

**12. Ueber Schichtung
in einem Strome elektrischer Teilchen;
von Eduard Riecke.**

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Als eine besonders merkwürdige und rätselvolle Erscheinung hat man von jeher die Schichtenbildung in Geissler'schen Röhren betrachtet. Sie zeigt, dass die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Ionen der Länge der Röhre nach in periodischer Weise wechseln, hier ansteigen, dort sinken können. Mit einer Wellenbewegung im gewöhnlichen Sinne hat die Erscheinung nichts zu thun, denn die Elemente der Strömung zeigen an einer und derselben Stelle der Röhre keinen periodischen Wechsel. Viel wahrscheinlicher ist es, dass die Schichtenbildung eine Begleiterscheinung der Strömung ist; ihr Analogon sind nicht die Kundt'schen Staubfiguren, sondern die Anschwellungen und Einschnürungen eines unter hohem Druck austretenden Gasstrahles, und der periodische Wechsel der Dichtigkeit, welcher damit verbunden ist. Es ist nicht unmöglich, dass zwischen dieser Ausströmungserscheinung und der Schichtung eines elektrischen Funkens ein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Für die Strömung elektrischer Teilchen in einem homogenen elektrischen Felde bot sich zunächst eine andere Möglichkeit der Schichtung, welche im Folgenden entwickelt ist.¹⁾

1. Es sei ein homogenes elektrisches Feld von der Intensität \mathfrak{E} gegeben; in diesem bewegen sich in der Richtung der Kraftlinien gleichartige elektrische Teilchen so, dass in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene die Geschwindigkeit aller Teilchen die gleiche ist. Die elektrischen Teilchen be-

1) Erst nach dem Abschluss der vorliegenden Arbeit wurde ich mit einer auf denselben Gegenstand gerichteten Arbeit des Hrn. G. W. Walker im Phil. Mag. vom Juni 1900 bekannt. Hr. Walker geht aus von den Gleichungen der kinetischen Gastheorie und findet eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential, deren Lösung ein periodisches Glied enthält.

wegen sich unter den Wirkungen der äusseren Kraft \mathfrak{F} und der zwischen den Teilchen selbst vorhandenen inneren elektrodynamischen Kräfte. Ausserdem aber sei das elektrische Feld von einem neutralen Mittel erfüllt, dessen Einfluss auf die Bewegung sich in einer der Geschwindigkeit der Teilchen proportionalen Reibungskraft geltend macht.

Da die Bewegung aller in parallelen Linien sich bewegenden Teilchen dieselbe ist, so beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung eines einzigen. Die positive Richtung der Kraftlinien, in welcher sich dieses Teilchen bewegt, machen wir zur x -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Es sei nun an irgend einer Stelle der x -Axe die Geschwindigkeit des Teilchens gleich Null. Vermöge der Beschleunigung, welche dem Teilchen von der Kraft \mathfrak{F} erteilt wird, bewegt es sich in der Richtung der x -Axe mit wachsender Geschwindigkeit. Der Bewegung wirkt aber die der Geschwindigkeit proportionale Reibung entgegen. Man wird also annehmen dürfen, dass von einem bestimmten Punkt der x -Axe mit der Abscisse x_0 die Geschwindigkeit keine sehr grosse Veränderung mehr erleidet. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf dieses Gebiet einer wenig veränderlichen Geschwindigkeit.

2. *Die elektrodynamischen Wechselwirkungen.* Bei der Berechnung der elektrodynamischen Wechselwirkungen werden wir das *Gesetz von Clausius* zu Grunde legen, welches von J. J. Thomson auch aus der Maxwell'schen Theorie abgeleitet worden ist.

