(= — 34′ 10″5) von mir gefundenen. Und da der Längenunterschied zwischen der Sternwarte auf Isla de Leon und der Sternwarte in Cadix sehr genau bekannt ist, und 21″5 in Zeit beträgt, um welche Cadix westlicher liegt (A. Nachr. Nr. 125. S. 72), so folgt aus obigen Untersuchungen die Länge von Cadix — 34′ 32″1. Unmittelbar aus 7 Beobachtungen hatte ich die Länge von Cadix = — 34′ 30″1 bestimmt (Astr. Nachr. Nr. 125. S. 94): demnach gibt das Mittel aus diesen beiden Bestimmungen, im Verhältniſs von 7 zu 21 Beobachtungen, die Länge von Cadix = — 34′ 31″6. Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Längenbestimmung unter den obigen 21 für Isla de Leon gefundenen ist = ± 1″348 mit der Sicherheitsgrenze ± 0″147 der wahrscheinliche Fehler des Endresultats oder des oben berechneten Mittels ist = ± 0″309.

Stuttgart. 20 Aug. 1831.

Wurm.

Ueber eine Aufgabe der Geodäsie.

Die Näherungsmethoden, welche man früher bei der Auflösung geodätischer Aufgaben in Anwendung brachte, haben, nachdem die genaue und kurze Art die sphäroidischen Dreiecke aufzulösen, entwickelt worden ist *), zwar ihr practisches Interesse verloren; allein da dergleichen näherungsweise Auflösungen zuweilen eine so starke Annäherung an die Wahrheit gewähren, daſs die numerische Berechnung nur höchst unbedeutend von dem abweicht, was die streng richtigen Formeln geben, so scheint eine Untersuchung der Fehler, welche man durch die Anwendung jener Methoden begeht, nicht ohne Nutzen zu sein. Es ist bekannt, daſs ohne die genaue Bestimmung der Grenzen innerhalb welcher eine Näherungsmethode ein richtiges Resultat giebt, an keine Würdigung dessen was sie leistet zu denken ist, — eine Bestimmung dieser Grenzen wird aber dann wenn die numerische Berechnung für die strenge Richtigkeit der Formel zu sprechen scheint, das einzige Mittel sein sich vor Fehlschlüssen zu bewahren.

Die Aufgabe: aus den gegebenen Polhöhen zweier Oerter und den Winkeln, welche die zwischen ihnen liegende geodätische Linie mit den Meridianen bildet, den Längenunterschied dieser Oerter zu berechnen, findet man in den Philosophical Transactions für 1790 **), auf eine sehr einfache Art aufgelöst. Diese Auflösung rührt von *Isaac Dalby* her, und giebt in der That durch eine äuſserst einfache sphärisch trigonometrische Rechnung, eine auffallend starke Annäherung an die Wahrheit. Noch in der neuesten Zeit hat diese Auflösung die Aufmerksamkeit englischer Mathematiker erregt, indem man durch neue Beweise die Richtigkeit des von *Dalby* angewandten Verfahrens zu begründen gesucht hat. Da indessen, wie aus Nr. 86 der Astr. Nachrichten hervorgeht, die strenge Auflösung der erwähnten Aufgabe von den elliptischen Transcendenten abhängt, so sieht man daſs jeder endliche Ausdruck, den man für den gesuchten Längenunterschied erhält, nur dann in aller Strenge richtig sein kann, wenn die Möglichkeit vorhanden ist, ein elliptisches Differenzial endlich zu integriren. Allein die neuesten Untersuchungen derjenigen groſsen Mathematiker, welche sich mit diesen Functionen beschäftigt haben, verbreiten ein solches Licht über diese Transcendenten, daſs die Unmöglichkeit einer endlichen Integration derselben von selbst klar wird. Man kann also schon a priori die Ueberzeugung erlangen, daſs *Dalbys* Methode nur eine Annäherung an die Wahrheit giebt.

Ich werde nun die *Dalby*sche Methode auseinandersetzen und untersuchen wie genau das Resultat ist, welches man durch Anwendung derselben erhält.

