end{aligned}$$

Wir addiren jetzt nach Verticalreihen d. h. fassen alle Glieder zusammen, die den Factor:

$$e^{na\pi i} \cdot \frac{1 - q^{(n-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}{1 - q \cdot e^{2\pi i v}} \cdot q^{-(n-1)\frac{1}{4}} \text{ etc.}$$

besitzen. Allgemein wird der Factor von:

$$e^{(2m-1)na\pi i} \cdot \frac{1 - q^{(2m-1)(n-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}} \cdot q^{-(n-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

wie leicht ersichtlich ist, lauten:

$$q^{(n-1)m(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v} + q^{(n-1)(m+1)(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i (m+1) v} + \dots$$

oder also:

$$\frac{q^{(n-1)m(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{(n-1)(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}.$$

Das Product der beiden Glieder ergiebt:

$$\frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck ist nach m von 1 bis ∞ zu summiren, so dass wir schliesslich erhalten

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_1^{\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Genau so würden sich aus der zweiten Summe die Glieder ergeben:

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_0^{-\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Daraus folgt, dass die Summe aller Glieder, die nicht mit einer der Grössen $a_\varkappa$ multiplicirt sind, lautet:

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{(2m-1)} \cdot e^{2\pi i v}},$$

oder also:

(9) $$\pi \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot e^{(n-2)\pi i v} \cdot F$$

$$F = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(2m-1)(n-1)i\pi\left[v + \frac{na}{n-1} + \frac{2m-1}{4}\tau + \frac{n-2}{2(n-1)}\tau\right]}}{\sin \pi\left(v + \frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Wir kommen hiermit auf völlig naturgemässem Wege zu der Function:

$$e^{(n-2)\pi i v} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m \frac{e^{(2m-1)(n-1)i\pi\left[v+\frac{na}{n-1}+\frac{2m-1}{4}\tau+\frac{n-2}{2(n-1)}\tau\right]}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Diese Function unterscheidet sich nur unwesentlich von der Function

$$F_{00}(v, \tau)$$

der vorigen Arbeit, *so dass wir zu derselben Darstellung der Primfunctionen wie früher gelangt sind, jetzt aber auf systematischem und naturgemässem Wege.*

§ 2.

Zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Man kann, wie leicht zu sehen ist, ansetzen:

$$(1) \qquad \frac{\vartheta_0(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \varphi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \cdot b_{2n} \cdot e^{2n\pi i v};$$

desgleichen darf man setzen:

$$(2_a) \quad \frac{\vartheta_1(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_1(v,\tau)} - \pi\frac{\vartheta_1(2a,\ 2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{1}{\sin\pi v} = \psi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n c_n \cdot e^{n\pi i v}$$

oder auch, da

$$\psi(v+1,\ a) = -\psi(v, a)$$

ist:

$$(2_b) \qquad \psi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n c_{2n+1} \cdot e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Da nun $v = 0$ für $\psi(v, a)$ kein Unstetigkeitspunkt mehr ist, so sind wir berechtigt, links und rechts an Stelle von v: $v + \frac{\tau}{2}$ zu setzen.

Wir erhalten dann auf der linken Seite den Ausdruck:

$$e^{-\pi i[v+2a]} \cdot q^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\vartheta_0(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} - \pi\frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)},$$

auf der rechten dagegen:

$$q^{\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n c_{2n+1} \cdot q^n \cdot e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich für $\varphi(v, a)$ ein zweiter Ausdruck, nämlich:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad \varphi(v, a) &= \pi q^{\frac{1}{4}} \cdot e^{\pi i [v+2a]} \cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'} \; \frac{1}{\sin \pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} \\
&+ q^{\frac{3}{4}} \cdot e^{\pi i [v+2a]} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\, c_{2n+1} \cdot q^n \cdot e^{(2n+1)\pi i v}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\sin \pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = -2iq^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i v} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, e^{2n\pi i v} \cdot q^n,$$

so erhalten wir für $\varphi(v, a)$ eine zweite Reihe, die nach steigenden und fallenden Potenzen von $e^{2\pi i v}$ fortschreitet. Durch Vergleichung ergeben sich die Relationen:

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad \text{I) für } n \geqq 0 \\
&q^{-\frac{1}{4}} \lambda \left[-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^n + q^n \cdot c_{2n-1}\right] = b_{2n}, \\
&\qquad\qquad \text{II) für } n < 0 \\
&\qquad q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda \cdot q^{-n} \cdot c_{-(2n-1)} = b_{-2(n-1)}, \\
&\qquad\qquad \lambda = e^{2\pi i a}.
\end{aligned}
\right.
$$