Die Kraft, welche ein im Punkte x, y, z befindliches Teilchen von der Ladung ε von einem zweiten Teilchen ε_1 an der Stelle x_1, y_1, z_1 erleidet, habe in der Richtung der x -Axe die Komponente Ξ . Die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen seien u, v, w und u_1, v_1, w_1 . Nach dem Gesetze von Clausius ist dann:

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \Xi = - \frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} \{u u_1 + v v_1 + w w_1\} - k \frac{d}{dt} \{\psi u_1\}.$$

ψ ist bei Clausius gleich der reciproken Entfernung der beiden Teilchen; wir setzen voraus, dass ψ nur in grösserer Entfernung übergeht in $1/r$, dass aber in kleiner Entfernung die Werte von ψ selbst und von seinen Differentialquotienten

sehr viel grösser seien, als die Werte von $1/r$ und von den Differentialquotienten von $1/r$. Die Constante k ist gleich dem Quadrat der reciproken Lichtgeschwindigkeit.

In unserem Falle sind die Geschwindigkeiten v, w, v_1, w_1 gleich Null und daher:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} u u_1 - k \frac{d}{dt} (\psi u_1), \\ \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} u_1^2 - k \psi \frac{du_1}{dt}. \end{cases}$$

Um nun die Wirkung zu berechnen, welche das Teilchen ε von allen umgebenden Teilchen erleidet, beschreiben wir um ε eine Kugel, deren Radius so genommen werde, dass die Wirkungen der ausserhalb liegenden Teilchen vernachlässigt werden können. Die Rechnung gestaltet sich übersichtlicher, wenn wir die elektrischen Ladungen ε_1 der einzelnen wirkenden Teilchen gleichmässig über den umgebenden Raum ausbreiten, sodass das ganze Innere der Kugel stetig mit elektrischer Masse erfüllt ist. Die räumliche Dichte η_1 der Ladung betrachten wir dann als eine Function der Coordinaten x_1, y_1, z_1 . Die von allen in unserer Kugel befindlichen Teilchen ε_1 auf ε ausgeübte Wirkung können wir dann so berechnen, dass wir einmal die Dichte η_1 als constant, dagegen die Geschwindigkeit u_1 als veränderlich betrachten, während wir das andere Mal umgekehrt die Geschwindigkeit constant, die Dichte veränderlich setzen.

Ein Volumenelement der Kugel sei $d w_1$, dann ergibt sich für die von ihm herrührende X -Komponente:

$$\frac{\Xi}{\varepsilon} = -\frac{d\psi}{dx} \eta_1 d w_1 + k u_1^2 \frac{d\psi}{dx} \eta_1 d w_1 - k \psi \frac{du_1}{dt} \eta_1 d w_1.$$

Hier ist:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{x-x_1}{r} = -\chi(x-x_1).$$

Nehmen wir zuerst an, dass u_1 constant gleich u sei, so ist in der Kugel auch du_1/dt gleich Null, und es wird:

$$\frac{\Xi'}{\varepsilon} = + (1 - k u^2) \chi(x-x_1) \eta_1 d w_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$\eta_1 = \eta + \frac{d\eta}{dx} (x_1 - x).$$

Somit:

$$\frac{\Xi'}{\varepsilon} = + (1 - k u^2) \chi (x - x_1) \left\{ \eta + \frac{d\eta}{dx} (x_1 - x) \right\} dw_1.$$

Für die Gesamtwirkung aller in unserer Kugel befindlichen Teilchen ergibt sich mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\sum \frac{\Xi'}{\varepsilon} = - (1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1.$$

Solange ku^2 kleiner als 1, ist die Kraft negativ, wenn $d\eta/dx$ einen positiven Wert hat.

Wir setzen nun zweitens *die Dichte η_1 constant gleich η* und betrachten die Geschwindigkeit u_1 als veränderlich. Dann erhalten wir:

$$\frac{\Xi''}{\varepsilon} = \eta \chi (x - x_1) dw_1 - k \eta \chi (x - x_1) u_1^2 dw_1 - k \eta \psi \frac{du_1}{dt} dw_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_1^2 = u^2 + \frac{du^2}{dx} (x_1 - x),$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dt} \right) (x_1 - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{du}{dt} \right) (x_1 - x)^2.$$