Die Polhöhen der beiden Oerter bezeichne ich durch φ, φ'; die Winkel, welche die geodätische Linie mit den Meridianen dieser Oerter bildet, durch α, α'; die Winkel, welche der durch den Ort φ nach dem Orte φ' gelegte verticale Schnitt mit dem Meridiane von φ, und der durch φ' nach φ gelegte mit dem Meridiane von φ' bildet, durch A, A'; die Entfernung beider Oerter in Bogentheilen durch s.

Dalby betrachtet ein sphärisches Dreieck, in welchem ein Winkel ω dem gesuchten Längenunterschiede gleich ist, und die diesen Winkel einschlieſsenden Seiten $90 - \varphi$ und $90 - \varphi'$ sind. Bezeichnet man die beiden andern Winkel dieses Dreiecks durch ψ, ψ', so setzt *Dalby* $\psi + \psi' = \alpha + \alpha'$, aus welchen Datis er dann den dritten Winkel ω mittelst der *Neper*schen Analogien berechnet.

*) Astr. Nachr. Nr. 3, 6 und 86.

**) An Account of the Trigonometrical Operation, whereby the Distance between the Meridians of the Royal Observations of Creenwich and Paris has been determined. By Major-general *William Roy*, F. R. S. and A. S.

Die Gleichung

$$\psi + \psi' = \alpha + \alpha'$$

ist aber, wie ich sogleich zeigen werde, nur dann richtig wenn man keine höhern Potenzen der Excentricität e als e^2 in Betracht zieht, und zugleich die Entfernung der Oerter ϕ und ϕ' von einander so klein annimmt, dafs die über s^2 hinausgehenden Potenzen von s, als verschwindend anzusehen sind.

Man hat nämlich, wie aus Nr. 6 der Astr. Nachrichten hervorgeht,

$$\alpha = A - \tfrac{1}{12} ee \cdot \cos \phi^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot s^2$$
$$\alpha' = A' + \tfrac{1}{12} ee \cdot \cos \phi'^2 \cdot \sin 2\alpha' \cdot s^2$$

also, wenn man sich an die bekannte Gleichung

$$\sin \alpha \cdot \cos u = \sin \alpha' \cdot \cos u'$$

wo

$$\cos u = \frac{\cos \phi}{\sqrt{(1 - ee \sin \phi^2)}}, \quad \cos u' = \frac{\cos \phi'}{\sqrt{(1 - ee \sin \phi'^2)}},$$

erinnert, bis auf Gröfsen von der Ordnung von e^2 und s^2 richtig:

$$\alpha + \alpha' = A + A'$$

Betrachtet man nun aufser dem oben erwähnten sphärischen Dreiecke noch zwei andere, von denen das eine den Winkel ω, die Seite $90 - \phi$ und statt des Winkels ψ den Winkel des verticalen Schnitts, A, das andere den Winkel ω, die Seite $90 - \phi'$ und statt ψ' den Winkel A' hat, — bezeichnet man ferner die den Winkeln A, A' gegenüberstehenden Seiten durch $90 - \pi'$ und $90 - \pi$, und die dem gemeinschaftlichen Winkel ω gegenüberstehenden Seiten in den drei Dreiecken respective durch σ, σ', σ'', so ist:

$$(1) \ldots \begin{cases} \sin \sigma \cdot \sin \psi = \cos \phi' \cdot \sin \omega \\ \sin \sigma \cdot \cos \psi = \sin \phi' \cdot \cos \phi - \cos \phi' \cdot \sin \phi \cdot \cos \omega \\ \sin \sigma \cdot \sin \psi' = \cos \phi \cdot \sin \omega \\ \sin \sigma \cdot \cos \psi' = \sin \phi \cdot \cos \phi' - \cos \phi \cdot \sin \phi' \cdot \cos \omega \end{cases}$$

$$(2) \ldots \begin{cases} \sin \sigma' \cdot \sin A = \cos \pi' \cdot \sin \omega \\ \sin \sigma' \cdot \cos A = \sin \pi' \cdot \cos \phi - \cos \pi' \cdot \sin \phi \cdot \cos \omega \end{cases}$$

