Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen.

Von

Leo Königsberger in Heidelberg.

Bei verschiedenen analytischen Untersuchungen, welche die Reihenentwicklung algebraischer Functionen oder der Integrale algebraischer Differentialgleichungen betreffen, ist es wesentlich, das Bildungsgesetz der Differentialquotienten implicite gegebener Functionen zu ermitteln, und es ist leicht einzusehen, dass wir die allgemeine Form derselben werden bestimmen können, wenn wir die Ausdrücke für die höheren totalen Differentiale einer Function mehrerer Variabeln aufgestellt haben, die sämmtlich wieder Functionen einer unabhängigen Variabeln sind oder, was dasselbe ist, für welche auch die höheren Differentiale berücksichtigt werden müssen. Nun ist freilich die letztere Aufgabe von Herrn Hoppe in seiner Arbeit über die independente Darstellung der Differentialquotienten für den Fall *einer* abhängigen Function auf die Berechnung der Differentialquotienten der Potenzen dieser Function nach der unabhängigen Variabeln genommen zurückgeführt worden, und das allgemeinere Problem für beliebige Functionen von Herrn Most im 4ten Bande der Annalen gelöst worden; ich glaube jedoch mit Rücksicht auf die von mir angewandte und auch sonst benutzbare Methode sowie auf die überaus einfache und übersichtliche Form der Resultate, welche auch in Wirklichkeit weitere Anwendungen gestatten, die nachstehenden Ausführungen veröffentlichen zu dürfen.

Sei

$$t = f(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

gegeben, worin $x, y, z, \ldots$ als Functionen einer Variabeln u betrachtet werden mögen, so sieht man leicht, dass

$$dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \cdots\right),$$

$$d^2 t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \cdots\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}\, d^2 y + \cdots\right),$$

$$d^3 t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \cdots\right)^3$$
$$+ 3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \cdots\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}\, d^2 y + \cdots\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, d^3 x + \frac{\partial f}{\partial y}\, d^3 y + \cdots\right)$$

u. s. w., worin die symbolische Bezeichnung so gewählt ist, dass stets statt der Producte der Differentialquotienten erster Ordnung der entsprechende höhere Differentialquotient zu substituiren ist.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, d^r x + \frac{\partial f}{\partial y}\, d^r y + \frac{\partial f}{\partial z}\, d^r z + \cdots\right) = P_r,$$

und nehmen an, die durch den Ausdruck

$$(3) \quad d^\varrho t = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_\varrho > 0 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!}\, \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \ldots (\varrho!)^{n_\varrho}}\, P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_\varrho^{n_\varrho},$$

gegebene Differentialformel, in welcher $\varkappa! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \varkappa$, und $0! = 1$ ist, gelte für $\varrho = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$, so soll gezeigt werden, dass sie auch für $\varrho + 1$ besteht und somit, da sie für $\varrho = 1, 2, 3$ nach den obigen Ausdrücken erfüllt war, allgemein gültig ist.

Zum Zwecke des Beweises bemerke ich zunächst, dass wie leicht einzusehen, die oben definirten Symbole die durch die folgenden Beziehungen ausgedrückten Differentiationseigenschaften besitzen,

$$d \cdot P_1^m = P_1^{m+1} + m P_1^{m-1} P_2, \quad d \cdot P_r^m = P_r^m P_1 + m P_r^{m-1} P_{r+1}$$

allgemein

$$(4) \quad d \cdot P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} = P_1^{n_1+1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2+1} P_3^{n_3} \cdots P_\varrho^{n_\varrho}$$
$$+ n_2 P_1^{n_1} P_2^{n_2-1} P_3^{n_3+1} P_4^{n_4} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + \cdots$$
$$+ n_\varrho P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho - 1} P_{\varrho+1},$$

dass also Symbole wie Potenzen differentiirt werden.