Setzen wir diese Werte ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\Xi''}{\varepsilon} &= \eta \chi (x - x_1) dw_1 - \eta k u^2 \chi (x - x_1) dw_1 \\ &\quad + \eta k \frac{du^2}{dx} \chi (x - x_1)^2 dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{du}{dt} \psi dw_1 - \eta k \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dt} \right) \psi (x_1 - x) dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{\psi}{2} (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Für die von allen Teilchen der Kugel auf ε ausgeübte Wirkung erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Xi''}{\varepsilon} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1 - k \eta \frac{du}{dt} \sum \psi dw_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$u \, dt = dx,$$

somit:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx}.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung findet man:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Xi''}{\varepsilon} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \cdot \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{1}{2} \psi \right\} dw_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^3 u^2}{dx^3} \cdot \frac{1}{4} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Wir führen nun für die im vorhergehenden gefundenen Summen die Bezeichnungen ein:

$$(2) \quad \begin{cases} P = \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1, & Q = \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{\psi}{2} \right\} dw_1, \\ R = \frac{1}{4} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{cases}$$

Dann wird die ganze elektrische Kraft, welche das Teilchen ε von den Nachbarteilchen erleidet, gegeben durch:

$$(2) \quad \begin{cases} X = -P\varepsilon(1 - ku^2) \frac{d\eta}{dx} + Qk\varepsilon\eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - Rk\varepsilon\eta \frac{d^3 u^2}{dx^3}. \end{cases}$$

3. Im stationären Zustande muss die Zahl der Teilchen, welche in 1 sec durch eine zu den Strömungslinien senkrechte Fläche von 1 qcm hindurchgehen, allenthalben dieselbe sein. Dasselbe gilt dann auch von der Menge der in einer Secunde durch jene Fläche gehenden Elektrizität, von der elektrischen Strömung i . Auf der anderen Seite ist die Menge der Elektrizität, welche in einer Secunde durch die Flächeneinheit hindurchgeht, gleich ηu ; wir haben also die Beziehung:

$$(3) \quad \eta u = i,$$

wo i die constante Stärke der elektrischen Strömung ist.

4. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Teilchens ε werden wir jetzt in der folgenden Form aufstellen:

$$(4) \quad \begin{cases} \mu \frac{du}{dt} = \varepsilon \mathfrak{F} - P\varepsilon(1 - ku^2) \frac{d\eta}{dx} + Qk\varepsilon\eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - Rk\varepsilon\eta \frac{d^3 u^2}{dx^3} - \rho u. \end{cases}$$

Der letzte Term der rechten Seite entspricht der Reibung des elektrischen Teilchens an den in dem Felde vorhandenen neutralen Moleculen. Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\eta = \frac{i}{u} \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx},$$

so ergibt sich:

$$R k \varepsilon i \frac{1}{u} \frac{d^3 u^2}{dx^3} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u} \right) \frac{du^2}{dx} - P \varepsilon i \frac{1 - k u^2}{u^2} \frac{du}{dx} + \rho u = \varepsilon \mathfrak{F}.$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$u = u_0 + u,$$

wo u gegen u_0 sehr klein sein soll. Vernachlässigen wir die Quadrate von u/u_0 gegen 1, so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 R k \varepsilon i \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) \frac{d^3 u}{dx^3} + \left\{ \mu u_0 - 2 Q k \varepsilon i \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) \right. \\ \left. - P \varepsilon i \frac{1 - k u_0^2 - 2 u/u_0}{u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \rho \left(u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{q} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir hier auch noch u/u_0 gegen 1, so erhalten wir:

$$(5) \quad \begin{cases} 2 R k \varepsilon i \frac{d^3 u}{dx^3} + \left\{ \mu u_0 - (2 Q - P) k \varepsilon i - \frac{P \varepsilon i}{u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \rho \left(u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{q} \right) = 0, \end{cases}$$

oder:

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{d^3 u}{dx^3} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \frac{q}{2 R k \varepsilon i} \left(u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{q} \right) = 0. \end{cases}$$

Wir führen die weiteren Abkürzungen ein:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2},$$

$$q = \frac{q}{2 R k \varepsilon i},$$

dann wird die Gleichung (5'):

$$(6) \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + p \frac{du}{dx} + q \left(u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{q} \right) = 0.$$