$$(3) \ldots \begin{cases} \sin \sigma'' \cdot \sin A' = \cos \pi \cdot \sin \omega \\ \sin \sigma'' \cdot \cos A' = \sin \pi \cdot \cos \phi' - \cos \pi \cdot \sin \phi' \cdot \cos \omega \end{cases}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$\sin (A - \psi) = \frac{\sin \omega \cdot \cos \phi}{\sin \sigma \cdot \sin \sigma'} \cdot \sin (\phi' - \pi')$$
$$= \frac{\sin A \cdot \cos \phi}{\sin \sigma} \cdot \frac{\sin (\phi' - \pi')}{\cos \pi'},$$

und ebenso ergeben die Gleichungen (1) und (3)

$$\sin (A' - \psi') = \frac{\sin \omega \cdot \cos \phi'}{\sin \sigma \cdot \sin \sigma''} \cdot \sin (\phi - \pi)$$
$$= \frac{\sin A' \cdot \cos \phi'}{\sin \sigma} \cdot \frac{\sin (\phi - \pi)}{\cos \pi}$$

Führt man hier die Winkel u und u' ein, deren Bedeutung oben angegeben ist, so können diese Gleichungen auch so geschrieben werden:

$$\sin (A - \psi) = \frac{\sin A \cdot \cos u}{\sin \sigma} \cdot \frac{\sin (\phi' - \pi')}{\cos \pi'} \cdot \sqrt{(1 - ee \sin \phi^2)}$$

$$\sin (A' - \psi') = \frac{\sin A' \cdot \cos u'}{\sin \sigma} \cdot \frac{\sin (\phi - \pi)}{\cos \pi} \cdot \sqrt{(1 - ee \sin \phi'^2)}$$

Man überzeugt sich jedoch leicht, wenn man sich an die bekannten Ausdrücke für die Normale und Subtangente der Ellipse erinnert, dafs

$$\frac{\sin (\phi' - \pi')}{\cos \pi'} \cdot \sqrt{(1 - ee \sin \phi^2)}$$
$$= - \frac{\sin (\phi - \pi)}{\cos \pi} \cdot \sqrt{(1 - ee \sin \phi'^2)},$$

jede dieser beiden Gröfsen ist nämlich

$$= e^2 . [\sin \phi . \sqrt{(1 - ee \sin \phi'^2)} - \sin \phi' . \sqrt{(1 - ee \sin \phi^2)}]$$

also, wenn diese Gröfse durch P bezeichnet wird,

$$\sin (A - \psi) = \frac{\sin A \cdot \cos u}{\sin \sigma} \cdot P$$
$$\sin (A' - \psi') = - \frac{\sin A' \cdot \cos u'}{\sin \sigma} \cdot P$$

Wenn in diesen Gleichungen α statt A und α' statt A' vorkäme, so wären die rechts stehenden Theile wegen der Haupteigenschaft der geodätischen Linie, welcher gemäfs

$$\sin \alpha \cdot \cos u = \sin \alpha' \cdot \cos u'$$

ist, einander gleich und entgegengesetzt, und die *Dalby*sche Voraussetzung

$$\psi + \psi' = \alpha + \alpha'$$

wäre in aller Strenge richtig. Da indessen die Gröfse P von der Ordnung e^2, so hat man, bis auf Gröfsen von dieser Ordnung richtig,

$$\psi + \psi' = A + A'.$$

Oben haben wir aber gesehen dafs, bis auf Gröfsen von der Ordnung von e^2 und s^2 richtig,

$$\alpha + \alpha' = A + A',$$

mithin gilt die Gleichung

$$\psi + \psi' = \alpha + \alpha'$$

nur dann, wenn wir von e und s keine höhern Potenzen als die Quadrate betrachten.