Differentiiren wir nunmehr die als richtig vorausgesetzte Gleichung (3), so ergiebt sich nach (4)

$$d^{\varrho+1} t = \sum_{\substack{n_1, n_2 \ldots n_\varrho > 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!}\, \frac{1}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \ldots (\varrho!)^{n_\varrho}} \Big\{ P_1^{n_1+1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho}$$
$$+ n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2+1} P_3^{n_3} \cdots P_\varrho^{n_\varrho} + \cdots$$
$$+ n_\varrho P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_\varrho^{n_\varrho-1} P_{\varrho+1} \Big\},$$

oder wie unmittelbar aus der Form der Indices zu sehen,

$$d^{\varrho+1} t = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varrho, \nu_{\varrho+1} > 0 \\ 2\nu + {}_1\nu_2 + \cdots + \varrho \nu_\varrho + (\varrho+1)\nu_{\varrho+1} = \varrho+1}} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\varrho+1}} P_1^{\nu_1} P_2^{\nu_2} \cdots P_\varrho^{\nu_\varrho} P_{\varrho+1}^{\nu_{\varrho+1}},$$

worin

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}} = \frac{\varrho!}{(\nu_1-1)!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1-1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}$$

$$(\nu_1+1)\,\frac{\varrho!}{(\nu_1+1)!\,(\nu_2-1)!\,\nu_3!\ldots\nu_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1+1}(2!)^{\nu_2-1}(3!)^{\nu_3}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}$$

$$(\nu_2+1)\,\frac{\varrho!}{\nu_1!\,(\nu_2+1)!\,(\nu_3-1)!\,\nu_4!\ldots\nu_\varrho!}\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2+1}(3!)^{\nu_3-1}(4!)^{\nu_4}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}}+\cdots$$

$$(\nu_{\varrho-1}+1)\,\frac{\varrho!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots(\nu_{\varrho-1}+1)!\,(\nu_\varrho-1)!}\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho-1!)^{\nu_{\varrho-1}+1}(\varrho!)^{\nu_\varrho-1}}$$

$\nu_{\varrho+1}$,

oder

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}} = \frac{\varrho!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!\,\nu_{\varrho+1}!}\left\{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots+\varrho\nu_\varrho+(\varrho+1)\nu_{\varrho+1}\right\}$$
$$\cdot\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}}$$
$$=\frac{(\varrho+1)!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_\varrho!\,\nu_{\varrho+1}!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho!)^{\nu_\varrho}(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}},$$

wenn berücksichtigt wird, dass nur in einem Falle vermöge der Gleichung $\nu_1+2\nu_2+\cdots+(\varrho+1)\,\nu_{\varrho+1}=\varrho+1$ die Zahl $\nu_{\varrho+1}$ von Null verschieden ist und in diesem Falle den Werth 1 hat, während $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varrho$ verschwinden, so dass

$$d^{\varrho+1}t=\sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\varrho+1}>0\\ \nu_1+2\nu_2+\cdots+(\varrho+1)\nu_{\varrho+1}}}\frac{(\varrho+1)!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{\varrho+1}!}\,\frac{1}{(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots(\varrho+1!)^{\nu_{\varrho+1}}}\,P_1^{\nu_1}P_2^{\nu_2}\ldots P_{\varrho+1}^{\nu_{\varrho+1}}$$

wird, und somit die Gültigkeit der obigen Formel für das $\varrho+1^{\text{te}}$ Differential bewiesen ist.

Wir erhalten somit für

$$t=f(x,y,z,\ldots)$$

den Ausdruck für das ϱ^{te} Differential in der Form

$$d^\varrho t=\sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_\varrho>0\\ n_1+2n_2+\cdots+\varrho n_\varrho=\varrho}}\frac{\varrho!}{n_1!\,n_2!\ldots n_\varrho!}\,\frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots\right)^{n_1}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y+\cdots\right)^{n_2}$$
$$\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x}d^\varrho x+\frac{\partial f}{\partial y}d^\varrho y+\cdots\right)^{n_\varrho}.$$

Nach Aufstellung dieser Formel ist es aber leicht, das Bildungsgesetz für die Differentiale implicite gegebener Functionen zu ermitteln; denn sei