Wir machen den Ansatz:

$$u + u_0 = \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}}{q} + C e^{\gamma x},$$

dann ergibt sich zur Bestimmung von γ die Gleichung

$$(7) \quad \gamma^3 + p\gamma + q = 0.$$

Setzen wir weiter:

$$(8) \quad \begin{cases} M^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \\ N^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \end{cases}$$

so sind die drei Werte von γ :

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_1 = M + N, \\ \gamma_2 = -\frac{M+N}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} (M-N), \\ \gamma_3 = -\frac{M+N}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} (M-N). \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass $(q/2)^2 + (p/3)^3$ einen positiven Wert besitzt; dann sind M und N reell; N ist sicher negativ, der absolute Wert von M ist jedenfalls kleiner als der absolute Wert von N , somit ist $M+N$ negativ, $M-N$ dagegen positiv. Wir setzen:

$$(10) \quad M + N = -\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (M - N) = \beta \pi.$$

Dann sind die drei Wurzeln:

$$(11) \quad \gamma_1 = -\alpha, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha}{2} + i\beta\pi, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha}{2} - i\beta\pi.$$

Das Integral der Gleichung (6) wird:

$$u + u_0 = \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}}{q} + C_1 e^{-\alpha x} + (C_2 e^{i\beta\pi x} + C_3 e^{-i\beta\pi x}) e^{\frac{\alpha}{2} x}$$

Bezeichnen wir die ganze Geschwindigkeit des Teilchens ε wie früher durch u , so kann das gefundene Integral auf die Form gebracht werden:

$$(12) \quad \begin{cases} u = \frac{\varepsilon \tilde{\gamma}}{q} \{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}\} + u_0 e^{-\alpha(x-x_0)} \\ \quad + a e^{\frac{\alpha}{2}(x-x_0)} \sin \pi \beta (x-x_0). \end{cases}$$

Es ist dann für $x = x_0$: $u = u_0$; das periodische Glied verschwindet für:

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \frac{1}{\beta}, \quad x = x_0 + \frac{2}{\beta}, \dots,$$

es ist also $1/\beta$ die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes.

Für grosse Werte von $x - x_0$ ist in den Punkten, für welche das periodische Glied verschwindet:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}.$$

Unserer Voraussetzung nach darf u_0 nicht sehr verschieden sein von $\varepsilon \mathfrak{F}/\varrho$.

Setzen wir

$$x - x_0 = \frac{n}{2\beta},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl sein soll, so wird:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \right\} + u_0 e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \pm a e^{\frac{\alpha n}{4\beta}}.$$

Die Gleichung (12) gilt nur innerhalb eines Gebietes, in welchem auch diese Geschwindigkeit nur wenig abweicht von u_0 , in dem also $a e^{\alpha n/4\beta}$ klein bleibt gegen u_0 .

An Stelle von x führen wir endlich noch eine andere Veränderliche ξ ein, durch die Gleichung:

$$(13) \quad \xi = \beta(x - x_0),$$

d. h. wir benutzen die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes als neue Längeneinheit. Dann wird die Gleichung für die Geschwindigkeit, wenn wir gleichzeitig mit u_0 dividiren:

$$(13') \quad \frac{u}{u_0} = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho u_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} \right\} + e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} + \frac{u}{u_0} e^{\frac{\alpha}{2\beta} \xi} \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeiten sind in dieser Formel ausgedrückt als Vielfache der Anfangsgeschwindigkeit u_0 , von welcher sie der Voraussetzung nach immer nur wenig abweichen.

5. Wir benutzen die Werte von ξ als Abscissen und repräsentiren die Werte von u/u_0 durch eine Curve, indem wir sie

als Ordinaten senkrecht zu den entsprechenden Werten von ε auftragen. Die Curve u/u_0 stellt sich dann als eine Superposition zweier Curven dar. Die erste ist eine Exponentialcurve, welche zwischen dem Anfangswert 1 und dem davon nur wenig verschiedenen Endwert $\varepsilon \mathfrak{F}/\rho u_0$ verläuft; die zweite Curve ist eine Sinuslinie mit stetig wachsender Amplitude; die halbe Wellenlänge dieser Sinuslinie ist gleich $1/\beta$.