Es ist nun noch übrig zu untersuchen welchen Einfluſs der Fehler, den man durch Anwendung dieser Gleichung begeht, auf den gesuchten Längenunterschied äuſsert. Bezeichnet man den Winkel welchen *Dalby* für den gesuchten Längenunterschied nach seiner Methode findet durch ω' und giebt ω die Bedeutung, welche der berühmte Verfasser der oben angezognen Abhandlungen diesem Buchstaben in No. 86 der Astr. Nachrichten beigelegt hat, so ist

$$tg\,\tfrac{1}{2}\omega' = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')$$
$$tg\,\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\sin\frac{1}{2}(u'+u)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'),$$

wo u und u' die ihnen oben gegebne Bedeutung haben, also

$$tg\,\tfrac{1}{2}\omega' = \frac{\sin\frac{1}{2}(u'+u)}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}\cdot tg\,\tfrac{1}{2}\omega$$

Drückt man in dieser Gleichung den u und u' enthaltenden Factor durch φ und φ' aus, und berücksichtiget dabei nur die zweiten Potenzen der Excentricität, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$tg\,\tfrac{1}{2}\omega' = [1-\tfrac{1}{4}ee.\cos\varphi.\cos\varphi'].\,tg\,\tfrac{1}{2}\omega$$

also

$$\omega' = \omega - \tfrac{1}{2}ee.\cos\varphi.\cos\varphi'.\sin\omega$$

oder, da man keine höhern Potenzen von e als e^2 in Betracht zieht,

$$\omega' = \omega - \tfrac{1}{2}ee.\cos u.\cos u'.\sin\omega.$$

Bezeichnet man die dem Winkel ω gegenüberstehende Seite durch σ und den gesuchten Längenunterschied durch w, so ist wie aus Nr. 86 der Astron. Nachrichten hervorgeht bis auf Gröſsen von der Ordnung von e^2 richtig,

$$w = \omega - \tfrac{1}{2}ee.\sin\alpha'.\cos u'.\sigma$$
$$= \omega - \tfrac{1}{2}ee.\sin\alpha.\cos u.\sigma,$$

also erhält man

$$w = \omega' + \tfrac{1}{2}ee.[\cos u.\cos u'.\sin\omega - \sin\alpha'.\cos u'.\sigma]$$
$$= \omega' + \tfrac{1}{2}ee.[\cos u.\cos u'.\sin\omega - \sin\alpha.\cos u.\sigma].$$

Es ist aber

$$\sin\omega.\cos u' = \sin\alpha.\sin\sigma$$
$$\sin\omega.\cos u = \sin\alpha'.\sin\sigma$$

mithin

$$w = \omega' + \tfrac{1}{2}ee.k(\sin\sigma-\sigma)$$

wo k für $\sin\alpha.\cos u = \sin\alpha'.\cos u'$ gesetzt ist.

Die *Dalby*sche Auflösung unserer Aufgabe ist also noch nicht bis zu den Quadraten der Excentricität richtig. Indessen wird der Fehler, welchen man begeht, durch den Factor $\sin\sigma-\sigma$, welcher wenn die Vermessung keine groſse Ausdehnung erlangt hat, immer sehr klein ist, beinahe vernichtet, und diesem Umstande ist die überraschend starke Annäherung zuzuschreiben, welche man durch die Anwendung jener Methode erhält.

Für die berühmte Vermessung Sr. Excellenz des Herrn General-Lieutenant *v. Müffling*, aus welcher das Rechnungsbeispiel in Nr. 86 der Astr. Nachrichten entlehnt ist, hat man

$$\begin{aligned}\varphi &= 51^\circ\ 2'\ 12''{,}7\\ \varphi' &= 50\ 56\ 6{,}7\\ \alpha &= 87\ 51\ 15{,}52\\ \alpha' &= 35\ 38\ 56{,}82;\end{aligned}$$

mit diesen Gröſsen findet man den Längenunterschied zwischen Dünkirchen und Seeberg nach *Dalby's* Methode

$$= 8^\circ\,21'\,19''09.$$

Die strengen Formeln geben

$$8^\circ\,21'\,19''04.$$

Die obige Correction $\frac{1}{2}ee.k.(\sin\sigma-\sigma)$ beträgt $-0''02$.

Danzig August 24. 1831.

C. T. Anger.

I n h a l t.

(zu No. 210. 211).

Ausgegeben 1831. September 20.