(5) $$f(x,y)=0$$

vorgelegt und soll diese Gleichung wiederholt nach x differentiirt werden, so braucht man in dem obigen Ausdrucke nur $t = 0$ zu setzen, ferner $d^2x = d^3x = \cdots = d^\varrho x = 0$ zu nehmen und die Gleichung durch dx^ϱ zu dividiren, *so ergiebt sich als* ϱ^{tes} *Differential von* (5), *wenn der Posten mit* $y^{(\varrho)}$ *abgesondert wird, und zur Abkürzung*

$$(6) \qquad \frac{\varrho!}{n_1!\,n_2!\ldots n_{\varrho-1}!}\;\frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho-1!)^{n_{\varrho-1}}} = A_{n_1 n_2\ldots n_{\varrho-1}}$$

gesetzt wird,

$$(7) \quad \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_{\varrho-1} > 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + (\varrho-1)n_{\varrho-1} = \varrho}} A_{n_1 n_2 \ldots n_{\varrho-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^{n_1} \frac{\partial f^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}}{\partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}} y''^{n_2} y'''^{n_3} \ldots y^{(\varrho-1)^{n_{\varrho-1}}} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho)} = 0.$$

Um noch auf eine der Anwendungen hinzuweisen, welche von der Formel (7) gemacht werden können, werde bemerkt, dass aus der für $\varrho = 2$ geltenden Beziehung, welche mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ multiplicirt worden,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 y'' = 0$$

zunächst ersichtlich ist, dass, weil $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$ ist, für eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ der Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 y''$ eine ganzzahlige, in x, y und den Coefficienten der Gleichung ganze Function ist; man sieht aber auch weiter leicht ein, dass, weil $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in jedem ihrer Posten den Factor 2 enthalten, auch

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 \frac{y''}{2!}$$

eine ganze und ganzzahlige Function sein wird. Um nachzuweisen, dass diese Eigenschaft allen Differentialquotienten zukommt, werde angenommen, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial y} y', \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 \frac{y''}{2!}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^5 \frac{y'''}{3!}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-3} \frac{y^{(\varrho-1)}}{(\varrho-1)!}$$

ganze und ganzzahlige Functionen seien; dann wird, wenn die Gleichung (7) mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-2}$ multiplicirt und

$$\begin{aligned} \varkappa &= 2\varrho - 2 - [n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \cdots + (2\varrho - 3)\,n_{\varrho-1}] \\ &= 2\varrho - 2 - [2\varrho - n_1 - n_2 - n_3 - \cdots - n_{\varrho-1}], \end{aligned}$$

oder

$$\varkappa = (n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-1}) - 2$$

gesetzt wird, mit Benutzung der Gleichung (6) sich ergeben

$$(8)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{\varkappa} \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_{\varrho-1} > 0 \\ n_1+2n_2+\cdots+(\varrho-1)n_{\varrho-1}=\varrho}} \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^{n_1}$$
$$\frac{\partial^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 \frac{y''}{2!}\right]^{n_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^5 \frac{y'''}{3!}\right]^{n_3} \cdots$$
$$\cdots \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-3} \frac{y^{(\varrho-1)}}{(\varrho-1)!}\right]^{n_{\varrho-1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-1} \frac{y^{(\varrho)}}{\varrho!} = 0.$$

Da nun aber die durch das Symbol eingeführten Ausdrücke

$$\frac{n_1(n_1-1)\cdots(n_1-\alpha+1)}{1\;2\cdots\alpha} \; \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial x^{n_1-\alpha}\, \partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}+\alpha}},$$

in welcher α jede ganze Zahl $0, 1, \ldots, n_1$ bedeuten darf, wie leicht durch Verschiebung von $\alpha!$ zu sehen, in jedem ihrer Posten durch

$$n_1!\,(n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1})!$$

theilbar sind, so wird jeder der Posten der in (8) stehenden Summe den numerischen Factor

$$\frac{(n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1})!}{n_2!\, n_3! \cdots n_{\varrho-1}!}$$

besitzen, welcher bekanntlich eine ganze Zahl ist, und da die eckigen Klammern der Voraussetzung gemäss ganzzahlige numerische Factoren besitzen, so erhalten wir den Satz:

dass für jede durch die algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ definirte algebraische Function der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-1} \frac{y^{(\varrho)}}{\varrho!}$$

eine ganzzahlige, in x, y und den Coefficienten der Gleichung ganze Function ist.

Hieraus kann man den von Eisenstein in den Monatsberichten der Berliner Akademie (Juli 1852) aufgestellten wichtigen Satz von der Eigenschaft der Potenzentwicklung algebraischer Functionen, den Heine im 48^{ten} Bande des Crelle'schen Journals und Hermite im 7^{ten} Bande der Proceedings of the London Mathematical Society (1876) bewiesen haben, leicht herleiten.

Heidelberg, im Mai 1886.