Die elektrische Dichte ist nach Gleichung (3) gegeben durch:

$$\eta = \frac{i}{u} = \frac{i}{u_0} \cdot \frac{u_0}{u} = \eta_0 \frac{u_0}{u},$$

wenn wir mit η_0 die anfängliche Dichte bezeichnen.

Zeichnet man also eine Curve, welche die reciproken Werte von u/u_0 darstellt, so giebt diese Curve zugleich ein Bild von der Verteilung der elektrischen Dichte in dem durchströmten Felde. Die Curve der elektrischen Dichte entsteht hiernach gleichfalls aus der Superposition einer Exponentialcurve und einer Wellenlinie; die halbe Wellenlänge der letzteren ist wieder gegeben durch $1/\beta$.

Nun war β gegeben durch:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} (M - N).$$

Es war ferner:

$$M^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad N^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$q = \frac{\rho}{2 R k \varepsilon i}, \quad p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}.$$

Hiernach wächst β , wenn μ und ρ zunehmen; es nimmt ab, wenn der Quotient i/u_0 , d. h. die anfängliche elektrische Dichte η_0 zunimmt. Umgekehrt nimmt die Wellenlänge des periodischen Gliedes ab, wenn μ und ρ wachsen; sie nimmt zu, wenn die anfängliche Dichte η_0 wächst.

6. *Strömung im reibungslosen Felde.* Haben wir keine Reibung in dem elektrischen Felde, so wird die allgemeine Gleichung der Bewegung:

$$(14) \quad R k \varepsilon i \frac{1}{u} \frac{d^3 u^2}{d x^3} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u} \right) \frac{d u^2}{d x} - P \varepsilon i \frac{1 - k u^2}{u^3} \frac{d u}{d x} = \varepsilon \mathfrak{F}.$$

Wenn die Geschwindigkeit u auch in diesem Falle nur wenig von einem anfänglichen Wert u_0 abweicht, so gilt die speciellere Gleichung:

$$(14') \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{2 R k \varepsilon i}.$$

Setzen wir wie früher:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}$$

und

$$r = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{2 R k \varepsilon i},$$

so wird die Gleichung:

$$(14'') \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + p \frac{du}{dx} = r.$$

Machen wir den Ansatz:

$$u = \frac{r}{p} x + a e^{\kappa x} + \text{const.},$$

so ergibt sich zur Bestimmung von κ :

$$(15) \quad \kappa^2 + p = 0.$$

Ist p positiv, was bei grossen Werten von u_0 im allgemeinen zutreffen wird, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung imaginär. Erinnern wir uns, dass die ganze Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens gegeben ist durch $u = u_0 + u$, so kann die Lösung auf die Form gebracht werden:

$$(16) \quad u = u_0 + \frac{r}{p} (x - x_0) + a \sin \sqrt{p} (x - x_0),$$

oder, wenn wir $\sqrt{p} (x - x_0) = \pi \xi$ setzen:

$$(16') \quad u = u_0 + \frac{r \pi}{p \sqrt{p}} \cdot \xi + a \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeit u setzt sich aus drei Termen zusammen; der erste ist gleich der constanten Anfangsgeschwindigkeit; dazu kommt ein mit der Veränderlichen ξ wachsender

Term und endlich ein periodisches Glied, dessen halbe Wellenlänge gegeben ist durch $\xi = 1$ oder durch:

$$x - x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{p}}$$

Die Wellenlänge nimmt ab, wenn die Masse μ zunimmt.

Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten u_0 wird p negativ; $p = -p'$. Die Differentialgleichung ist dann:

$$(17) \quad \frac{d^3 u}{dx^3} - p' \frac{du}{dx} = r$$

und ihre Lösung:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + u = u_0 - \frac{r(x-x_0)}{p'} \\ &\quad + a \left\{ e^{\sqrt{p'}(x-x_0)} - e^{-\sqrt{p'}(x-x_0)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit ist in diesem Falle ein aperiodischer.

Hierin scheint ein charakteristischer Unterschied der Bewegungen mit Reibung und ohne Reibung zu liegen. Im letzteren Falle verschwinden die periodischen Anwandlungen der Bewegung, sobald p negativ wird. Wenn Reibung vorhanden ist, so ist das nicht der Fall, die Periodicität erhält sich, solange nur $(p/2)^2 + (p/3)^3$ positiv bleibt. Erst wenn diese Grösse negativ wird, fallen die periodischen Anwandlungen weg.