Man sieht ferner unmittelbar, dass die Relationen bestehen:

$$\varphi(-v, -a) = \varphi(v, a), \quad \psi(-v, -a) = \psi(v, a).$$

Sieht man die Grössen b und c als Functionen von a an, so wird:

$$b_{-2n}(-a) = b_{2n}(a), \quad c_{-(2n+1)}(-a) = c_{2n+1}(a).$$

Setzt man nun in Gleichung $(4)_{\mathrm{II}}$ $-a$ an Stelle von a, wobei zu beachten ist, dass hierfür λ in seinen reciproken Werth übergeht, so geht diese Gleichung über in:

$$q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda^{-1} \cdot q^{-n} \cdot c_{-(2n-1)}(-a) = b_{-2(n-1)}(-a),$$

oder also in:

$$q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda^{-1} \cdot q^{-n} \cdot c_{2n-1} \qquad = b_{2(n-1)}$$

oder auch:

$$c_{2n-1} \qquad = q^{-\frac{3}{4}+n} \lambda \cdot b_{2(n-1)}.$$

Dieser Werth von c_{2n-1} in $(4)_I$ eingesetzt, ergiebt die Recursionsformel:

$$(5)\qquad b_{2n} = q^{2n-1}\cdot e^{2\cdot 2\pi i a}\cdot b_{2(n-1)} - 2\pi i q^{n-\frac{1}{4}}\cdot e^{2\pi i a}\cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'}.$$

Es ist dieses dieselbe Recursionsformel, die bei der ersten Methode gefunden ist, *so dass wir also zu genau denselben Resultaten, wie vorhin gelangt sind.*

§ 3.

Dritte directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wir sind jedenfalls berechtigt, innerhalb eines gewissen Bereichs die Entwickelung anzusetzen:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta_3(v+a, \tau)}{\vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{v} a_{r,k}\cdot q^{r^2}\cdot e^{2\pi i(kv+ra)},$$

und zwar kann hierbei a alle endlichen Werthe annehmen. Setzen wir nun an Stelle von $a : a+\tau$, so wird einerseits:

$$\frac{\vartheta_3(v+a+\tau, \tau)}{\vartheta_0(v)} = e^{-2\pi i\left(v+a+\frac{\tau}{2}\right)}\cdot\frac{\vartheta_3(v+a, \tau)}{\vartheta_0(v)},$$

und andrerseits ergiebt sich für die Grössen a_{rk} die Recursionsformel:

$$a_{r-1, k-1} = a_{r,k}$$

oder

$$(2)\qquad a_{r,k} = a_{r-k, 0}$$

Aus dieser Formel folgt, dass es zur Kenntniss der gesuchten Coefficienten völlig genügt, die Grössen: $a_{r,0}$ für alle Werthe von r zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu kennen. Dabei findet zu gleicher Zeit die Relation statt:

$$(3)\qquad a_{r,0} = a_{-r,0}.$$

Ganz genau so können wir setzen:

$$(4)\quad \frac{\vartheta_2(v+a, \tau)}{\vartheta_1(v)} = \pi\frac{\vartheta_2(a, \tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{\cos\pi v}{\sin\pi v} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} b_{r,k}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}\cdot e^{\pi i[2kv+(2r+1)a]}.$$

Die Grössen $b_{r,k}$ könnten genau so reducirt werden, wie die Grössen $a_{r,k}$. Da uns aber an ihrer Bestimmung nichts liegt, so beschränken wir uns auf Aufstellung der einen einzigen Beziehung:

$$(5)\qquad b_{r,k} = -b_{-r-1, -k}.$$

Jetzt wird genau so verfahren, wie bei der zweiten Methode. Wir setzen in Gleichung (4) an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$. Durch Coefficientenvergleichung ergiebt sich die Relation:

$$(6) \qquad a_{r+1,0} \cdot q^{(r+1)^2} = -\frac{\pi \cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} \cdot i \cdot b_{r,0} \cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}.$$

In dieser Gleichung setzen wir an Stelle von r: $-r$, so erhalten wir:

$$a_{-r+1,0} \cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} - i\, b_{-r,0} \cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}.$$

oder also:

$$a_{r-1,0} \cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} + i\, b_{r-1,0} \cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}.$$

Setzen wir hierin an Stelle von $r-1$: r, so wird:

$$a_{r,0}\, q^{r^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} + i\, b_{r,0}\, q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}.$$

Mithin ergiebt sich die Recursionsformel:

$$(7) \qquad a_{r+1,0}\, q^{(r+1)^2} + a_{r,0}\, q^{r^2} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'} \cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}$$

oder auch die Formel:

$$(8) \qquad a_{r,0} q^{r^2} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\left[q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2},\, q^{\left(r+\frac{3}{2}\right)^2} \cdots (-1)^n q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}\right] + (-1)^{n+1} a_{r+n+1}\, g^{(r+n+1)^2}.$$

Diese Formeln lehren alle Grössen $a_{r,0}$ kennen, wenn a_{00} gegeben ist, aber sie geben auch unmittelbar $a_{r,0}$ in expliciter Gestalt, indem wir in der letzten Gleichung $n = \infty$ setzen:

$$a_{r,0} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\, q^{-r^2} \cdot \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \cdot q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die soeben gefundene Form der Entwickelung ist von der Hermite'schen verschieden, indessen ist die Reduction auf dieselbe so wenig schwierig, dass von ihr abgesehen werden kann.

Rostock, den 28. Januar 1888.