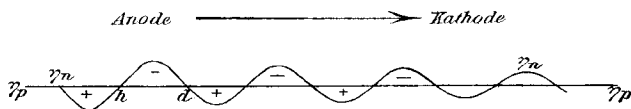
Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass die Gleichungen (16) und (18) immer nur innerhalb sehr beschränkter Gebiete anwendbar sind; denn das mit $x - x_0$ proportionale Glied bedingt eine stetige Vergrößerung der Differenz, welche zwischen der jeweils vorhandenen Geschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit u_0 besteht. Diese Differenz sollte aber nach unserer Voraussetzung nur klein sein.

7. Elektrische Doppelströmung in Geissler'schen Röhren.

In einer Geissler'schen Röhre kann man das elektrische Feld zwischen der Anode und dem dunkeln Zwischenraume als ein im wesentlichen constantes betrachten. In diesem Felde findet eine doppelte Strömung von Elektrizität statt; negative elektrische Teilchen bewegen sich von der Kathode zur Anode, positive von der Anode zur Kathode. Auf Grund der Untersuchungen über Canalstrahlen *identificiren wir die positiven Teilchen mit gewöhnlichen Ionen; von den negativen*

nehmen wir an, dass sie *identisch* seien mit den Teilchen der Kathodenstrahlen, den Elektronen. Unter dieser Voraussetzung ist die Masse μ der positiven Teilchen um vieles grösser als die der negativen; es liegt ausserdem die Annahme nahe, dass die Reibung bei den positiven Teilchen grösser sei, als bei den negativen. Wir betrachten zunächst die Bewegungen der beiden Arten von Ionen als voneinander unabhängig. In dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Teilchen ist dann die Wellenlänge des periodischen Gliedes viel kleiner bei den positiven, als bei den negativen Teilchen. Nehmen wir an, dass innerhalb des betrachteten Gebietes der nicht periodische Teil der Geschwindigkeit weder bei den positiven, noch bei den negativen Teilchen eine merkliche Aenderung erleide, so wird die Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen durch eine Wellenlinie dargestellt sein, deren Niveaulinie der x -Axe parallel ist. Die Geschwindigkeitscurve der positiven Teilchen dagegen ist eine der x -Axe parallele gerade Linie. Dasselbe gilt dann auch von den die Dichtigkeiten der negativen und der positiven Teilchen repräsentirenden Linien η_n und η_p .

Wir führen endlich noch die Annahme ein, dass die freie Elektrizität in dem betrachteten Abschnitt der Röhre im Ganzen gleich Null sei. Die gerade Linie, welche die Dichte η_p repräsentirt, fällt dann mit der Niveaulinie der Curve η_n zusammen. Daraus ergibt sich dann ein wellenförmiger Verlauf der freien Ladung, wie er in der nachstehenden Figur gezeichnet ist.



8. Wir haben im Vorhergehenden die Strömungen der positiven und der negativen Teilchen als voneinander unabhängig betrachtet. Es fragt sich, inwieweit dies gestattet ist. Wenn die Geschwindigkeit der positiven Teilchen constant ist, so verschwindet ihre elektrodynamische Wirkung auf die negativen; die Bewegung der letzteren kann also ebenso berechnet werden, wie früher.

Umgekehrt kann natürlich die elektrodynamische Wirkung

der negativen Teilchen auf die positiven nicht vernachlässigt werden. Nun kann man aber die Bewegung der negativen Teilchen als gegeben betrachten; die von ihnen ausgehende Wirkung hat den Charakter einer äusseren Kraft, unter deren Zwang die Bewegung der positiven Teilchen sich vollzieht. Diese äussere Kraft besitzt ein periodisches Glied, dessen Wellenlänge gleich sein muss der Wellenlänge der negativen Teilchen, gleich $2/\beta$. Ein periodisches Glied von derselben Art muss dann auch in der gezwungenen Bewegung der positiven Teilchen sich geltend machen. Aus der Analogie mit den entsprechenden Problemen der Akustik kann man schliessen, dass die Amplitude dieses Gliedes abnimmt mit der Masse der positiven Teilchen und mit dem Coefficienten ρ ihrer Reibung. Die Amplitude der Wellen dürfte klein sein, im Vergleich mit der Amplitude der Wellen, welche in der Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen auftreten. Die Einwirkung der negativen Teilchen auf die positiven würde hiernach die folgende Aenderung bedingen. An Stelle der geraden Linie η_p , durch welche in unserer Figur die Dichte der positiven Elektricität angegeben wird, tritt eine flache Wellenlinie; die Wellenlänge ist dieselbe, wie bei der Curve η_n der Dichte der negativen Elektricität; die Phase kann irgendwie verändert sein. Der wellenförmige Wechsel positiver und negativer Ladungen im Innern der Röhre wird dadurch nicht wesentlich verändert.

Durch die abwechselnden positiven und negativen Ladungen im Innern der Röhre wird aber die Voraussetzung, dass die Bewegungen sich in einem homogenen elektrischen Felde vollziehen, aufgehoben. Zu der constanten Feldintensität \mathfrak{F} wird noch ein periodisches Glied hinzukommen, dessen Wellenlänge abermals gleich $2/\beta$ sein wird. Auch die Berücksichtigung eines solchen Gliedes wird an den wesentlichen Resultaten unserer Untersuchung nichts ändern.

9. Wir kommen nun zu einer Bemerkung, welche zeigt, dass unsere Theorie der Doppelströmung in einer Geissler'schen Röhre eine wesentliche Lücke enthält. Wenn in der Röhre positive und negative elektrische Teilchen in entgegengesetzten Richtungen sich bewegen, so werden dadurch *Zusammenstösse der verschiedenartigen Teilchen, Verbindungen derselben zu neutralen Molecülen* herbeigeführt werden.

Man kann das zunächst in Verbindung bringen mit dem *Leuchten der Schichten*; aus dem Anblick unserer Figur ergibt sich, dass an den Stellen h die innere elektrostatische Wirkung, welche der Schichtung entspricht, mit der Wirkung des Feldes gleichsinnig ist. An den Stellen d wirkt die innere Kraft der äusseren entgegen. Es ist daher wahrscheinlich, dass an den Stellen h mehr positive und negative Teilchen und mit grösserer Geschwindigkeit zusammenstossen als an den Stellen d . Nun entsprechen die Stellen h der Mitte der leuchtenden Schichten; das Leuchten müsste darnach durch die Verbindung entgegengesetzter Teilchen, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit zusammenstossen, hervorgebracht werden.

Wenn aber auf dem Wege der Strömung bewegte elektrische Teilchen verschwinden, indem sie sich zu neutralen Moleculen vereinigen, so müssen sie auch wieder ersetzt werden durch *Spaltung neutraler Molecüle*. Diese Vorgänge, welche in der Theorie von J. J. Thomson eine fundamentale Bedeutung besitzen, sind in der unserigen ganz vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung erscheint noch aus dem folgenden Grunde sehr wesentlich zu sein. Unsere Theorie führt zu einer stetig wachsenden Amplitude der negativen und der positiven Teile der Wellen. Es muss notwendig eine Wirkung existiren, welche das Anwachsen über eine gewisse Grenze hinaus verhindert; eine solche Gegenwirkung würde eben durch die Wiedervereinigung der entgegengesetzten elektrischen Teilchen zu neutralen Moleculen gegeben sein.

Man könnte hoffen, zu einer vollständigeren Theorie der Schichtenbildung zu gelangen, durch eine Verbindung der Thomson'schen Theorie, welche für sich genommen, keine Schichtung giebt, mit den in diesem Aufsätze niedergelegten Betrachtungen. Dem steht aber vorläufig entgegen, dass die Thomson'sche Theorie, wenigstens in ihrer weiteren Durchführung, gleiche Geschwindigkeiten der Ionen voraussetzt, während unsere Betrachtung notwendig auf verschiedene Geschwindigkeiten führt.

(Eingegangen 23. December 1900.)